TRAITEMENT DES ERREURS EN MATHÉMATIQUES ET STRATÉGIES DE DIFFÉRENCIATION

Roland CHARNAY,
Equipe de didactique des mathématiques, INRP

Résumé : Comment certains travaux de didactique des mathématiques peuvent-ils aider à engager une réflexion et à proposer des pistes de travail dans la perspective de la mise en places des cycles à l'école primaire ?
Sur la base de travaux conduits par l'équipe de didactique des mathématiques de l'INRP, nous tentons d'apporter quelques éléments de réponse sur deux thèmes complémentaires :
- l'analyse des erreurs des élèves, les hypothèses qui peuvent être formulées sur leur origine et leur prise en compte par l'enseignant,
- les stratégies de différenciation qui peuvent être proposées aux enseignants.

En quoi la didactique peut-elle aider à penser et organiser un enseignement des mathématiques à l'école primaire conçu dans la perspective des cycles ?

C'est à certains aspects de cette question que nous tenterons de répondre dans cet article, en nous appuyant sur des recherches récentes de l'équipe de didactique des mathématiques de l'INRP qui ont notamment concerné l'analyse des erreurs des élèves et leur prise en compte par les enseignants dans le cadre de leurs cours (recherche «Articulation Ecole-collège») et l'organisation des apprentissages numériques et de la résolution de problèmes au cycle des apprentissages fondamentaux.

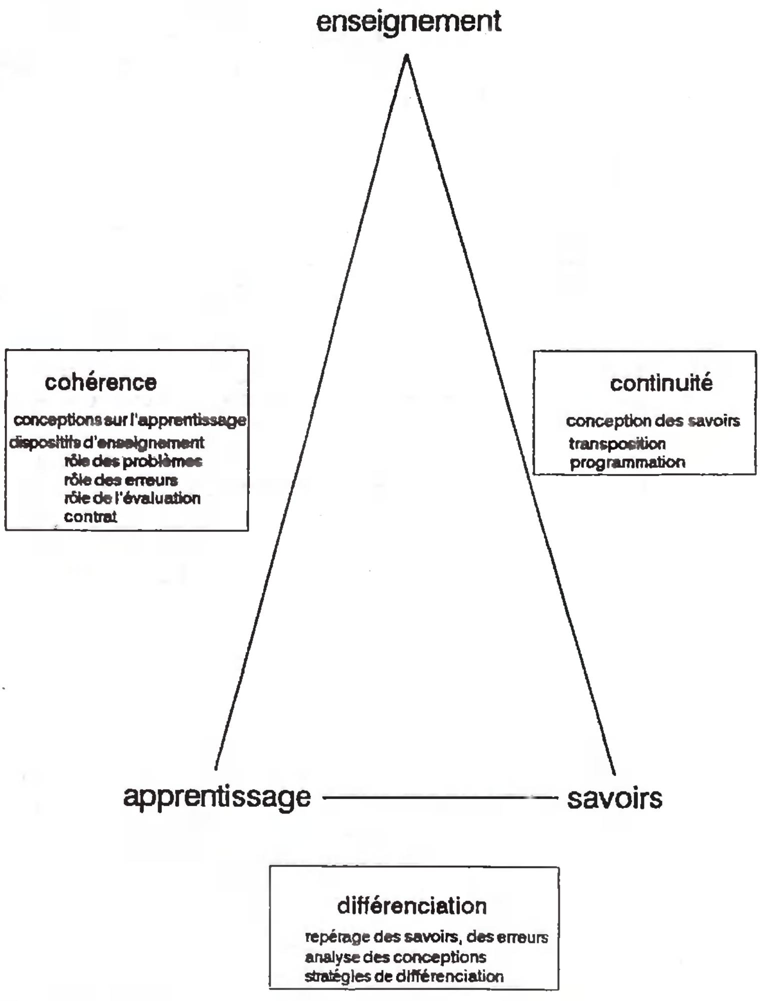
Le point de vue didactique nous invite à situer notre réflexion dans le cadre du système didactique, au travers des relations entre l'enseignement (point de vue du maître), l'apprentissage (point de vue des élèves) et les savoirs.

La perspective des cycles, caractérisée par la volonté de «mieux prendre en compte le développement de l'enfant» et «ses démarches d'apprentissage» et de «bien assurer la continuité entre les cycles»[1], peut alors être envisagée dans trois directions :
- la recherche d'une meilleure **cohérence** entre les enseignants d'un même cycle et d'une même école, pour ce qui concerne leurs conceptions d'apprentissage et les dispositifs d'enseignement qu'ils mettent en oeuvre,

1 L. JOSPIN (Ministre d'Etat, ministre de l'Education nationale, de la jeunesse et des sports) dans sa préface au document *«Les cycles à l'école primaire»*, CNDP et HACHETTE

- la recherche d'une meilleure **continuité** dans le développement des savoirs, leur découpage en vue de leur enseignement, la programmation des objectifs et des activités sur le long terme,
- la volonté de permettre une appropriation **différenciée** des connaissances par les élèves, de mieux prendre en compte des temps et des itinéraires d'apprentissage différents.

