

Affronter la complexité des situations d'apprentissage des mathématiques en classe. Défis et tentatives

Colette LABORDE

Laboratoire Leibniz-IMAG
46, avenue Félix Viallet
38000 Grenoble, France.

Résumé

Ce point de vue retrace l'évolution méthodologique des recherches en didactique des mathématiques dans leur étude de l'apprentissage de savoirs mathématiques en classe. Il veut montrer que la prise en compte de la complexité de la classe résulte de la conjonction d'intentions et de théorisations. Même si le bilan actuel est en demi-teintes (les réalisations n'ont pas toujours suivi les déclarations), la notion même d'apprentissage a évolué.

Mots clés : *apprentissage, savoirs mathématiques, situations de classe, ingénierie didactique, analyse a priori.*

Abstract

This paper reports on the methodology used in studies on the learning of mathematics in the classroom. It attempts to describe how this methodology has evolved and how the complexity of class situations has been taken into account over time. As a result, the meaning of the notion of learning has been subject to change.

Key words : *learning, mathematical knowledge, class situations, didactic engineering, a priori analysis.*

Resumen

Este punto de vista describe la evolución metodológica de las investigaciones en didáctica de las matemáticas relativas al estudio del aprendizaje de saberes matemáticos en clase. El mismo pretende mostrar que la toma en cuenta de la complejidad de la clase resulta de la conjunción de intenciones y de teorizaciones. Mismo si el resumen actual es un poco oscuro (las realizaciones no siempre han seguido las declaraciones), el significado de la noción de aprendizaje ha evolucionado.

Palabras claves : *aprendizaje, saber matemático, situación de clase, ingeniería didáctica, análisis a priori.*

Dans ses jeunes années, alors qu'elle était en cours d'élaboration ou de gestation de cadres théoriques, la didactique des mathématiques en France avait besoin d'affirmer fortement les spécificités de ses objets d'étude, de ses problématiques et de ses méthodes, pour être reconnue comme un champ de recherche autonome. Les arguments mettaient en avant la prise en compte de deux éléments fondamentaux : les savoirs dont l'apprentissage est visé, la situation de classe dans laquelle se produisent ces apprentissages ou du moins, où se situe l'origine de ces apprentissages. Notre propos, à la demande du comité éditorial, est ici de cerner l'usage qui est fait des situations de classe dans ces recherches pour l'étude de l'apprentissage. Nous le ferons en reconstruisant l'histoire de la spirale (et non du cycle...) des défis et tentatives théoriques et méthodologiques de ces recherches. Nul doute que la nature spécifique des savoirs mathématiques a joué un rôle parfois décisif sur les orientations prises, mais certains des problèmes rencontrés transcendent le cas particulier des mathématiques.

1. AU COMMENCEMENT : LE SUJET EN SITUATION

Les recherches en didactique des mathématiques ont été mues à leur début par deux motivations : mieux connaître le fonctionnement des élèves lorsqu'ils apprennent les mathématiques, mieux connaître les rapports entre enseignement et apprentissage en mathématiques. Ces motivations débouchaient sur le projet plus ambitieux de modéliser à la fois le fonctionnement des connaissances des élèves, et les processus didactiques à l'œuvre dans des situations, qu'elles soient organisées ou dites « naturelles ».

Si les recherches ont évidemment défini leur objet d'étude et donc la notion même d'apprentissage en interaction dialectique avec le cadre théorique élaboré pour l'appréhender, elles n'avaient pas cependant la prétention de partir de zéro. Comme le rappelle Brun (1994, p. 71), un point de départ commun aux recherches en didactique des mathématiques réside

«dans une prise de position constructiviste et interactionniste dans le sillage de l'épistémologie génétique», en intégrant les points de vue piagétien et vygostskien (en particulier, en ce qui concerne le point de vue interactionniste). Suivant un postulat sous-jacent à de nombreuses recherches en didactique, on considère généralement que c'est dans l'action en situation, dans une dialectique de déséquilibres et rééquilibrations que l'individu apprend. En mathématiques, l'action consiste principalement à résoudre un problème. Les problèmes jouent un rôle privilégié dans la genèse des connaissances, à la fois dans la construction sociale des savoirs au sein d'une communauté comme celle des mathématiciens professionnels et dans le développement de l'individu : «la solution de problème», comme l'affirme Vergnaud (1981, p. 220) est «la source et le critère du savoir». À partir de cette base commune, se sont développées des théories qui mettent l'accent sur des composantes différentes de l'apprentissage.

Les deux premières théories développées en France en didactique des mathématiques l'ont été autour de cet axe sujet-situation : il s'agit de la théorie des schèmes et champs conceptuels et de la théorie des situations. Une description actualisée de chacune en est donnée respectivement dans Vergnaud (1991) et dans Brousseau (1989). Elles ont donné lieu à de nombreuses recherches et résultats sur lesquels s'appuient les recherches actuelles. L'analyse de champs conceptuels comme ceux des structures additives ou multiplicatives (proportionnalité) a eu un impact international important. Un processus didactique comme celui des décimaux (Brousseau, 1980 et 1981) constitue une référence... Ces deux théories proposent des points de vue différents sur l'apprentissage, mais non sans lien. L'analyse de leur complémentarité et de leurs interrelations permet en fait de poser la question de la définition de l'objet d'étude dans une recherche sur l'apprentissage de notions mathématiques par un sujet, en l'occurrence un élève.

