IMAGICIELS,
APPROCHE EXPÉRIMENTALE EN MATHÉMATIQUES

Françoise Monnet
Yves Paquelier

Elaborant et utilisant des logiciels producteurs d'images ("imagiciels") pour l'enseignement des mathématiques, nous proposons ici une analyse des représentations produites et une explicitation des différentes utilisations que l'on peut en faire. Nous expliquerons dans quelle mesure les activités mathématiques conduites en classe avec ces logiciels peuvent faire appel à une démarche expérimentale. De nombreux exemples seront donnés pour illustrer notre propos.

Depuis quelques années, la littérature pédagogique (de l'article de recherche jusqu'aux commentaires de manuels en passant par les propos de salle des professeurs) se risque à réclamer une place (plus ou moins grande) pour une **démarche expérimentale** dans l'acquisition des connaissances mathématiques. On parle alors "d'essais-erreurs", "de problèmes concrets", "de manipulations", "d'observations", "d'activités", préférant, le plus souvent, décrire le moyen envisagé plutôt que de s'interroger sur sa nature et son fonctionnement. Ainsi, les questions essentielles demeurent : **quelle expérience fait-on, qui la fait et de quoi fait-on l'expérience** à travers telle ou telle pratique d'enseignement qui reconnaît, peu ou prou, le rapprochement des termes "expérimentations" et "mathématiques" ?

Une équipe du CREEM (Centre de Recherche et d'Expérimentation pour l'Enseignement des Mathématiques dépendant du CNAM) travaille depuis longtemps à l'élaboration et l'expérimentation d'imagiciels (voir définition infra) pour l'enseignement des mathématiques(1). Dans ce cadre nous avons été amenés à prendre en compte l'interrogation ci-dessus, tant il est vrai que l'image mathématique (figure, schéma, représentation graphique ... tout ceci reste à préciser) est un des lieux où la question du rapport entre expérience et mathématique se cristallise.

Nous nous proposons donc, après avoir défini précisément ce que nous entendons par imagiciel, d'analyser les caractéristiques des images intervenant dans un imagiciel. Puis en décrivant les différents rôles que l'on peut assigner à un imagiciel, nous tenterons d'expliciter dans quelle mesure son utilisation relève d'une démarche expérimentale.

(1) Depuis plusieurs années ce travail s'accomplit en collaboration avec la Direction des Lycées et Collèges (programme national d'innovation pédagogique).

Pour illustrer notre propos, nous donnerons un grand nombre d'exemples d'imagiciels en essayant, à l'aide de figures, de rendre l'aspect dynamique et interactif de ceux-ci. Ces exemples seront encadrés dans le texte afin qu'il soit facile de s'y reporter.

1. QU'EST-CE QU'UN IMAGICIEL ?

donner une définition préalable est risqué

Définir, dès les premières lignes de cet article, ce que nous appelons un **imagiciel** (parfois une "image logicielle") est à la fois une nécessité et un risque.

La nécessité est celle de permettre au lecteur n'ayant pas eu connaissance de nos recherches ou des publications précédentes sur le sujet (cf quelques titres en bibliographie) de "se faire une idée" de l'objet autour duquel vont s'organiser les réflexions qui vont suivre.

Le risque est double :
- d'abord celui de figer la notion d'imagiciel dans une définition préalable et réductrice alors que l'un des objectifs de ces quelques pages est précisément d'en montrer la complexité,
- mais aussi celui de laisser penser que, dans notre travail, nous avons défini a priori ce qu'était un imagiciel pour s'attacher, par la suite, exclusivement à en produire. Or l'un des points essentiels sur lequel nous voudrions insister est, au contraire, l'ajustement incessant entre d'une part un travail de production et d'expérimentation, d'autre part une réflexion plus théorique visant à définir un outil pédagogique à travers ses multiples réalisations. Enseigner des mathématiques à l'aide d'imagiciels n'est pas une méthode que nous avons mise en oeuvre mais une démarche que nous explorons et qui ne cesse de se modifier, de se préciser, au cours de cette exploration même.

Pour répondre à cette nécessité et éviter ce double risque, nous commencerons par donner une idée générale et un exemple de ce qu'est un imagiciel, puis nous prendrons le temps de préciser notre manière d'envisager l'**objet imagiciel** dans l'état actuel de nos réflexions.

1.1. Idée générale et premier exemple

un exemple d'image dynamique et interactive

En première approximation nous dirons :
un imagiciel est un logiciel permettant de produire à l'écran des images animées et interactives, généralement à base de dessin, dans un but d'enseignement, et ceci, le plus souvent dans le cadre d'une utilisation collective.

Donnons un premier exemple

FONCOL est un imagiciel proposant une famille de fonctions numériques périodiques.

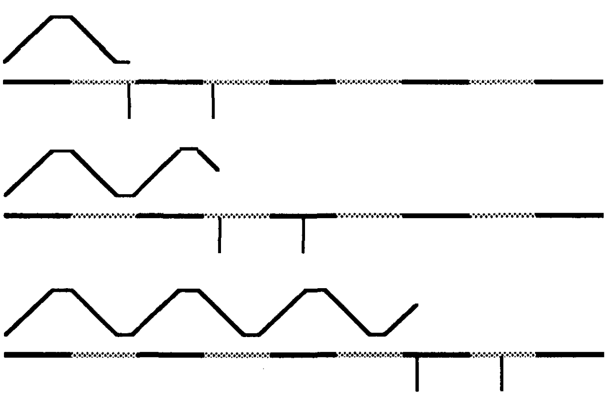
La situation mathématique : on colorie régulièrement une droite graduée avec deux couleurs (noir et gris sur la figure ci-dessous). On choisit un réel strictement positif a, à tout réel x, on associe la longueur de la deuxième couleur (gris sur la figure) contenue dans le segment $[x, x+a]$. Que peut-on dire de la fonction f ainsi construite ?