Le schéma suivant permet d'illustrer les points de vue retenus dans cette approche didactique des cycles :



Dans cet article, on examinera principalement le point de vue des erreurs, de leur repérage, de leur analyse, de leur interprétation et de leur prise en compte par l'enseignant, ainsi que celui du choix de stratégies de différenciation.

1. CONCEPTIONS D'APPRENTISSAGE ET PRATIQUES D'ENSEIGNEMENT

Certaines erreurs ou certains comportements d'élèves en classe sont interprétables en termes de **«contrat didactique»**. C'est-à-dire que ce sont moins les connaissances de l'élève qui sont en cause que la perception qu'il a de ce qu'on attend de lui dans la situation qui lui est proposée. En reprenant les propositions de (BROUSSEAU,1986) on peut définir le contrat didactique comme «l'ensemble des comportements de l'enseignant qui sont attendus de l'élève et l'ensemble des comportements de l'élève qui sont attendus de l'enseignant. Le contrat est donc ce qui détermine explicitement pour une petite part, mais surtout implicitement, ce que chaque partenaire va avoir à gérer et dont il sera, d'une manière ou d'une autre, comptable devant l'autre».

Lorsqu'il change de classe, l'élève doit s'adapter à un nouveau contrat, tenter de déterminer, pour un type d'activité donné, ce qui est permis, ce qui est interdit, ce qui est attendu.

Ainsi dans telle classe, un problème n'est proposé aux élèves qu'après que les connaissances nécessaires à sa résolution aient été étudiées et fait l'objet d'exercices nombreux, alors que dans telle autre classe l'élève se trouve confronté à des problèmes inédits qui serviront à la construction de nouvelles connaissances. Dans le premier cas, il s'agit d'appliquer des connaissances déjà étudiées et donc de déterminer, parmi celles qui ont été travaillées récemment, lesquelles sont utilisables ici. Dans le second cas, il s'agit de chercher une solution originale, nouvelle, personnelle peut-être, qui sera confrontée à celles d'autres élèves et appelée à évoluer. Changement de contrat!

Un élève de Sixième est confronté au problème suivant :

«Julie a acheté pour un goûter :

- *deux tablettes de chocolat à 8 F chacune ;*
- *quatre bouteilles de limonade à 6 F chacune ;*
- *un sac de brioches.*

Elle a payé 56 F. Quel est le prix du sac de brioches ?»

Il calcule 8 F x 6 F = 54 F

et répond *«Le prix du sac de brioches est 2 F»*

A-t-il cherché à comprendre la situation, à s'en faire une représentation? Ou a-t-il simplement utilisé des règles du type : dans un problème, il faut utiliser tous les nombres écrits en chiffres pour faire des calculs ; quand il y a le mot *«chacune»*, il faut faire une multiplication ? Exemples de règles du contrat didactique perçu par l'élève relativement à l'activité de résolution de problèmes.

Pour affiner l'analyse en terme de contrat didactique, on peut distinguer deux catégories d'erreurs.

D'une part, les erreurs qui renvoient à des règles du contrat élaborées par l'élève qui vont fonctionner comme des obstacles à une représentation correcte de la tâche proposée.

Par exemple :
- l'élève pense que dans un problème il faut utiliser tous les nombres écrits en chiffres, ou qu'un problème admet toujours une réponse et une seule qui s'obtient nécessairement par un calcul,
- l'élève pense que toute case vide doit être remplie, comme dans l'exercice suivant de l'évaluation nationale en début de CE2 (1990).

Ecris dans le bon ordre, chaque nombre à la place qui convient
367 - 582 - 309

300		*400*		*500*		*600*

dans lequel certains élèves répondent :

300	*309*	*400*	*367*	*500*	*582*	*600*

Ce type de réponse nous renseigne davantage sur certains aspects du contrat que sur les connaissances des élèves relativement au rangement des nombres.

D'autre part, les erreurs qui correspondent au fait que l'élève ne s'est pas approprié des règles spécifiques à une activité donnée, par exemple :
- comment rédiger la solution d'un problème?
- comment justifier une réponse, comment argumenter?
- ...

Pour l'essentiel, le contrat se définit implicitement, dans la pratique, et les règles évoquées sont d'autant plus prégnantes qu'elles permettent souvent de répondre aux attentes de l'enseignant.

C'est souvent dans les moments d'évaluation ou lors des corrections que l'élève se construit une représentation de ce qu'on attend de lui dans telle ou telle activité. Ainsi, en reprenant l'exemple de la résolution de problème, on peut opposer deux types d'exploitation des productions des élèves, qui en retour, influeront sur ce que l'élève fera dans une nouvelle activité de même type. Dans cette classe, le maître «fait une correction» : des élèves sont sollicités successivement et, guidés par l'enseignant, produisent au tableau une solution que toute la classe recopie. Dans cette autre classe, le maître propose une «mise en commun» : diverses solutions sont affichées, explicitées par leurs auteurs, discutées collectivement, comparées..., et, le plus souvent, aucune n'est retenue comme «meilleure». Lors d'une nouvelle activité de résolution de problème, l'élève de la première classe aura tendance à vouloir produire une solution qui se rapproche le plus possible de celle qu'il pense attendue par le maître ; celui de la deuxième classe sera peut-être davantage tenté de produire la solution qui correspond le mieux à la représentation qu'il se fait de la situation proposée, en mobilisant les connaissances disponibles pour lui.