Un élément clé, commun aux deux théorisations citées plus haut, est la notion de situation appelant un certain fonctionnement des connaissances. «On appelle champ conceptuel un ensemble de situations dont le traitement implique des schèmes, concepts et théorèmes, en étroite connexion, ainsi que des représentations langagières et symboliques susceptibles d'être utilisées pour les représenter», écrit Vergnaud (1994, p. 65). Dans la théorie des situations, la situation est vue comme l'ensemble des interactions entre un sujet et un milieu. Dans la théorie des champs conceptuels, l'accent est mis sur les conceptualisations du sujet. La théorie des situations se démarque en soulignant le rôle crucial du milieu (milieu sur lequel l'élève agit, avec lequel il interagit et dont il reçoit des rétroactions) : «concepts et théorèmes» en jeu renvoient à des «opérations de pensée mises en œuvre dans les schèmes de traitement utilisés par les élèves» (Vergnaud, op. cit.), alors que dans la théorie des situations, les situations d'action, de formulation et de

validation se distinguent par une organisation différente du milieu (Brousseau, 1986), organisation qui appelle un fonctionnement de nature différente des connaissances.

Les objectifs poursuivis sont distincts dans les deux cadres théoriques : d'un côté il s'agit de saisir le développement des compétences d'un sujet en mathématiques, les conceptualisations de ce dernier sont alors au cœur de l'interrogation : «*C'est pourquoi aussi c'est un vrai travail du psychologue, du didacticien, de l'enseignant que de dénicher les conceptualisations sous-jacentes aux conduites des élèves, aux procédures qu'ils utilisent, à leurs erreurs.*» (Vergnaud, 1994, p.181) De l'autre côté, à l'origine de la théorie des situations, il s'agit d'étudier les conditions dans lesquelles les comportements ou appropriations peuvent apparaître ainsi que les rapports qu'entretiennent les conceptions mathématiques – dont ces comportements sont l'indice – avec certains caractères des situations qui les accompagnent (Brousseau, 1980, p. 11). La connaissance est ici considérée comme un moyen de contrôle de l'environnement, les apprentissages comme des changements dans les instances de contrôle de l'environnement (Brousseau & Centeno, 1991, p. 192).

Dans la pratique, de nombreux travaux de recherche en didactique des mathématiques ont oscillé entre ces deux pôles : le pôle des invariants construits par le sujet et attachés à des situations-problèmes, le pôle des invariants organisateurs d'un milieu susceptible de permettre des contrôles différents de la part du sujet. La proposition récente de Balacheff englobe les deux pôles en considérant la connaissance, non comme attachée au sujet ou au milieu, mais comme un état d'équilibre entre un sujet et un milieu (Balacheff, 1996).

2. DE L'USAGE DES SITUATIONS PROBLÈMES À CELUI DES INGÉNIERIES DIDACTIQUES

Comme le résume Artigue (1984) dans le début de sa thèse, le sous-système savoir-élève a été largement étudié, dans les débuts de la recherche, par des travaux consistant à confronter les élèves à des tâches soigneusement conçues et à modéliser leurs procédures. En un mot, les premiers travaux ont défriché le champ encore trop inconnu des conceptions des élèves sur des notions mathématiques précises. Nul doute que ces travaux ont fourni des résultats, qui servent encore, sur les connaissances des élèves et les situations-problèmes. Ils ont mis en évidence des passages conceptuels difficiles, des variables dont le changement de valeur favorise des changements de procédure chez les élèves (appelées «*task variables*» par Lesh, 1985, et en France «*variables de commande*» ou «*variables*

didactiques» lorsqu'elles sont utilisées à des fins didactiques). On sait maintenant qu'il y a un apprentissage long et délicat pour passer d'un problème additif, dans lequel sont donnés l'état initial et la transformation additive et est à trouver l'état final (exemple : énoncé 1), à un problème dans lequel il faut trouver l'état initial, la transformation et l'état final étant donnés (exemple : énoncé 2) (Verгдаud, 1994, p. 73).

Énoncé 1 : «Pierre avait 6 francs dans son porte-monnaie. Sa grand-mère lui donne 10 francs. Combien a-t-il maintenant ?»

Énoncé 2 : «Pierre a 16 francs. Sa grand-mère vient de lui donner 10 francs. Combien avait-il avant ?»

On sait que la position relative de l'axe de symétrie et de la figure objet est une variable de tâche cruciale (Grenier, 1988) dans la tâche de construction du symétrique de cette figure par rapport à l'axe. Proportionnalité, limites, nombres réels, symétrie orthogonale, aire, tangente, pour n'en citer que quelques-unes, sont des notions qui ont donné lieu à de telles investigations. Soulignons que ce type de recherche ne s'est pas cantonné à la France mais s'est aussi largement développé à l'étranger, en particulier grâce au groupe international *Psychology of Mathematics Education* dont une synthèse des travaux est donnée dans Nesher et Kilpatrick (1990).