L'image écran

• L'image est interactive : l'utilisateur choisit le réel a, ce qui permettra d'étudier une famille de fonctions.

• L'image est dynamique : après le choix de a, on lance le tracé en appuyant sur une touche du clavier, la courbe de la fonction f se construit au fur et à mesure que se déplace le segment comme l'indique la figure ci-dessous.

Pendant le tracé, l'appui d'une touche provoque l'arrêt momentané, et on peut agir sur la vitesse de déplacement.



1.2. Les trois niveaux de relation avec l'imagiciel

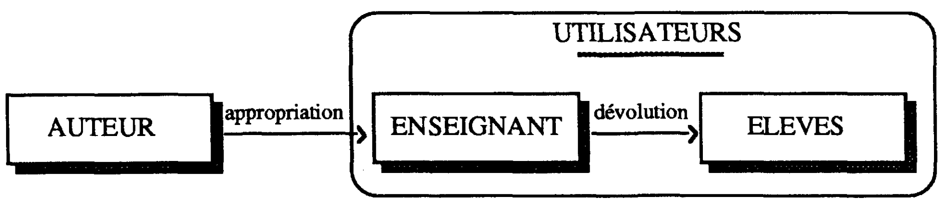
Comme tout logiciel, un imagiciel comporte un **auteur** (en l'occurrence l'équipe du CREEM) et des **utilisateurs**. Mais par sa finalité d'outil pédagogique, le pôle utilisateur se subdivise lui-même en deux catégories : les **enseignants** (nous-mêmes ou d'autres enseignants ne faisant pas partie de l'équipe), leurs **élèves** (essentiellement de second cycle).

Chacun de ces trois pôles, du fait de son rôle et de ses objectifs, pose un regard différent sur l'objet imagiciel (cf infra, 1.3.). Mais ces trois "acteurs" de l'élaboration et l'utilisation d'un imagiciel entretiennent également entre eux des relations complexes et fondamentales pour notre travail :

l'auteur, l'enseignant, l'élève en relation avec l'imagiciel

- ainsi il convient que l'enseignant s'**approprie** l'imagiciel afin de l'intégrer dans sa pratique quotidienne, il attend donc de l'auteur que celui-ci lui fournisse les moyens de cette appropriation (ou au moins la favorise) notamment à travers les documents accompagnant le logiciel ;
- de plus, cet enseignant doit être en mesure de transmettre, de **dévoluer** selon l'expression de G.Brousseau (1986), aux élèves l'imagiciel et la situation qu'il porte ; à travers l'imagiciel et à propos de lui se noue alors un échange complexe entre la classe et l'enseignant.

Nous résumons cela dans le schéma suivant :



Ce schéma illustre les relations concernant un imagiciel dont l'écriture est achevée. Mais si l'on considère la phase d'élaboration de l'imagiciel il faudrait, pour rendre la dynamique des relations, tracer des "flèches en retour" dont la dénomination serait plus délicate, afin d'illustrer les "échos" (le "feed-back") que les utilisateurs renvoient aux auteurs pendant le travail d'écriture d'un imagiciel. De la version première (le prototype) à la version jugée définitive, tout un ensemble de modifications est discuté et parfois effectué.

Par exemple, dans la première version de l'imagiciel **FONCOL** décrit plus haut, il était impossible de faire fonctionner l'imagiciel sans tracer à l'écran la courbe de la fonction (ce qui donne la solution du problème). On ne pouvait donc pas utiliser l'image pour seulement faire comprendre aux élèves la nature de la situation. Le professeur était alors souvent obligé de faire au tableau une figure qu'il accompagnait parfois de gestes, simulant ainsi le fonctionnement de l'imagiciel !

Certes toutes les demandes du "terrain" ne sont pas compatibles et il revient à l'auteur de faire les choix nécessaires. De même, c'est lui qui prend la responsabilité de clore la phase d'élaboration en décidant de la version définitive de l'imagiciel.
Il n'empêche que ce serait réduire le travail de conception d'un imagiciel que de n'indiquer, au cours du travail d'élaboration, que des relations en sens unique.

1.3. Les trois composantes d'un imagiciel

• La notion de conception d'un objet informatique

Du fait des relations entre les différents acteurs ayant affaire à un imagiciel, le regard que chacun d'entre eux porte sur cet imagiciel doit être pris en compte par les deux autres intervenants. Ainsi, par exemple, l'auteur ne peut ignorer l'utilisation pédagogique que sera amené à élaborer l'enseignant ainsi que le rôle que jouera alors l'imagiciel auprès des élèves ; l'enseignant ne peut s'approprier le produit informatique sans chercher à expliciter et prendre plus ou moins à son compte les idées que l'auteur a voulu illustrer à travers le logiciel proposé. Mais il ne peut faire ce travail d'assimilation sans tenir compte de l'usage qu'il lui semble possible d'en faire dans sa classe.

un imagiciel est la conjonction d'une idée, d'un produit et d'un usage

Pour envisager ces aspects multiples d'un imagiciel nous utiliserons la notion de **conception**(2) d'un objet informatique qui peut se définir ici comme la rencontre de trois composantes : **une idée, un produit** (le logiciel d'images) et **un usage**. Détacher un de ces aspects des deux autres (en particulier concevoir l'imagiciel comme un simple produit) c'est refuser de reconnaître qu'un logiciel est toujours au service de "quelque chose" qui ne peut être réalisé ou manqué qu'à travers les utilisations que l'on en fera.