Les pratiques de l'enseignant contribuent ainsi, jour après jour, à modeler le contrat qui influe lui-même sur les productions et les comportements de l'élève.

Quelques suggestions peuvent être faites pour aider les élèves à renoncer à certaines règles ou à s'en approprier d'autres :

- varier les activités de sorte que certaines règles (non souhaitées) ne fonctionnent pas systématiquement, par exemple proposer des problèmes comportant des données inutiles, des problèmes qui admettent plusieurs solutions, ou encore dont certaines questions n'appellent pas de calcul numérique ;
- travailler avec les élèves à l'explicitation des règles jugées importantes (travail qu'on peut situer dans le domaine de l'évaluation formatrice).

2. LES SAVOIRS, LES APPRENANTS ET L'ENSEIGNEMENT

2.1. Erreurs, conceptions, obstacles

Certaines difficultés d'élèves peuvent être analysées en référence aux conceptions des élèves relativement à un savoir déterminé. La notion de conception renvoie, pour un concept donné, à l'ensemble des connaissances (correctes ou erronées) qui peuvent être attribuées à l'élève et qui permettent d'expliquer les réponses qu'il donne et les procédures qu'il utilise pour traiter certaines questions.

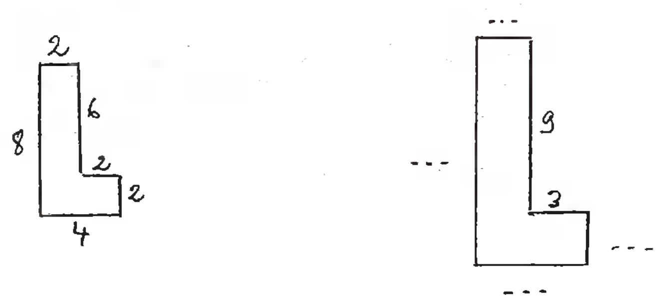
Exemple 1 (nombres décimaux) :

Un élève répond :
3,4 x 2,6 = 6,24
6,8 < 6,14
3,8 x 10 = 30,80

Cet élève fonctionne «comme si», pour lui, un nombre décimal était constitué de deux nombres entiers séparés par une virgule et que l'on doit traiter indépendamment l'un de l'autre. C'est sa conception du nombre décimal, ou du moins celle qu'on peut lui attribuer à partir de l'analyse d'erreurs convergentes.

Exemple 2 (agrandissement de figures) :

Dans l'exercice suivant, certains élèves répondent en ajoutant 1 aux segments horizontaux et 3 aux segments verticaux.



Ils ont la conviction que «pour agrandir, il faut ajouter». Et cette conception de l'agrandissement va fonctionner comme un «obstacle» à l'apprentissage, c'est-à-dire qu'elle va résister à l'enseignement de la connaissance correcte (proportionnalité entre les longueurs des segments correspondants des deux figures).

Cette idée d'obstacle, utilisée en didactique des mathématiques, est empruntée à BACHELARD qui l'a mise en évidence dans le cadre de ses travaux sur l'épistémologie des sciences.

Le franchissement de l'obstacle, qui suppose à la fois la reconnaissance du caractère erroné des réponses fournies et des procédures utilisées et l'appropriation de la connaissance correcte, sera une condition d'un apprentissage réussi, c'est-à-dire qui a du sens pour l'élève. Comme le dit (HAMELINE, 1977) «apprendre c'est autant perdre les idées qu'on se faisait qu'en acquérir de nouvelles».

Concernant l'origine de ces conceptions, on en évoque généralement de deux types (non exclusives l'une de l'autre) : les conceptions d'origine didactique, les conceptions d'origine épistémologique.

Les conceptions erronées d'origine didactique peuvent être référées aux stratégies, aux situations utilisées en vue de l'enseignement des savoirs considérés (certains parlent de «cicatrices d'apprentissage») .

Pour l'exemple 1, on peut penser que les situations choisies pour introduire le concept de nombre décimal n'ont pas permis aux élèves de s'en faire une représentation correcte : c'est le cas lorsque, par exemple, 7,16 m est présenté comme une autre écriture de 7m 16 cm, ce qui crée ou renforce, chez certains élèves, l'idée que 7,16 est composé de deux nombres entiers séparés par une virgule et qu'on peut donc traiter séparément. Au lieu de chercher à marquer la rupture nécessaire qui permettrait aux élèves d'opposer «décimal» et «entier», l'enseignement proposé insiste au contraire sur les continuités et les ressemblances entre ces deux types de nombres.

Citons un deuxième exemple. Au CP, dans toute situation de gain ou d'augmentation, l'élève, pour répondre, a été amené à utiliser l'addition. Pour lui, lorsqu'il est question d'augmentation, il faut faire une addition. Au CE1, il se trouvera désarçonné lorsqu'on lui demandera combien il y avait avant une augmentation ou, tout simplement, fera une addition !