La méthode utilisée permet une étude de l'évolution des connaissances, que ce soit en prenant un échantillon contenant diverses classes d'âge, ou en analysant de façon fine les modifications des conduites des sujets en situation, modifications dues aux interactions avec le milieu ou avec des pairs (micro-genèse). Mais elle reste essentiellement de nature diagnostique et consiste à considérer les interactions élève-tâche en dehors du processus d'enseignement ou de façon quasi isolée des interactions avec l'enseignant et le groupe classe.

Pendant la théorie des situations avait déjà été exprimée sous ses premières formes dès la fin des années soixante ou le début des années soixante-dix (voir la synthèse historique de Perrin-Glorian, 1994) et était exemplifiée par la course à 20 (suite de situations à l'école primaire autour de la notion de division et de congruence modulo un entier, particulièrement représentative de la théorie des situations) ou le processus d'enseignement des décimaux (Brousseau, 1980 et 1981). C'est pourquoi, simultanément à ces études diagnostiques, certains travaux, vers la fin des années soixante-dix, étudient une évolution de connaissances sur un ensemble articulé de situations qui constituent un processus réalisé en classe avec des interventions de l'enseignant et des phases collectives gérées par ce dernier. Des exemples très représentatifs en sont les «*situations et processus didactiques sur les nombres rationnels positifs*» (Rouchier et al., 1980), «*l'expérience didactique sur le concept de volume*» (Verгдаud et al., 1983),

une suite ordonnée de situations mettant en jeu la notion de cercle (Artigue & Robinet, 1982). Nous avons repris à dessein les termes utilisés par les auteurs pour mettre en évidence le flottement du vocabulaire à cette époque, qui traduit à nos yeux le caractère transitoire de cette période. Il paraissait alors crucial aux didacticiens de ne pas se contenter d'affirmer la dimension de classe comme constitutive du champ de la didactique mais de s'y affronter courageusement...

Il s'agit à nos yeux d'une tentative de liaison entre une méthode inspirée de la théorie des champs conceptuels et celle des situations didactiques ; les situations ne sont pas qualifiées de didactiques mais de situations-problèmes (par exemple chez Rouchier et al., 1980 et Artigue & Robinet, 1982) et ce sont les conceptions des élèves qui sont visées par l'étude (Artigue & Robinet, 1982 ; Vergnaud et al., 1983). Le travail sur le concept de volume de Vergnaud et al. est à cet égard très éclairant car il constitue à lui seul un numéro entier (vol. 4, n° 1, 1983) de la revue «*Recherches en didactique des mathématiques*», qui joue le rôle d'organe de la communauté française de didactique des mathématiques. Or ce numéro est constitué de trois articles, le premier sur les conceptions et compétences des élèves des quatre classes du collège, confrontés à des tâches lors d'entretiens en dehors de la classe (Ricco et al., 1983), le deuxième sur une suite de situations didactiques réalisée en classe de cinquième et observée (Vergnaud et al., 1983), le troisième sur une comparaison entre un questionnaire posé aux élèves avant et après la séquence didactique (Rogalski et al., 1983). Dans l'introduction de ce numéro, Vergnaud (pp. 23-24) explicite une complémentarité entre la théorie des situations, celle de la complexité psycho-génétique et celle de l'analyse de la tâche. Mais ses arguments témoignent que l'objectif d'ensemble, qui préside aussi bien aux entretiens individuels qu'à la séquence didactique, consiste en l'étude de la genèse des connaissances, sur un temps long pour les entretiens, sur un temps court pour la séquence didactique :

«Il existe un temps long de la psychogenèse, bien connu des psychologues, qui se mesure en années et qui permet d'établir des hiérarchies dans la complexité des problèmes et des concepts mathématiques. Il existe aussi un temps court de la psychogenèse, moins bien étudié que le premier et pourtant essentiel en didactique, qui concerne l'évolution des conceptions et des pratiques d'un sujet ou d'un groupe de sujets face à une situation nouvelle.» (p. 24)

C'est à peu près de façon contemporaine à la parution de ces travaux sur le volume (c'est-à-dire au début des années 1980) que le terme d'ingénierie didactique est apparu dans les papiers et réunions internes à la communauté de recherche en didactique. À ce propos, nous renvoyons le lecteur à la synthèse écrite par Artigue pour l'école d'été de recherche en

didactique des mathématiques en 1989 et publiée en 1990. En effet, certains comme Chevallard (cité dans Artigue, 1990, p. 284) pressaient la communauté de rencontrer enfin l'objet complexe réel dont la théorisation importe : le système didactique dans son fonctionnement concret. Une méthode de recherche spécifique à la didactique trouve alors son nom officiel, elle se précise tout au long des années 1980, à la fois sur le plan de la théorisation, en particulier par les apports de Brousseau, et sur le plan expérimental. La période entre 1980 et 1990 constitue en effet le printemps des ingénieries didactiques.