Nous allons reprendre ces trois composantes (l'idée-l'image(3)-l'usage) du point de vue de l'auteur qui est celui que nous adopterons, plus particulièrement, dans cet article puis, plus rapidement, du point de vue de l'enseignant et de l'élève.

• Du point de vue de l'auteur

L'imagiciel est **outil de représentation et outil pédagogique**. L'auteur devra donc faire des choix dans deux directions :

. adéquation de l'image avec le concept mathématique visé,

. adaptation de l'image avec les activités envisagées.

prise en considération de l'usage par l'auteur

Cela l'oblige donc à entreprendre une double réflexion épistémologique et didactique, lui fournissant des pistes pour la constitution de l'image mais aussi des critères pour choisir entre plusieurs d'entre elles qui peuvent parfois s'être imposées à lui a priori. Car le chemin n'est pas, là non plus, en sens unique de l'idée à l'image vers l'usage. Il s'agit plutôt de

(2) Nous employons le mot *conception* dans le sens, plus riche, où certains auteurs anglo-saxons parlent de *design* d'un système informatique désignant par là l'invention, l'idée générale, la conception, le projet, la construction, l'adaptation aux besoins des utilisateurs, etc... (Winograd, Flores 1989).

(3) Nous utiliserons le singulier générique *l'image* pour désigner l'ensemble des images potentielles que le logiciel permet de produire. Le choix entre ces différentes possibilités relève déjà de l'usage. Pour plus de précisions sur ce mot image voir la partie 2.1.

saisir ensemble les trois aspects avec leurs exigences propres et leurs rapports complexes. L'usage, par exemple, est pris en considération à travers la constitution de documents techniques et pédagogiques d'accompagnement, de scénario d'utilisation, la prise en compte de problèmes d'ergonomie (Hocquenghem 1987). Mais, là aussi, l'activité peut être première et imposer la recherche d'images la favorisant, celles-ci entraînant une réflexion sur les notions mathématiques mises en jeu. Chacune des trois composantes d'un imagiciel est dépendante des choix qui seront opérés sur les deux autres. Cela exige, de la part de l'auteur, des "aller et retours" permanents entre ces trois aspects, au cours du travail d'élaboration.

- Du point de vue des utilisateurs

Du point de vue de l'enseignant, après s'être approprié le travail de l'auteur sous ces trois aspects, celui-ci devra à son tour faire acte de conception à travers les objectifs pédagogiques qu'il retiendra et les pratiques qu'il mettra en place.

Du point de vue de l'élève, celui-ci aura à interpréter une image et à utiliser un outil de représentation. Il lui faudra donc retrouver ou manquer la conception de l'auteur dans ce jeu de l'utilisation et de l'interprétation. Il lui faudra, à son tour, se faire une idée et vivre une pratique(4).

1.4. Définition de synthèse

l'imagiciel est représentation en trois sens différents

Tout ce préambule a pu sembler un peu long au lecteur soucieux de "voir concrètement ce que ça donne". Mais il serait illusoire de prétendre comprendre ce qui peut se jouer à travers l'emploi d'un imagiciel dans une classe sans avoir pris le temps de cerner le réseau de préoccupations auquel il renvoie et qui conditionne son écriture.
Usant de la polysémie du mot représentation, nous pourrions résumer tout ceci de la manière suivante :

un imagiciel est la rencontre de trois représentations :
- **celle qu'on se fait (l'idée) d'une notion mathématique à enseigner, des manières de l'enseigner,**
- **celle qu'on se donne (l'image) dans sa capacité de visualisation,**
- **celle qu'on se joue (l'usage) à travers les échanges collectifs autour de l'imagiciel.**

(4) Il y a là une différence essentielle entre les imagiciels et les logiciels d'EAD de type plus ou moins tutoriel. Un imagiciel n'impose pas de scénario préétabli. Par les choix qu'il fera entre les différentes possibilités qui lui sont offertes, l'enseignant (et dans une certaine mesure l'élève) réalisera à chaque fois un "nouvel" imagiciel. Le logiciel d'EAD est un labyrinthe, l'imagiciel est un moyen de locomotion.

Ainsi reprenons le logiciel **FONCOL** déjà évoqué : il répond à la recherche

- d'une situation simple de fonction périodique (l'idée),
- dont l'illustration mettrait clairement en évidence un phénomène répétitif (l'image) sans que pour autant ce soit trop évident,
- et telle que les élèves pourraient facilement faire des prévisions indépendamment du logiciel (l'usage) permettant ainsi une séquence où les élèves seraient les acteurs essentiels.