Les conceptions-obstacles d'origine épistémologique sont celles qui peuvent être retrouvées dans l'histoire même du concept, qui en ont marqué la genèse et que le travail des mathématiciens à permis de rejeter, ce rejet étant l'un des éléments de la signification actuelle du concept. «On connaît contre une connaissance antérieure» soulignait BACHELARD (1975).

Exemple 1 : zéro est-il un nombre?

Apparu très tard, zéro a d'abord été un symbole (0) utilisé dans la numération de position avant, beaucoup plus tard, d'être reconnu comme un nombre de même nature que les autres.

Dans l'esprit de certains élèves, assimilé à «rien» alors que tout nombre évoque une quantité, il est source de difficultés, par exemple 14 x 0 = 14.

Exemple 2 : la figure en géométrie ou «ce que je vois» et «ce qui est».

Sur le dessin (tracé avec soin et précision) qui représente un carré de 4 cm de côté, je peux mesurer la diagonale avec un double décimètre et pourtant sa longueur ne s'exprime pas par un nombre décimal... C'est que mon dessin ne fait qu'évoquer une figure idéale sur laquelle doit s'exercer mon raisonnement.

Dans ce cas l'obstacle épistémologique se double au collège d'un obstacle didactique, puisqu'après avoir tracé soigneusement et mesuré attentivement pour constater des propriétés sur le dessin (jusqu'en 4ème) l'élève doit renoncer à tout cela pour raisonner sur la figure abstraite dont le dessin n'est là que pour faciliter l'évocation.

Pour ce type d'erreurs (liées à des conceptions-obstacles, quelle que soit leur origine), l'enseignement doit aider l'élève à prendre conscience du caractère erroné ou insuffisant de ses conceptions pour lui permettre de les rejeter et de s'en approprier de nouvelles. Les stratégies utilisées chercheront le plus souvent à s'appuyer sur une situation de conflit :

- conflit entre les conceptions de l'élève et un démenti apporté par la situation à laquelle il est confronté, la solution mise en œuvre produisant des résultats contredits par la situation elle-même (on parle alors de situation-problème),
- conflit socio-cognitif, né du débat et de l'échange d'arguments qui peut s'instaurer entre élèves qui défendent des points de vue contradictoires.

2.2. Le long terme dans les apprentissages

Rien ne s'apprend en une seule fois et tout ce qui est appris à un moment donné peut influer sur ce qui sera appris plus tard. Voilà qui invite à travailler sur la **continuité** des apprentissages... en n'oubliant pas que certains apprentissages supposent aussi des ruptures avec des apprentissages antérieurs, mais des ruptures voulues et organisées.

La définition des compétences attendues pour l'ensemble des trois années d'un cycle prend en compte le fait que la plupart des connaissances se construisent sur une longue période de temps (qui se réduit rarement à une année scolaire). Il convient d'en tenir compte dans le découpage des savoirs en vue de leur enseignement, de même qu'il faut retenir le fait que les concepts ne fonctionnent pas de manière isolée. VERGNAUD (1986) invite ainsi, pour la description des contenus de connaissance, des problèmes qui leur donnent sens et des procédures qu'il faut mobiliser pour les résoudre à «ne pas considérer un ensemble trop limité de problèmes, ni une période trop brève du développement des enfants ou de la scolarité».

Le travail des enseignants pour opérer un découpage des savoirs, établir sur un cycle (et plus) une programmation de leur apprentissage et élaborer les situations qui permettront cet apprentissage ne peut ignorer cette double réflexion :

- réflexion sur une organisation des concepts, sur les problèmes qui, à un moment donné, leur donneront sens, sur les procédures qui permettront de les mettre en oeuvre, sur les désignations verbales ou symboliques qui serviront à les évoquer,
- réflexion sur les difficultés souvent rencontrées, les erreurs les plus significatives et sur leurs origines possibles,
- réflexion sur une chronologie possible pour leur enseignement.

Pour aider à une telle réflexion, G. VERGNAUD a opportunément introduit l'idée de **«champ conceptuel»** qu'il définit comme «un ensemble de situations, dont la maîtrise requiert une variété de concepts, de procédures et de représentations symboliques en étroite interaction». Il étudie ainsi, par exemple, le champ conceptuel des «structures additives» qui recouvre le paysage complexe des situations qui peuvent se résoudre par l'addition ou la soustraction et dont certaines, pour être résolues, nécessitent le recours aux nombres négatifs. Il précise que «l'acquisition des structures additives s'étend sur une période du développement de l'enfant et de l'adolescent supérieure à dix années...». Il y faut donc plusieurs cycles !

Cette notion de «champ conceptuel» apparaît ainsi particulièrement féconde pour un travail dans le cadre d'un cycle, puisqu'elle permet d'envisager les apprentissages dans une perspective large en ce qui concerne les concepts étudiés et qu'elle prend en compte le long terme pour leur construction par l'élève. On est ainsi au coeur d'une continuité double : celle qui relie des concepts entre eux, celle qui s'intéresse à leur appropriation dans la durée.