3. L'INGÉNIERIE DIDACTIQUE : UNE MÉTHODE

Une description prosaïque, et à certains égards trompeuse, de la méthode d'ingénierie didactique consiste à la définir comme la suite de quatre phases : conception, réalisation, observation et analyse d'une séquence d'enseignement. Elle cesse d'être une innovation et prend le statut de méthode dès lors que la conception envisage un ensemble de scénarios possibles dépendant de variables globales ou locales, et que les valeurs de ces variables sont fixées par le chercheur en fonction des effets attendus sur les conduites des élèves et la gestion de la classe. La conception de l'ingénierie est indissociable de son analyse *a priori*¹. Le ressort de la méthode tient à la confrontation entre l'analyse *a priori* et l'analyse *a posteriori* menée à partir des observations de la séquence d'enseignement réalisée. L'ingénierie didactique consiste à mettre à l'épreuve les liens que la théorie supposait entre enseignement et apprentissage par une **validation interne**. Il ne s'agit pas de comparer les conduites des partenaires et les événements à ceux d'une classe témoin², mais de comparer les deux modélisations différentes du même objet (la séquence) que sont l'analyse *a priori* et l'analyse *a posteriori*. Car l'analyse *a posteriori* constitue bien une modélisation des observables et non une simple constatation, comme le souligne Margolinas (1992). En effet, l'analyse *a posteriori* pose le problème de la signification des actions observables relatives tant au maître qu'à l'élève : «*l'illusion physicaliste de la réduction*

1 L'analyse *a priori* qui revient à exprimer les choix de conception dans une rationalité issue d'un cadre théorique peut évidemment être raffinée après coup, c'est-à-dire après la réalisation de la séquence. Comme le dit Margolinas (1992), le terme *a priori* ne renvoie pas à une position temporelle mais à son indépendance des faits d'expérience : «*L'analyse a priori peut donc avoir lieu après l'observation ; elle perd son sens prédictif pour prendre un sens causal*» (p. 131).

2 Dans la présentation du prétest et du post-test à la séquence sur le volume citée plus haut (Vergnaud et al., 1983), les auteurs précisent ainsi (p. 130) que l'analyse du questionnaire ne constitue donc pas pour eux une évaluation de la séquence, dans la mesure où aucune comparaison avec une autre classe n'a été effectuée. Une validation interne ne constitue donc pas pour eux une évaluation.

de l'observation à l'adéquation avec une prévision a jusqu'ici empêché les chercheurs en didactique des mathématiques de s'engager dans la voie du travail théorique de l'analyse a posteriori et ces moyens n'existent pas à l'heure actuelle» (Margolinas, 1992, p. 132).

4. LA PRATIQUE DE LA MÉTHODE

Entre 1980 et le début des années 1990, sont publiés des travaux de recherche fondés sur des séquences d'enseignement en classe (entre autres, Robert, 1983 ; Robinet, 1983 ; Douady, 1984 ; Brousseau, 1986 ; Bautier, 1988 ; Grenier, 1988 ; Vergnaud et al., 1988 ; Artigue, 1989 ; Douady & Perrin Glorian, 1989 ; Lemonidis, 1991 ; Parzysyz, 1991 ; Robert, 1992 ; Dorier et al., 1994). Certains déclarent explicitement et plus ou moins fortement mettre en œuvre des ingénieries (mais avec des variations : Artigue parle de *recherche* d'ingénierie, tandis que Robinet parle d'une *expérience* d'ingénierie), mais tous ne le font pas (ainsi Lemonidis qualifie-t-il d'*enseignement expérimental* la séquence d'enseignement, objet de son étude).

Mais quel que soit le nom donné à la séquence conçue et réalisée, de tous ces travaux émerge le souci d'explicitation des objectifs et des choix globaux et locaux *a priori* dans la conception de la séquence. Comme le souligne Artigue (1990, p. 291), la dimension épistémologique par l'analyse des contenus mathématiques engagés dans la séquence est fortement présente. La dimension cognitive l'est un peu moins. Certains travaux procèdent de façon fine à une analyse des conceptions préalables possibles des élèves engagés dans la séquence, soit de façon interne à l'aide des premières situations auxquelles sont confrontés les élèves dans la séquence, soit de façon externe par des recherches (pouvant être à grande échelle comme dans Grenier, 1988, et Parzysyz, 1991) fournissant des données sur ces conceptions possibles. D'autres travaux se contentent de faire référence à des résultats de recherche globaux sur le champ conceptuel concerné. La dimension didactique, surtout relative à des contrats locaux institués en classe, a fait, au cours du temps, son apparition dans l'explicitation *a priori* des choix.

La partie relative à l'analyse *a posteriori*, en revanche, est souvent plus languide. La validation interne, ressort de la méthode d'ingénierie comme dit plus haut, est souvent confondue avec ou intégrée dans la description de ce qui s'est passé, description que certains auteurs appellent *chronique commentée*. Il est davantage mis l'accent sur les conduites observées des élèves et de l'enseignant que sur le retour aux choix de conceptions et à l'analyse *a priori* : la mesure grossière avec une règle graduée toute simple des parts respectives consacrées, dans ces articles, à ces deux rubriques

est déjà éloquente ! L'auteur fournit au lecteur une narration commentée du déroulement, structurée par le temps (chronologique) ou par des thèmes d'analyse choisis par lui-même. Dans les deux cas, y compris dans le premier, le lecteur est astreint à chausser les lunettes de l'auteur, sauf à l'occasion de passages transcrits de la chronique, encore qu'ils ne permettent pas toujours à eux seuls de donner des moyens d'analyse critique au lecteur.