L'imagiciel est destiné à des élèves de seconde qui ont tous les outils nécessaires pour faire de bonnes prévisions et pour justifier les résultats. Un document d'accompagnement (voir ci-dessous) précise ce que l'auteur a prévu comme déroulement dans la classe, mais chaque professeur peut à travers les possibilités du logiciel (re)trouver un scénario : comme l'utilisateur doit proposer une valeur de la longueur de l'intervalle, il est naturel de regarder comment agit ce paramètre sur la situation. L'ergonomie du logiciel facilite son utilisation pour vérifier de nombreuses propositions d'élèves lorsqu'ils cherchent des valeurs de a qui donnent des fonctions particulières.
Ce document est un raccourci, il offre à l'utilisateur un accès **plus rapide à "l'usage"**.

Activité utilisant le logiciel **FONCOL** (prévue pour des élèves de seconde)
Chaque segment colorié a pour longueur 32.
Faire fonctionner le logiciel avec $a = 20$ sans faire tracer la fonction. Essayer de prévoir le tracé ; vérifier avec le logiciel. Comprendre dans ce cas la périodicité et trouver la période.
Essayer de prédire ce qui se passe pour une autre valeur de a (par exemple 40). Utiliser le logiciel pour vérification. Recommencer avec différentes valeurs de a..
Pour quelles valeurs de a la fonction est-elle une fonction qui s'annule ?
Etudier les extremums.
Pour quelle(s) valeur(s) de a la fonction est-elle constante ?

2. L'IMAGE DANS UN IMAGICIEL

Rappelons que nous désignons par «l'image», l'ensemble des images que peut produire le logiciel constituant la partie informatique de l'imagiciel. Nous avons vu, dans la partie précédente, qu'ainsi définie l'image, loin d'être un tout autonome construite pour elle-même, est, à la fois, au service d'une idée et au centre d'une activité.

Quels sont donc les aspects spécifiques de cette image, notamment par rapport aux images habituellement utilisées dans l'enseignement des mathématiques ? Telle est la question à laquelle il nous faut répondre avant que de chercher à caractériser ce qui se joue à travers l'utilisation d'un imagiciel.

Pour cela nous commencerons par nous interroger sur la nature des images en mathématiques dans leur ensemble au regard des images utilisées en sciences expérimentales.

2.1. Images mathématiques et imageries scientifiques

Quelques précisions tout d'abord.

- En ce qui concerne le rôle de l'image en sciences expérimentales, nous ne prétendons pas posséder d'autres compétences que celles que certaines lectures ou conversations nous ont apportées. Notre travail de recherche se limite, en effet, aux mathématiques. Néanmoins, puisque nous nous demanderons, dans la troisième partie de cet article, en quoi l'activité mathématique autour d'un imagiciel peut être qualifiée d'expérimentale, il nous paraît difficile d'ignorer tout à fait cette question.

la situation que nous étudions

- Le contexte de production et d'utilisation d'une image est, à coup sûr, un aspect essentiel de son analyse. Nous nous limitons ici aux images utilisées dans un but de transmission d'un savoir déjà constitué ; c'est-à-dire que nous ne considérerons pas les images intervenant dans le travail de recherche, ce que l'on a coutume d'appeler, en sciences, les "inscriptions scientifiques" (Jacobi 1987). De même, nous ne prendrons pas en compte les images mathématiques intervenant comme outils de représentation de phénomènes extra-mathématiques, dans des contextes professionnels par exemple, (graphiques divers d'un rapport économique, courbes obtenues par mesure ou simulation d'un phénomènes physique..).
- Nous avons jusqu'à présent usé (et abusé) du terme "image" dans des sens très différents. Mais, outre que le vocabulaire est fort fluctuant en la matière (Drouin 1987), nous préférons employer ce terme vague qui a l'avantage d'insister sur l'essentiel - il s'agit de quelque chose qui s'oppose au texte - sans préjuger de sa fonction (5).

Ceci étant posé, comment caractériser images dans l'enseignement des sciences et images dans l'enseignement des mathématiques ?

Toute image se veut représentation de quelque chose, c'est-à-dire **traduction** dans un certain registre sémiotique d'un "objet" donné autrement (dans tel ou tel langage, dans une autre image, dans la réalité). A l'origine de la production d'une image il y a donc un **travail d'interprétation qui conjugue deux mouvements** (Drouin 1987).

l'image est une traduction résultant d'abstraction et de concrétisation

- **Un mouvement d'abstraction** élimine, simplifie, réduit selon certains critères, adapte aux contraintes du type d'image visé. C'est ainsi que l'on peut être amené à distin-

(5) On pourra objecter que le mot *"image"* sous-entend *"la reproduction exacte ou analogique d'un être ou d'une chose"* (Petit Robert). Telle est d'ailleurs la raison pour laquelle Michèle Artigue (1987) préfère le terme de *"visualisation"*. Il nous semble cependant possible de parler d'images mathématiques sans que le lecteur y voit obligatoirement la reproduction de quelque chose (on se demande d'ailleurs bien de quoi !).

guer différents niveaux d'abstraction de la photo au tableau en passant par le schéma, le graphique, etc...