L'exemple de l'apprentissage des problèmes arithmétiques et des calculs additifs et soustractifs au cycle 2

Ce domaine a été particulièrement étudié par notre équipe dans une recherche récente. Il est impossible de rapporter ici dans le détail l'ensemble des analyses et débats qui, sur ce thème, ont abouti à la proposition d'un ensemble d'activités pour l'ensemble du cycle, qui se veut cohérent et complet.

Plusieurs questions doivent être examinées pour décider telle ou telle programmation de ces apprentissages. Citons-en quelques unes seulement :

- faut-il séparer l'étude des problèmes additifs et des problèmes soustractifs ou faut-il en conduire une étude conjointe, notamment avant que les élèves ne disposent de moyens de calcul ?
- peut-on proposer aux élèves de résoudre des problèmes additifs ou soustractifs avant d'avoir commencé l'étude des opérations correspondantes, et notamment avant d'avoir appris les méthodes usuelles de calcul ?

- comment prendre en compte la structuration du champ des problèmes additifs et soustractifs et des types de problèmes qu'elle fait apparaître ? Faut-il en proposer une étude systématique et, si oui, dans quel ordre ?
- quelle place donner à chaque outil de calcul (techniques opératoires, calcul mental, calculette) ? Dans quel ordre et à quel moment introduire chacun d'eux ? Avec quelles interactions ?

Sans examiner une à une ces questions, indiquons quelques uns des choix que nous avons opérés pour une programmation de ces apprentissages en tentant d'en expliciter les raisons.

Au cours d'une **première phase** (qui recouvre la Grande Section et une partie du CP), les élèves sont confrontés à divers problèmes qu'un expert résoudrait par addition et soustraction, mais sans disposer des moyens de calcul (écrit ou mental) correspondants ni des écritures additives et soustractives usuelles (ils ne connaissent alors ni le signe +, ni le signe -, ni même le signe =). Dans le champ des nombres qu'ils connaissent (au moins oralement), ils doivent donc élaborer des procédures de résolution personnelles. Ainsi, si on lance deux fois le même dé qui affiche successivement 5 et 3, pour trouver le total des points obtenus tel élève dénombre des points fictifs en les désignant du doigt sur la table, tel autre est obligé de recourir à un dessin des deux faces du dé, tel autre lève 3 doigts pour surcompter à partir de 5, alors qu'un autre encore est capable d'un surcomptage uniquement mental, etc. Chacun utilise ainsi des moyens qui l'aident dans la mise en oeuvre d'une procédure qui lui paraît adaptée au problème posé. Cette première phase nous paraît essentielle. Elle vise au moins un triple objectif :

- permettre aux élèves de prendre conscience que les nombres sont de bons **outils** pour «dominer» un certain nombre de situations, pour répondre à des questions autrement que par l'action, et cela avant même que ces nombres n'aient fait l'objet d'une étude systématique,
- aider les élèves à s'approprier des situations dans lesquelles ils devront, plus tard, reconnaître et mettre en oeuvre les procédures expertes,
- développer chez les élèves le sens de l'activité mathématique, dans laquelle il faut faire preuve de créativité pour élaborer des solutions originales (et pas seulement reproduire des solutions apprises), en utilisant au mieux les connaissances dont on dispose.

Dès l'abord, est également manifesté le souci de proposer aux élèves des problèmes dits «additifs» et des problèmes dits «soustractifs», alors que classiquement les problèmes «soustractifs» sont réservés au CE1. Cette séparation entre problèmes «additifs» et problèmes «soustractifs» était justifiée par la difficulté d'apprentissage de la technique de la soustraction. La hiérarchie des problèmes est alors conditionnée par la difficulté des pratiques calculatoires. Or la difficulté d'un problème n'est pas principalement liée à l'opération experte sous-jacente, mais davantage au «calcul relationnel» à mettre en oeuvre : certains problèmes dits «soustractifs» sont ainsi plus facilement résolus que certains problèmes dits «additifs».

Cette phase ne se termine d'ailleurs pas au moment où commence la seconde, puisque tout au long du cycle (et au-delà) les élèves seront confrontés à des problèmes situés dans ce champ conceptuel, mais pour lesquels ils ne disposent pas forcément des moyens de traitement leur permettant de reconnaître immédiatement le calcul qu'un expert mettrait en oeuvre. Ils seront amenés à les résoudre en novices, pendant un temps souvent variable selon les élèves.

La **deuxième phase** s'amorce au CP. Il s'agit alors d'amener les élèves à une résolution experte pour certains problèmes (c'est-à-dire qui passe par la reconnaissance préalable de l'opération adéquate), en même temps que commencent à être mises en place les bases du calcul : mémorisation de certains résultats, capacité à la reconstruction d'autres résultats soit mentalement, soit en s'aidant de traces écrites. Il y a là un processus dialectique où le calcul (additif et soustractif) devient un **outil** efficace pour résoudre certains problèmes et où, en même temps, il est développé et étudié pour lui même (comme **objet** particulier), dans le but d'y devenir de plus en plus performant. Ajoutons que, dans cette phase, certains problèmes seront résolus par les élèves en ayant recours au calcul expert (par exemple une soustraction) alors qu'ils ne disposent pas encore des moyens d'effectuer eux-mêmes ce calcul. La calculette est là pour pallier cette difficulté ; on perçoit ici comment l'introduction précoce d'un tel outil peut modifier la programmation d'un enseignement.