En général, la validation employée n'est finalement pas très différente de celle en vigueur avant l'institutionnalisation de la méthode d'ingénierie didactique. Elle porte sur les conduites et les productions des élèves, et relève d'un ou de plusieurs des procédés suivants :

– validations internes à la séquence

- description de l'élève «générique» de la classe ou des conduites et types de production majoritaires dans la classe, étude de leur évolution au cours de la séquence et vérification de l'adéquation à ce qui était attendu de la part des élèves,

- choix de situations particulières, jugées significatives de la séquence dans lesquelles les conduites et productions des élèves sont analysées (par exemple, dans Douady & Perrin-Glorian, 1989 ; Lemonidis, 1991 ; Parzys, 1991), parfois de façon fine (comme par exemple dans Robert et Tenaud, 1989, qui ont décrypté tous les échanges verbaux de groupes d'élèves travaillant ensemble à l'occasion d'un enseignement de géométrie en terminale C),

- suivi diachronique d'un ou de quelques élèves particuliers, parfois sur un temps long comme par Perrin-Glorian (1993) dans son travail sur les classes faibles ;

– validations externes à la séquence

- comparaison des productions d'élèves obtenues avant ou au début de la séquence et après la séquence par des entretiens et/ou questionnaires (Douady & Perrin-Glorian, 1989, ou dans la thèse récente de Moreira Baltar, 1996),

- comparaison des productions obtenues dans ou en dehors de la séquence avec des productions d'autres élèves : ainsi Douady et Perrin-Glorian (1989) comparent-ils les productions des élèves de leur séquence sur les aires avec les réponses au questionnaire proposé dans Rogalski (1983).

Ce qui nous paraît cependant différer de la période précédant l'officialisation de l'ingénierie est le souci d'analyser l'évolution des élèves par rapport à la globalité du processus, par rapport aux objectifs et choix explicites *a priori* et non plus seulement comme une micro-genèse.

Cela s'accompagne également d'une prise en compte plus grande du contrat didactique dans les analyses des interactions élève/situation. La situation est replacée dans son contexte institutionnel et social. Comme l'expriment clairement Tiberghien et Mégalakaki (1995) dans un autre domaine, à l'occasion d'une étude fine centrée sur les processus cognitifs des élèves lors de l'apprentissage du concept d'énergie en sciences physiques, la tâche ne prend sa signification que rapportée au processus didactique global.

5. QU'A APPORTÉ L'INGÉNIERIE DIDACTIQUE ?

Plus de dix ans après que l'appel à prendre à bras le corps l'objet complexe au cœur de la didactique qu'est la situation de classe, ait été suivi par certains, le point de vue que nous donnons serait par trop déformant si nous ne mentionnions pas les avancées théoriques que la méthode a permises. L'insuffisance de la théorisation du rôle de l'enseignant est apparue de façon criante, d'abord dans les phases d'institutionnalisation – où l'enseignant explicite les rapports que peuvent avoir les comportements ou productions libres de l'élève en situation adidactique avec le savoir culturel ou scientifique et avec le projet didactique (Brousseau, 1989, p. 88) –, puis dans celles de dévolution, où l'enseignant négocie l'entrée de l'élève dans le problème. Soulignons que l'analyse du rôle de l'enseignant ne concerne pas que l'enseignement mais bien aussi l'apprentissage, par les transformations de la signification des activités à réaliser par les élèves ou des actions effectuées qu'opèrent les interventions ou les explications de l'enseignant (voir plus bas la distinction entre savoir et connaissance).

L'application de la méthode d'ingénierie dans des conditions que nous pourrions qualifier d'extrêmes, s'est avérée aussi très fructueuse. De l'essai d'ingénieries dans des classes «faibles», Perrin-Glorian (1993) a ainsi mis en évidence la difficulté de la dévolution des situations adidactiques à ces élèves ainsi que la tension entre les parties adidactiques du processus et les phases d'institutionnalisation. Les élèves ne comprenaient pas le lien entre ce qu'ils avaient fait et ce qu'en disait l'enseignant. Si ces distorsions avec ce qui était attendu ont été perçues dans des cas extrêmes (ici les classes faibles), elles n'en sont pas moins intéressantes sur le plan général car elles projettent la lumière sur des aspects trop laissés dans l'obscurité. De la même façon, le déplacement des ingénieries vers des niveaux scolaires plus élevés (Dorier et al., 1994), en l'occurrence l'université, a permis de questionner l'émergence de connaissances en tant qu'outils de résolution de problèmes et de proposer une rationalisation d'un type différent pour l'émergence de concepts comme ceux de l'algèbre linéaire : plus qu'à leur efficacité dans la résolution d'une classe de problèmes, l'économie de ces