- **Un mouvement de concrétisation** *donne à voir* ce qui ne se voyait pas dans ce qui était donné précédemment. Cet effet de *mise en évidence* peut être une conséquence du type d'image produit. Ainsi la représentation graphique d'une fonction "fait voir" le nombre de solutions de l'équation f(x) = 0. On parle alors des caractères producteurs de l'image par opposition aux caractères réducteurs dus aux contraintes de la représentation (Rogalski 1982). Mais cet effet peut également être l'expression d'une connaissance préalable que l'on a de l'objet représenté. C'est ainsi que l'on peut dire, par exemple, que *le schéma fait voir le réel non pas tel qu'on le voit mais tel qu'on le sait être* (Drouin 1987). L'image n'est plus seulement représentation d'un objet mais expression d'un savoir. Ainsi le signifiant qu'est l'image est signifiant d'un double signifié, celui du référent mais aussi celui du sujet qui l'a produite (Rogalski 1984).

l'image mathématique et l'image scientifique ne s'opposent pas comme concrétisation et abstraction...

A considérer les choses ainsi, on pourrait être tenté d'opposer images mathématiques et images scientifiques en privilégiant la fonction de concrétisation des premières et celle d'abstraction des secondes. Mais, outre le fait que l'on pourrait trouver dans chacun des domaines des exemples contredisant ce point de vue, ce serait ignorer que les deux aspects (abstraction/concrétisation) sont inséparables et que c'est la volonté de "faire voir" qui conduit à réduire, à abstraire comme c'est l'exigence de simplifier qui produit la mise en évidence de certains caractères de l'objet.

la différence est dans la nature de l'objet représenté

Plus fondamentalement, cette première impression qui voudrait attacher l'abstraction aux images scientifiques et la concrétisation aux images mathématiques, si elle ne se justifie pas par la considération des images elles-mêmes, nous paraît révéler une différence qui concerne davantage ce "quelque chose" qui est représenté. En effet, l'image scientifique se présente toujours comme représentation d'une certaine réalité, même si cette réalité est parfois difficilement appréhendable directement (considérons, par exemple, le système nerveux ou une molécule de méthane). A l'opposé, l'image mathématique est représentation d'un objet mathématique qui, même si on lui confère un certain type de "réalité", est avant tout donné à celui qui veut le représenter, à travers une expression linguistique (formule mathématique, texte d'un problème de géométrie ...) (6).

Cette différence entraîne plusieurs conséquences en ce qui concerne les images.

(6) Là aussi, il existe probablement des "cas limite" et la géométrie dans l'espace possède sans doute un rapport plus complexe à la réalité ordinaire que les fonctions polynomiales du second degré. Signalons à ce propos que nous n'aborderons pas dans cet article le domaine de la géométrie dans l'espace. Travaillant actuellement à l'élaboration d'imagiciels sur ce sujet, cela fera l'objet de publications ultérieures.

l'image mathématique tend à être autonome dans une transparence illusoire à la réalité

- La première est que l'image mathématique rencontre, plus que toute autre image scientifique, le problème de **l'hétérogénéité du langage et de l'image**. Le dessin d'un triangle ne pourra jamais exprimer complètement le concept de triangle. Des expressions comme "pour tout", "quel que soit", fréquentes dans les textes mathématiques, ne sont pas traduisibles directement, lorsqu'elles portent sur un ensemble infini d'objets, dans le registre de l'image (7).
- La deuxième est ce que Janine Rogalski (1984) appelle **l'illusion de la transparence**, à propos des représentations graphiques de fonctions. Il s'agit de l'identification entre l'objet mathématique (par exemple le graphe d'une fonction) et sa représentation (la courbe, tracé matériel). Cette identification du signifiant et du signifié, parfois encouragée par la situation d'enseignement elle-même, a souvent été analysée en didactique des mathématiques (cf, par exemple, Adda 1976). Elle nous semble être un aspect spécifique de la représentation mathématique.
- La troisième conséquence découle immédiatement de la précédente et consiste en ce que l'on pourrait appeler **l'autonomie de l'image** par rapport à l'objet qu'elle représente. Puisque le triangle ABC "est" le triangle dessiné, puisque le graphe de f "est" la courbe tracée, alors, travailler sur la courbe ou sur la figure, c'est travailler sur la fonction ou sur le triangle. L'image est alors étudiée pour elle-même et passe du statut d'outil de recherche à celui d'objet d'expérimentation (8). N'étant rattachée à aucune réalité matérielle dont elle serait la représentation, l'image mathématique devient **la** réalité.

Rencontre constante de son rapport hétérogène au langage, risque permanent de l'illusion de la transparence, tentation fréquente de devenir autonome, telles sont les différences essentielles de l'image mathématique par rapport à l'image scientifique et ceci moins en raison du travail de représentation qu'à cause de la nature des objets représentés.

2.2. L'image dans un imagiciel

Dans de nombreux articles ou exposés sur le sujet, l'utilisation de l'imagiciel a souvent été décrite comme celle d'un **super tableau noir** (cf colloque CNAM 1986). Même si nous verrons, par la suite, que l'imagiciel ne se limite pas à une modification du support graphique utilisé en classe, il importe cependant de préciser, dans un premier temps, quels sont les aspects spécifiques de cette image, de dire en quoi ce tableau mérite le qualificatif de "super".

(7) Même si, la paramétrisation de l'image dans un imagiciel permet d'aborder cette question de la quantification universelle (cf infra).

(8) Ceci d'autant plus facilement que, dans certain contexte, la représentation peut être elle-même objet d'enseignement, en mathématiques comme en sciences expérimentales.