La **troisième phase** s'amorce à la fin du CE1, mais ne débute vraiment qu'au milieu du CE2, lorsque tous les éléments du calcul sont en place (techniques opératoires fiables pour l'addition et la soustraction, résultats de la table mémorisés et plus facilement disponibles, possibilité de reconstruire mentalement d'autres résultats). Les outils de calcul sont donc là, à disposition. Quatre objectifs dominent alors :

- poursuivre la conquête des problèmes, situés dans ce champ conceptuel, qui peuvent être résolus de manière experte ; on a déjà souligné, avec G. VERGNAUD, combien cette conquête sera longue et se poursuivra au-delà de l'étude des nombres négatifs,
- dominer et étendre les procédures de calcul utilisables, et pour cela s'approprier (en acte d'abord, puis de manière plus conscientisée) certaines propriétés des opérations et certaines relations arithmétiques entre les nombres,
- mettre en place des procédures de calcul approché,
- être capable d'utiliser à bon escient les différents outils de calcul disponibles (techniques opératoires, calcul mental exact, calcul mental approché, calculette) et donc savoir choisir celui ou ceux qui sont appropriés dans un contexte donné.

La question de la continuité dans l'appropriation des connaissances relevant d'un champ conceptuel donné se pose donc, comme on peut le constater, à l'intérieur d'un cycle, mais aussi au-delà de cette durée. De ce point de vue, si la responsabilité de la programmation et de la mise en oeuvre de tels apprentissages relève bien de l'équipe des enseignants, ceux-ci doivent être aidés dans cette tâche par des travaux de recherche qui, seuls, peuvent fonder des choix raisonnés, à conditions d'être relayés par des publications accessibles et un important dispositif de formation continuée.

3. UNE GESTION DIFFÉRENCIÉE DES APPRENTISSAGES

C'est un lieu commun que d'affirmer que tous les élèves n'apprennent pas les mêmes choses en même temps, ni en utilisant les mêmes itinéraires.
Quelques réflexions théoriques permettent d'étayer cette affirmation souvent formulée, mais dont il faut bien dire que toutes les conséquences n'en sont pas tirées au niveau de l'enseignement des mathématiques, encore largement conçu comme un processus linéaire et collectif.

Une première caractéristique réside dans le fait que le système d'enseignement a tendance à vouloir identifier (ou réduire) le **temps de l'apprentissage** au **temps de l'enseignement**, à vouloir ainsi nier la contradiction entre le rythme de l'enseignement imposé globalement par les textes officiels (les programmes) et localement par le maître (progression, temps imparti pour une activité donnée) et les rythmes réels des apprentissages individuels qui ne sont ni identiques d'un élève à un autre, ni réguliers pour un même élève (moments d'apparente stagnation ou même régression qui accompagnent parfois les phases de réorganisation des connaissances lors d'un nouvel apprentissage).

Une seconde caractéristique, qui touche aux conceptions de l'apprentissage chez beaucoup d'enseignants, renforce la première tout en en autorisant la viabilité. C'est le présupposé fréquent «de la tête vide» qui conduit l'enseignant à considérer que (ou à faire comme si), au départ d'un apprentissage, l'élève ne «sait» rien concernant les connaissances à acquérir, et donc à réduire l'apprentissage à une accumulation/assimilation de savoirs présentés successivement. L'analyse des erreurs des élèves, et plus largement de leurs diverses productions, suffit à prouver la double vanité d'une telle conception de l'apprentissage. Nous avons tenté de montrer au § 2 ce que pouvaient nous révéler l'analyse des erreurs des élèves et la mise à jour des conceptions qu'elle autorise. Il nous suffira sans doute de souligner ici la diversité des conceptions qui peuvent s'exprimer sur un sujet donné, la variété des erreurs qu'elles peuvent provoquer, la résistance que certaines d'entre elles peuvent offrir à la construction de connaissances correctes et donc la nécessité de les prendre en compte de manière spécifique pour élaborer des situations qui permettent le franchissement de l'obstacle qu'elles constituent.

On pourrait y ajouter la prise en compte de caractéristiques propres des apprenants et qui peuvent rendre compte également de certains comportements erronés explicables par exemple en référence à des limitations du sujet à un moment donné de son développement (problèmes de conservation, difficulté dans certains calculs relationnels qui supposent la réversibilité opératoire, ...), à des limitations dans le domaine du traitement de l'information (notion de charge mentale de travail) ou encore à des facteurs plus personnels comme la représentation que l'élève a de lui-même comme «mathématicien».