concepts tient à leur caractère généralisateur et unificateur d'un ensemble de classes de problèmes. Le changement radical de durée de l'ingénierie a été une autre variation qui a montré les difficultés de description et de validation. La conclusion de Robert (1992, p. 200) à la fin d'un article présentant un projet long d'enseignement (un an) en licence de mathématiques explicite, en les accusant, les points faibles des ingénieries : *«En ce qui concerne le projet particulier évoqué ici, les éléments de validation sont encore absents. Tout ce que nous pouvons rajouter a posteriori, c'est que l'expérience tient la route. Ceci dit, quelles que soient les réponses à nos évaluations, il nous sera difficile d'apprécier la part de nos choix vraiment «utiles» dans le dispositif et d'en dégager les conséquences, d'affirmer que ce sont des choix qui sont à l'œuvre de manière déterminante dans chaque ingénierie proposée, de vérifier que ce sont dans les réalisations correspondantes les mêmes choix ne sont pas dénaturés, de préciser ce qui est spécifique du public, ce qui est absolument incontournable et ce qu'on pourrait modifier encore.»*

Une autre mise à l'épreuve consiste à introduire l'ordinateur dans la classe. L'ordinateur s'est avéré révélateur de la nécessité d'institutionnaliser des connaissances à utiliser par les élèves qui ne sont pas enseignées car laissées à leur seule responsabilité. Ainsi, le déplacement d'un objet dans le logiciel Cabri-géomètre en tant qu'outil permettant d'invalider une construction géométrique, n'est-il pas reconnu par les élèves, dans la séquence de Bellemain & Capponi (1992), comme un moyen avouable (public) d'invalidation ; quelques années plus tard, il est manié avec précaution du bout des doigts par des futurs professeurs d'école (Rolet, 1996) dans une zone de taille réduite, ou par des élèves d'école primaire (CM2) dans l'ingénierie longue de H.C. Argaud (IUFM de Valence), répétée sur plusieurs années, ce qui a conduit l'enseignant à institutionnaliser ce déplacement. C'est en ré-analysant des ingénieries d'autres recherches, en particulier celle du triangle aplati (Arsac, 1989), que Berthelot et Salin (1992) ont mis en évidence la nécessité pour les élèves de savoir interpréter des relations spatiales comme des relations géométriques pour entrer dans l'apprentissage de la géométrie.

La relecture d'ingénieries existantes avec un œil théorique neuf est en effet particulièrement fructueuse, comme en témoigne la thèse de Margolinas (1989) à propos de l'analyse du milieu et des phases de validation. En cela, les descriptions, protocoles, vidéos et documentations diverses d'ingénieries, comme celles réalisées à Bordeaux autour de Brousseau, constituent certainement des sources très précieuses. Dans l'étude de la mémoire du système didactique, Brousseau et Centeno (1991) commencent par repérer les effets de présence ou d'absence de mémoire dans le processus didactique sur les décimaux.

6. SORTIR DE LA CLASSE POUR Y REVENIR

Conformément à ses affirmations de jeunesse sur le rôle central des savoirs et de la classe, rappelées au début de cet article, la recherche en didactique des mathématiques a construit des outils théoriques d'étude de l'apprentissage de savoirs mathématiques en classe. Les premières théorisations donnaient une place centrale aux interactions du sujet apprenant avec les mises en scène des savoirs (problèmes et milieu) en classe mais ni les savoirs, ni la classe n'étaient véritablement enjeux de la théorisation. La notion de transposition didactique suivie de la «*théorie anthropologique du didactique*» (Chevallard, 1992), explicitée publiquement pour la première fois par Chevallard en 1986 à l'occasion du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques, ont contribué à problématiser les savoirs. Les didacticiens ont été alors conduits à ré-interroger les ingénieries, en distinguant connaissances et savoirs, rapports personnels et institutionnels aux savoirs. La tension entre l'adidactique et le didactique, entre les connaissances contextualisées et les savoirs inscrits dans une institution, est ainsi relue par Rouchier (1996), Conne (1992), ou Brousseau et Centeno (1991) : «*Enseigner, c'est travailler le savoir pour induire dans un cadre institutionnel choisi un processus cognitif supportant l'apprentissage dont le produit sera en retour institué en savoir.*» (Conne, 1992) On est entré dans une phase de «*constructivisme didactique*» (Morf cité par Brun, 1995, p. 144) dans laquelle on cherche à ne pas «*confondre la genèse de l'activité rationnelle avec la genèse du sujet, à ne pas confondre les transformations de connaissances avec l'ontogenèse*». Le point de vue sur l'apprentissage s'est modifié.

La distinction introduite par Brousseau entre «*causes*» et «*raisons*» de l'apprentissage est un indice éloquent de cette évolution : l'élève qui a appris sous l'effet de «*causes*» dans l'action (en particulier dans les situations adidactiques) doit transformer cette connaissance en savoir, la placer par rapport à son propre système de savoirs et le système des savoirs institutionnalisés et culturels, se donnant ainsi des «*raisons*» de savoir. L'enseignant organise les causes, l'élève doit les interpréter en termes de raisons et transformer son histoire propre en genèse du savoir. «*En général il ne le peut pas. L'enseignant doit l'aider[...]*» (Brousseau & Centeno, 1991). Un pont est jeté dans la théorisation entre la dimension institutionnelle et la dimension cognitive de l'apprentissage.