• Une image calculée

- **Image fidèle et image qualitative**

Lorsque l'enseignant (ou l'élève) dessine un triangle rectangle, dans la cadre d'une figure de géométrie, il ne prend que rarement une équerre et se contente de la réalisation d'un triangle rectangle "en gros". Il lui suffit de savoir que le triangle est rectangle ; ce savoir, il le fera figurer en plaçant le signe iconique de l'angle droit. Il n'est pas nécessaire qu'il le voie. La rapidité du croquis est préférée à l'exactitude de l'image(9).

habituellement l'image mathématique, en classe, exprime plus qu'elle ne représente

De même, lorsqu'il s'agit de tracer la courbe représentative d'une fonction, l'enseignant (ou l'élève) calcule certes les coordonnées de quelques points, mais se limite finalement à l'allure de la courbe, mettant en lumière, quitte à "tricher" avec les valeurs exactes, tel ou tel aspect sur lequel il veut insister (existence d'un extremum, tangente ou asymptote particulière ..). C'est ici l'intention d'éclairer qui est privilégiée aux dépens de la précision des calculs.

Dans les deux cas, et dans tous les autres du même type que l'on peut imaginer, nous parlerons d'**images qualitatives** pour indiquer que l'image est au moins autant expression d'un savoir sur l'objet mathématique que représentation "mécanique" de cet objet. De plus, et c'est là le point fondamental, l'interlocuteur (maître ou élève), celui qui devra interpréter l'image, est conscient de cet aspect qualitatif de l'image faite à la main (ne serait-ce qu'en raison du temps mis pour la produire par rapport aux capacités de calcul de l'être humain). Ce caractère approximatif et expressif de l'image fait partie de la coutume scolaire et, sauf contexte particulier où l'objectif serait la précision du tracé, l'enseignant ne reprochera pas à l'élève et l'élève ne considérera pas comme significatif le fait que l'angle ne soit pas tout à fait droit ou que tel point de la courbe soit situé à 0,5mm de l'asymptote alors qu'en fonction de l'échelle il devrait se situer à 0,1mm de celle-ci.

l'imagiciel, en revanche, propose une image que l'utilisateur suppose fidèle

Or, lorsque l'image est produite par l'imagiciel, la situation nous semble singulièrement différente. Il est certes possible de simuler avec l'ordinateur ce comportement du "traceur humain" qui conjugue un **principe de précision suffisante** avec d'autres exigences (commodité de production, expression de ce que l'on sait, par ailleurs, de l'objet ...). Nous en donnons quelques exemples plus loin. Mais il y a alors comme une transgression, comme une "tricherie" par rapport à ce que l'interlocuteur imagine de l'image produite par ordinateur. L'image dans un imagiciel est le résultat d'un calcul dont l'algorithme est programmé dans l'imagiciel. Elle est donc, avant tout, **fidèle** à un procédé de calcul, procédé

(9) On connaît l'adage qui veut que la géométrie soit "l'art de raisonner juste sur des figures fausses". Déclaration excessive, comme toutes celles de ce type, mais qui exprime cependant une certaine réalité de la pratique.

que l'utilisateur de l'imagiciel imagine comme le plus exact possible et donc le plus fidèle possible à l'objet représenté (Delcourt 1987).

Pour reprendre les exemples précédents, si le triangle n'apparaît pas comme triangle rectangle à l'écran c'est qu'il ne l'est pas (sinon il n'était pas plus difficile pour l'ordinateur de faire un "vrai" triangle rectangle) ; si ce point de la courbe est de coordonnées (1 ; 0,5) c'est que l'on n'a pas $f(1) = 0,1$(10) (car sinon le logiciel aurait tracé le point de coordonnées (1 ; 0,1)).

Au principe de précision suffisante se substitue, pour celui qui interprète une image informatique, un **principe de précision optimale** (compatible avec l'outil technologique) qui interdit, a priori, que l'on ait affaire à ce que nous avons appelé une image qualitative. Nous parlerons alors d'**image fidèle** pour exprimer cette relation d'exactitude que postule l'interlocuteur (et sur laquelle il compte) entre l'objet représenté et l'image informatique via le procédé de calcul.

Cette différence, image qualitative/ image fidèle qu'instaure le regard de celui qui interprète les images, suivant leur mode de production, conduit l'auteur d'un imagiciel à opérer un certain nombre de choix lorsqu'il décide de l'algorithme de calcul déterminant l'image. Face à une image (fidèle) obtenue à l'aide d'un premier algorithme (celui que la situation mathématique fournit "naturellement"), l'auteur peut, en effet, être amené, soit à ajuster l'algorithme pour obtenir une autre image, soit à conserver cette image mais en faisant alors de son caractère trompeur un des thèmes de l'usage qu'il préconise. Nous allons illustrer ces deux types de décision dans les deux points suivants.

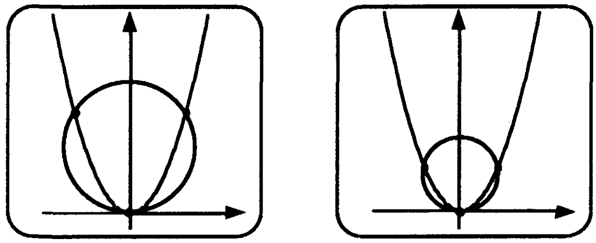
- **Ajustements : voir et savoir de l'auteur**

l'auteur peut ajuster le procédé de calcul de l'image informatique

Un premier type d'ajustement peut tendre à transformer l'image fidèle en image qualitative pour accentuer le phénomène que l'on cherche à faire voir, contournant pour cela l'exactitude de l'algorithme "naturel". Nous parlerons alors d'**ajustement pour l'expressivité**.