Comment, dans ces conditions, organiser un enseignement, malgré tout nécessairement collectif, qui prenne en compte et en charge ces différences dans les temps d'apprentissage et dans les façons de concevoir, de maîtriser et de mobiliser les mêmes notions à un moment donné ? Comment travailler avec les «connaissances actuelles» (diverses) des élèves ?

La gestion de cette inévitable hétérogénéité doit reposer sur un repérage et une analyse des conceptions, des compétences et des difficultés de chacun et sur l'identification de ses possibilités de développement et de ses besoins. L'observation et l'évaluation sont donc des moments importants dans ce domaine... à condition de disposer de référents solides pour l'interprétation des productions des élèves (et des procédures qu'ils ont utilisées)... et de quelques pistes pour la mise en place de stratégies de différenciation.

Intéressons nous à quelques **stratégies de différenciation.**

Leur mise en oeuvre n'implique pas forcément, et en tous cas pas à tout moment, des modifications dans l'organisation de la classe. Dans un esprit de simplification et de «réalisme», nous suggérons ici trois formes de différenciation.

a) La différenciation «par les procédures»

Il s'agit, pour l'enseignant, d'accepter (et de valoriser) le fait que, dans certaines activités (par exemple la résolution d'un problème), **chacun réponde avec sa propre solution, ses propres procédures**, sans forcément établir de hiérarchie entre les solutions.

Ainsi, au CM1, dans un problème de partage équitable (où l'on cherche la valeur de la part de chacun), certains répondront en ayant recours à un dessin, d'autres en faisant des hypothèses sur la valeur de chaque part et en utilisant l'addition répétée, d'autres avec des essais multiplicatifs, d'autres encore auront reconnu immédiatement que la division est l'outil adapté. L'inventaire, la confrontation des procédures, les «ponts» que les élèves et l'enseignant pourront établir entre certaines d'entre elles lors d'une **mise en commun** sera une occasion de progrès pour certains ; il n'y a plus alors **la** bonne solution (celle que le maître attendait!), mais **des** solutions qui sont reconnues et prises en compte. C'est aussi l'occasion d'analyser certaines erreurs, de distinguer avec les élèves, par exemple, celles qui sont le signe d'une mauvaise interprétation de la situation, celles qui révèlent une mauvaise gestion d'une solution par ailleurs viable, ou encore les erreurs d'exécution (d'un calcul, par exemple).

L'idée de **mise en commun, d'échanges, de débats** s'oppose alors à celle de **correction.** L'opposition en fait porte sur ce qu'on pense être les ressorts de l'apprentissage : dans le premier cas, on table sur les interactions entre pairs, sur la confrontation des solutions pour provoquer un apprentissage ; dans le second cas, on espère qu'en exposant et en expliquant la «bonne solution», on permettra son appropriation par les élèves. Elle porte également sur la tolérance qu'on peut avoir vis à vis de telle ou telle forme de solution, sur le fait de considérer ou non que tous les élèves doivent avoir accès aux mêmes solutions au même moment ou encore sur le caractère relatif de telle erreur. Ce qui ne manquera pas d'avoir un effet en retour sur la perception par l'élève du contrat, de ce qu'il a le droit d'utiliser et de produire : s'agit-il de répondre au problème posé, à partir de la représentation que je m'en fais et en utilisant les moyens et les connaissances que je pense utiles ici et qui sont disponibles pour moi... ou bien s'agit-il de trouver (de deviner, pour certains) la solution attendue par l'enseignant ? En poussant un peu loin la caricature, répondre, chacun à sa façon, au problème posé... ou bien répondre, tous de la même façon, au maître qui a posé le problème !

b) La différenciation par les ressources disponibles et les contraintes imposées

La situation est, comme précédemment, la même pour tous les élèves, mais certains éléments sont adaptés aux capacités actuelles des élèves. Ainsi dans une classe de CP les élèves sont confrontés à l'activité suivante : chacun doit réaliser une fleur en collant autour d'un cœur (représenté par un disque dessiné sur une feuille) un certain nombre (différent d'un enfant à l'autre) de pétales représentées par des gommettes qui sont fournies par le maître par bandes de cinq. Pour les obtenir il faut demander au maître le moins possible de bandes (et non de gommettes). Le nombre de gommettes que doit commander chaque enfant est évidemment une variable très importante du problème à résoudre. Il peut être ou non multiple de 5 (et dans ce dernier cas conduire à des gommettes en surnombre, gênantes pour certains). La taille de ce nombre est également un élément décisif : un nombre compris entre 5 et 10 autorise le recours aux doigts ou à un dessin, des nombres tels que 25 ou 32 le permettent plus difficilement et incitent au calcul. La variable «nombre de gommettes» permet ainsi à l'enseignant une double action : adapter la quantité aux compétences de chacun par rapport à sa maîtrise des nombres et du calcul, obliger certains élèves (ceux qui en sont capables) à abandonner une procédure pour une autre plus élaborée. Au contraire, pour des élèves en difficulté, on pourra proposer l'aide d'un matériel, par exemple des réglettes formées de 5 cubes ou encore des cubes emboîtables, mais fournis isolément.