Plus récemment, Chevallard (1994) au colloque des vingt ans de didactique des mathématiques en France, s'est attaqué au deuxième terme des affirmations de principe de la didactique des mathématiques. Rappelant l'importance de l'unité-classe dans les travaux des didacticiens, il a reproché aux didacticiens (p. 316) d'avoir pris la classe comme un donné, pour ainsi

dire de ne pas voir plus loin que le bout de la classe, et de ne pas avoir considéré la classe comme une institution possible parmi tant d'autres où apparaît une intention didactique.

Nous emparant des termes d'Hadrien dans une de ses lettres à Marc-Aurèle (Yourcenar, 1974), nous pourrions susurrer que la recherche en didactique «*n'est pas encore arrivée à l'âge où la vie est une défaite acceptée*». Mais l'existence de recherches en didactique comme celles sur les savoirs de techniciens en physique (Pateyron, 1995), sur les métiers du bâtiment (Bessot & Eberhard, 1995) ou sur la formation professionnelle des enseignants (Portugais, 1994 ; Robert, 1996...) nous en dispense.

BIBLIOGRAPHIE

- ARSAC G. (1989). La construction du concept de figure chez des élèves de 12 ans. In *Proceedings of the thirteenth conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Paris, GR Didactique et acquisition des connaissances scientifiques, pp. 85-92.
- ARTIGUE M. & ROBINET J. (1982). Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 3, n° 1, pp. 5-64.
- ARTIGUE M. (1984). *Contribution à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques*. Thèse d'état, Université Paris 7.
- ARTIGUE M. (1989). Une recherche d'ingénierie didactique sur l'enseignement des équations différentielles en premier cycle universitaire. In *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique IMAG-LSD* (année 1988-89). Grenoble, Université Joseph Fourier, pp. 183-209.
- ARTIGUE M. (1990). Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 9, n° 3, pp. 281-307.
- BALACHEFF N. (1996). Conception, propriété du système sujet/milieu. In M.-J. Perrin-Glorian et R. Noirfalise (Éds), *Actes de la VIII^e École d'été de didactique des mathématiques*. Clermont-Ferrand, IREM de Clermont-Ferrand, pp. 215-229.
- BAUTIER T. (1988). Une modélisation didactique des activités d'enseignement des premières propriétés de la symétrie orthogonales. In *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique IMAG LSD*, n° 45. Grenoble, Université Joseph Fourier, pp. 183-227.
- BELLEMAIN F. & CAPPONI B. (1992). Spécificité de l'organisation d'une séquence d'enseignement lors de l'utilisation de l'ordinateur. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 23, n° 1, pp. 59-97.
- BERTHELOT R. & SALIN M.-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse, Université de Bordeaux 1.
- BESSOT A. & EBERHARD M. (1995). *Différents types de savoirs et leur articulation*. Grenoble, La Pensée Sauvage, pp. 13-32.
- BROUSSEAU G. (1980). Problèmes de l'enseignement des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 1, n° 1, pp. 11-59.
- BROUSSEAU G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 2, n° 1, pp. 37-127.

- BROUSSEAU G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 7, n° 2, pp. 33-115.
- BROUSSEAU G. & CENTENO J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 11, n° 2-3, pp. 167-210.
- BRUN J. (1994). Évolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et de la didactique des mathématiques. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde & P. Tavignot (Éds), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*. Grenoble, La Pensée Sauvage, pp. 67-83.
- BRUN J. (1995). Informations : Numéro thématique sur «constructivisme et éducation» de la Revue des Sciences de l'Éducation. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 15, n° 1, pp. 143-144.
- CHEVALLARD Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 12, n° 1, pp. 73-112.
- CHEVALLARD Y. (1994). Nouveaux objets, nouveaux problèmes en didactique des mathématiques. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde & P. Tavignot (Éds), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*. Grenoble, La Pensée Sauvage, pp. 313-320.
- CONNE F. (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 12, n° 2-3, pp. 221-270.
- DORIER J.-L., ROBERT A., ROBINET J. & ROGALSKI M. (1994). L'enseignement de l'algèbre linéaire en Deug première année. Essai d'évaluation d'une ingénierie longue et questions. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde & P. Tavignot (Éds), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*. Grenoble, La Pensée Sauvage, pp. 328-342.
- DOUADY R. (1984). *Jeux de cadre et dialectique outil objet*. Thèse d'état, Université Paris 7.
- DOUADY R. & PERRIN GLORIAN M.-J. (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 20, n° 4, pp. 387-424.
- GRENIER D. (1988). *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième*. Thèse d'université, Grenoble, Université Joseph Fourier.
- LABORDE C. & VERGNAUD G. (1994). L'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. In G. Vergnaud (Éd.), *Apprentissages et didactiques, où en est-on ?* Paris, Hachette Éducation, pp. 56-93.
- LEMONIDIS C. (1991). Analyse et réalisation d'une expérience d'enseignement de l'homothétie. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 11, n° 2-3, pp. 295-324.
- LESH R. (1985). Conceptual analyses of mathematical ideas and problem solving processes. In L. Streefland (Éd.), *Proceedings of the ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Utrecht, Pays Bas, University of Utrecht, pp. 73-96.
- MARGOLINAS C. (1989). *Le point de vue de la validation : essai d'analyse et de synthèse en didactique des mathématiques*. Thèse d'université, Grenoble, Université Joseph Fourier.
- MARGOLINAS C. (1992). Éléments pour l'analyse du rôle du maître : les phases de conclusion. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 12, n° 1, pp. 113-158.
- MOREIRA-BALTAR P. (1996). *Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surfaces planes : une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège*. Thèse d'université, Grenoble, Université Joseph Fourier.
- NESHER P. & KILPATRICK J. (1990). *Mathematics and Cognition*. Cambridge University Press.
- PARZYSZ B. (1991). Espace, géométrie et dessin. Une ingénierie didactique pour l'apprentissage, l'enseignement et l'utilisation de la perspective parallèle au lycée. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 11, n° 2-3, pp. 211-239.