Le logiciel **CERCLIM**, propose une situation d'étude de limite qui se "voit" sur un objet géométrique : on trace le graphe d'une fonction f, symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ; pour tout réel $x \neq 0$ tel que f(x) existe, on considère le cercle défini par le point A de coordonnées $(0, f(0))$, le point M de coordonnées $(x, f(x))$ et son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. On s'intéresse à ce que devient ce cercle lorsque x tend vers zéro. Dans le logiciel, l'utilisateur pilote le réel x et le cercle se modifie en conséquence.

(10) Dans la cas où l'échelle choisie permet de distinguer les ordonnées 0,5 et 0,1.

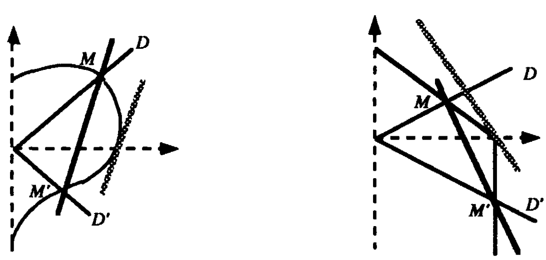


Lorsque la fonction est telle que le rayon du cercle n'a pas de limite (ce qui n'est pas le cas pour la fonction de la figure), l'auteur a choisi de faire tirer au hasard la valeur de ce rayon lorsque les trois points sont confondus sur l'écran. Ce qui permet d'être sûr que l'image produite renforcera ce que les élèves doivent percevoir : lorsque x varie en étant proche de zéro, le rayon prend toutes les valeurs positives.

l'utilisateur peut être trompé par l'image informatique

Par ailleurs, il se peut que l'algorithme prévu produise, pour des raisons de limitation technologique, une image mathématiquement incorrecte (mais toujours informatiquement fidèle). L'ajustement est alors un ajustement pour l'exactitude du tracé, quitte à obtenir l'image par des procédés complexes très différents de ceux qu'imaginera l'utilisateur de l'image.

Le logiciel **LIMSYM** propose l'étude de la position limite d'une droite définie par deux points lorsque ces deux points tendent à être confondus : soient les droites D et D' de pentes opposées non nulles et une courbe C telle que D et D' coupent C en M et M' respectivement, on cherche la position limite Δ de la droite (MM') lorsque les pentes des droites D et D' tendent vers zéro. Le logiciel permet de modifier la pente qui est affichée et la droite (MM') est tracée.
Si on veut rendre la pente très petite et garder une image juste, les possibilités de calcul de la machine ne permettent plus de faire tracer la droite (MM') en calculant les coordonnées des points M et M'. Il faut tracer la position limite en utilisant soit la tangente au point limite lorsque la courbe en possède une (figure de gauche), soit les valeurs calculées lorsque la pente est proche de zéro sans l'être trop (figure de droite). Evidemment il est nécessaire que l'auteur ait vérifié qu'une telle position limite existait bien.
L'image produite est alors **fidèle à ce que sait l'auteur** de la situation et non plus à ce que la machine calcule.

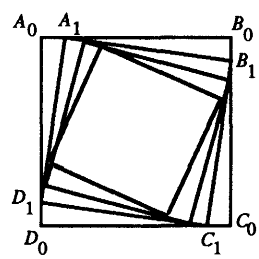


Mais on peut parfois, dans des cas analogues au précédent, préférer conserver l'image mathématiquement inexacte et jouer ainsi de sa force d'illusion.

- Illusion : voir et savoir de l'utilisateur

Cette fidélité postulée de l'image informatique conduit souvent l'élève à faire preuve d'une confiance totale envers l'ordinateur et l'image qu'il produit, confiance analogue à celle qu'il manifeste pour sa calculatrice.

Considérons l'exemple suivant illustré dans le logiciel **SUITFIG**.
On choisit deux nombres c et p et on considère la suite de carrés construits selon le principe suivant : c est la longueur du côté du premier carré $A_0B_0C_0D_0$; le deuxième carré $A_1B_1C_1D_1$ est tel que ses sommets sont sur les côtés du carré précédent et vérifient $A_0A_1=B_0B_1=C_0C_1=D_0D_1=p$. On itère le procédé pour construire les carrés suivants, c_n est la longueur du côté du n[ième] carré.
Une fois choisis les nombres c et p, le logiciel trace la suite des carrés et affiche les valeurs de c_n.