On peut envisager de «jouer» avec une autre contrainte, qui est celle du temps disponible pour l'activité proposée. Chacun sait bien que, pour une même tâche, certains ont besoin de plus de temps. Comme on l'a déjà signalé, une réflexion sur le temps se révèle centrale dans l'idée de cycle. On peut, à cet égard, se proposer d'agir soit au niveau du «temps court» (celui de la différenciation dans le cadre d'une activité déterminée) soit à celui du «temps long» (celui qui invite à distinguer le rythme de l'enseignement collectif et le rythme de l'apprentissage individuel).

Ce type de travail (même activité pour tous, mais avec différenciation au niveau des ressources et des contraintes) peut être proposé individuellement ou en groupes homogènes formés sur la base des compétences des élèves vis à vis du problème considéré, les échanges dans le groupe peuvent alors être plus fructueux que dans un groupe totalement hétérogène.

L'intérêt de ce type de gestion différenciée réside dans le fait que, tout en permettant une adaptation du problème posé aux compétences des élèves, il autorise malgré tout des confrontations de solutions puisque le contexte et le type de questions posées restent les mêmes pour tous.

c) La différenciation par la tâche

On propose, dans ce cas, de mettre en place des ateliers «de soutien» ou «de besoin», «d'entraînement» et «d'approfondissement» dans lesquels des activités différentes et mieux adaptées sont proposées en fonction des besoins évalués de chaque élève. Les élèves ne travaillent alors pas tous sur la même activité, ni même forcément dans la même discipline.

A certains sont proposées des activités d'approfondissement ou d'entraînement et qui peuvent être réalisées en autonomie, ce qui permet au maître de se rendre plus disponible pour d'autres élèves qui ont le plus besoin de sa présence (par exemple, travail d'aide au dénombrement pour des élèves de CP qui n'en maîtrisent pas toutes les composantes). Cette forme de tutorat peut d'ailleurs, dans certains cas, être exercée par d'autres élèves.

CONCLUSION

Les travaux que nous avons pu conduire dans le cadre de nos recherches nous ont convaincus que tout enseignement doit articuler une triple réflexion :

- sur les contenus enseignés, leur organisation et leur spécificité (donc leurs exigences),
- sur les connaissances (correctes ou erronées) «déjà là» chez les élèves au moment où on choisit d'enseigner tel savoir et donc les possibilités d'apprentissage et les obstacles potentiels que révèlent ces connaissances,
- sur les modalités d'enseignement les mieux à même de permettre des apprentissages qui ont du sens pour l'élève.

Dans une telle perspective, qui sous-tend notre approche didactique des cycles, la mise en évidence, l'analyse et la prise des compte des productions des élèves (et plus particulièrement de leurs productions erronées) occupe une place décisive, notamment parce qu'elle place au centre des préoccupations la relation de chaque élève aux objets de savoirs qu'il doit s'approprier.

BIBLIOGRAPHIE

ARSAC G. (1989) : La transposition didactique en mathématiques, in *La transposition didactique en mathématiques, en physique, en biologie*, IREM de Lyon

BACHELARD G. (réédition 1975) : *La formation de l'esprit scientifique*, Vrin

BROUSSEAU G.(1986) : Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, in *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 7.2, La Pensée Sauvage

CHARNAY R. (1988) : Apprendre (par) la résolution de problèmes, *Grand N*, n° 42

CHARNAY R. et MANTE M. (1991) : De l'analyse d'erreurs en mathématiques aux dispositifs de remédiation : quelques pistes, *Grand N*, n°48

CHARNAY R. (1992) : *Quelques réflexions concernant la mise en place des cycles et l'enseignement des mathématiques à l'école primaire*, Grand N, n°49

COLOMB J., GUILLAUME J.C., CHARNAY R. (1987) : Articulation Ecole/Collège, quels contrats disciplinaires en mathématiques ? *Revue Française de Pédagogie*, n°80, INRP

Equipe de recherche en didactique des mathématiques (1986) : *En mathématiques, peut mieux faire; l'élève face à la difficulté en mathématiques*, Rencontres Pédagogiques, n°12, INRP

Equipe de recherche en didactique des mathématiques (1988) : *Un, deux... beaucoup, passionnément ! Les enfants et les nombres*, Rencontres Pédagogiques, n°21, INRP

ERMEL (1990) : *Apprentissages numériques, Cycle des Apprentissages fondamentaux, Grande Section*, Hatier

ERMEL (1991) : *Apprentissages numériques, Cycle des Apprentissages fondamentaux, Cours Préparatoire*, Hatier

HAMELINE D., DARDELIM M.J. (1977) : *La liberté d'apprendre*, Ed. Ouvrières

Ministère de l'Education nationale, de la Jeunesse et des Sports, Direction des Ecoles (1991) : *Les cycles à l'école primaire*, CNDP-Hachette

VALENTIN D. (1991) : Continuité et différenciation en mathématiques : un exemple au cycle des apprentissages fondamentaux, *Les actes de lecture*, n°34, AFL

VERGNAUD G. (1981) : Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 2.2, La Pensée Sauvage

VERGNAUD G. (1986) : Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques, *Grand N*, n°38