- PATEYRON B. (1995). *La notion de territoire. Analyse des savoirs mis en jeu au sein d'une activité de TP à caractère industriel. Différents types de savoirs et leur articulation.* Grenoble, La Pensée Sauvage, pp. 33-58.
- PERRIN-GLORIAN M.-J. (1993). Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans les classes faibles. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 13, n° 1-2, pp. 5-118.
- PERRIN-GLORIAN M.-J. (1994). Théorie des situations didactiques : naissance, développement, perspectives. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde & P. Tavnogot (Éds), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France.* Grenoble, La Pensée Sauvage, pp. 97-147.
- PORTUGAIS J. (1994). De futurs instituteurs formés à la didactique des mathématiques ? Une étude de cas. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde & P. Tavnogot (Éds), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France.* Grenoble, La Pensée Sauvage, pp. 283-290.
- RICCO G., VERGNAUD G & ROUCHIER A. (1983). Représentation du volume et arithmétisation-entretiens individuels avec des élèves de 11 à 15 ans. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 4, n° 1, pp. 27-69.
- ROBERT A. (1983) Convergence des suites numériques en DEUG. *Bulletin de l'APMEP*, n° 340, pp. 431-449.
- ROBERT A. & TENAUD I. (1989). Une expérience d'enseignement de la géométrie en Terminale C. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 9, n° 1, pp. 31-70.
- ROBERT A. (1992). Projets longs et ingénieries pour l'enseignement universitaire : questions de problématique et de méthodologie. Un exemple : un enseignement annuel de licence en formation continue. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 12, n° 2-3, pp. 181-220.
- ROBERT A. (1996). IUFM : réflexion sur la formation professionnelle initiale des professeurs de mathématiques des lycées et collèges. *Repères-IREM*, n° 23, pp. 83-108.
- ROBINET J. (1983). Une expérience d'ingénierie didactique sur la notion de limite de fonction. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 4, n° 3, pp. 223-292.
- ROGALSKI J. (1983). L'acquisition des notions relatives à la dimensionnalité des mesures spatiales (longueur surface). *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 3, n° 3, pp. 343-396.
- ROGALSKI J., SAMURÇAY R. & RICCO G. (1983). Analyse du prétest/post-test sur le volume. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 4, n° 1, pp. 121-132.
- ROLET C. (1996). *Dessin et figure en géométrie : analyse des conceptions de futurs enseignants dans le contexte Cabri-géomètre.* Thèse d'université, Université Lyon 1.
- ROUCHIER A. & al. (1980). Situations et processus didactiques dans l'étude des nombres rationnels positifs. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 1, n° 2, pp. 225-276.
- ROUCHIER A. (1996). Connaissances et savoirs dans le système didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 16, n° 2, pp. 177-196.
- TIBERGHIEAN A. & MEGALAKAKI O. (1995). Contribution to a characterization of a modelling activity case of a first qualitative approach of energy concept. *European Journal of Psychology of Education*, vol. X, n° 4, pp. 369-383.
- VERGNAUD G. (1981). Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 2, n° 2, pp. 215-231.
- VERGNAUD G., ROUCHIER A., DESMOULIERES S., LANDRÉ C., MARTHE P., RICCO G., SAMURÇAY R., ROGALSKI J. & VIALA A. (1983). Une expérience didactique sur le concept de volume en classe de cinquième (12 à 13 ans). *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 4, n° 1, pp. 121-132.

- VERGNAUD G., CORTES H. & FAVRE ARTIGUE P. (1988). Introduction de l'algèbre auprès des débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques. In G. Vergnaud, G. Brousseau et M. Hulin (Éds), *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*. Grenoble, La Pensée Sauvage.
- VERGNAUD G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 10, n° 2-3, pp. 133-169.
- YOURCENAR M. (1974). *Mémoires d'Hadrien*. Paris, Gallimard. Première édition en 1958, Plon.