Dans le cas où c =8 et p =1, la suite (c_n) convergeant très rapidement, elle apparaît très vite stationnaire (à partir de n=13) aussi bien graphiquement (plus aucun carré ne semble se dessiner) que numériquement (valeur affichée égale à 1). La résolution de l'écran graphique et le nombre de décimales utilisées conduit l'algorithme "naturel" à produire cette image. Mais, là aussi, il aurait été possible à l'auteur de procéder à un ajustement de son programme et d'utiliser ce qu'il savait de la suite (c_n) pour faire une image exacte (zoom sur les carrés, affichage du signe "≈" entre c_n et la valeur 1, etc...). Or nous avons, dans le cas de cet imagiciel, préféré ne rien faire et laisser l'imagiciel produire cette image "dangereuse". Ceci, précisément, pour que puisse être posée la question des limites de cette exactitude de l'image informatique. L'expérience prouve qu'en utilisant cet imagiciel, le plus souvent, la classe est convaincue du caractère stationnaire de la suite. On peut alors suggérer de prouver (sans l'aide de l'imagiciel) que, pour tout n, $c_n > 1$ (ce qui n'est pas très difficile). Il reste alors à expliquer la contradiction apparente entre ce que donne le raisonnement et ce que donne l'outil informatique. Or l'image étant calculée, son procédé de calcul est explicitable. Elle n'est pas le résultat d'un "tour de main", d'un savoir-faire implicite qui aurait simplement été malhabile en la circonstance. Il est possible de comprendre très précisément pourquoi l'image produite fut celle-ci en réfléchissant sur son mode de production.

Cette possibilité de réflexion qu'offre l'imagiciel n'a pas seulement pour vertu de montrer les limites de l'outil technologique (ce qui n'est déjà pas d'un moindre intérêt), elle permet également de mettre en évidence, à travers l'expérience d'une contradiction réellement vécue, la différence ineffaçable entre l'objet mathématique et sa représentation. L'explicitation du procédé de calcul, à l'occasion d'un de ces "ratés", est un des moyens de combattre l'illusion de la transparence évoquée plus haut.

• Une image dynamique

l'image d'un imagiciel est dynamique

L'image d'un imagiciel n'est pas figée, à l'inverse de l'image du livre, elle est susceptible d'évoluer dans le temps. Nous dirons alors qu'elle est **dynamique** et cela mérite moins de commentaires que son caractère d'image calculée évoqué précédemment. Nous nous contenterons simplement de distinguer les deux types de dynamisme qui peuvent intervenir.

- **Le tracé dynamique**

Il s'agit du cas où l'image se construit peu à peu, sous les yeux de l'utilisateur. Il en est ainsi, par exemple, de la courbe d'une fonction se traçant point par point ou du tracé du transformé d'une figure par une transformation géométrique. L'image s'apparente alors à un film, un dessin animé, les possibilités d'intervention de l'utilisateur se limitant alors à l'interruption, le ralentissement et l'accélération, le recul, le retour au début.

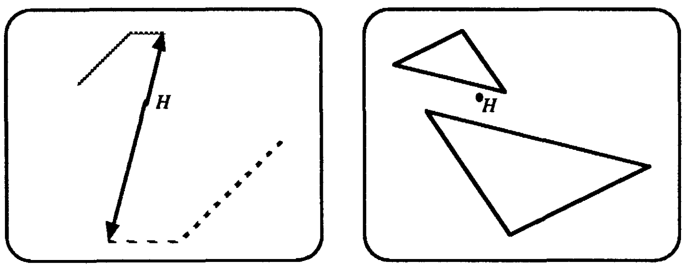
Ce déroulement de l'image peut d'ailleurs être mis à profit par l'enseignant de deux manières.

image point par point et image globale

. Mise en évidence du procédé de construction, l'image illustrant, pas à pas, ce qui pourrait être fait sur papier. Elle pourra alors comporter un certain nombre de tracés auxiliaires de construction qui disparaîtront au fur et à mesure. Avant d'être outil d'exploration, la représentation est objet à construire et objet à interpréter, donc objet d'enseignement. Cette production "en direct" que permet l'image informatique est un des moyens d'atteindre cet objectif(11). Signalons toutefois qu'il est des cas où l'apparition globale de l'image peut être préférée.

(11) Cet aspect des choses est parfois pris en compte par certains manuels sous forme de plusieurs dessins juxtaposés, sous forme de bande dessinée, appelés précisément *"film de la figure"* ou *"film de construction"*.

Ainsi dans le "traceur d'homothétie", deux possibilités sont offertes d'obtenir à l'écran un triangle et son image dans une homothétie de centre donné et de rapport donné : soit en pilotant un point qui engendrera le triangle et en construisant à l'aide de deux vecteurs l'image de chaque point (figure de gauche), soit en faisant apparaître globalement un triangle (que l'on peut déformer en pilotant ses sommets) et son image (figure de droite).
Dans le premier cas, on s'intéresse à la construction de l'image d'un point, et dans le second cas, on s'intéresse plus aux propriétés de l'homothétie.



Construction point par point — Apparition globale

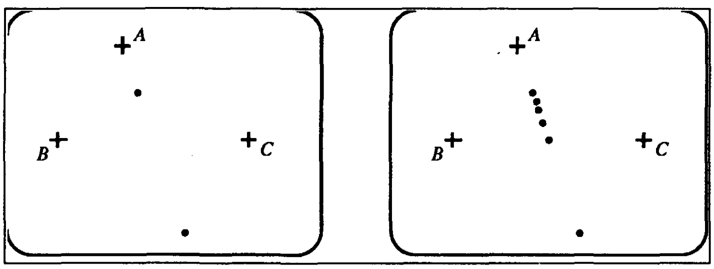
. Passage d'une attitude d'observation à une problématique de prévision, en interrompant l'image et en demandant aux élèves d'anticiper sur la suite. Si les moments d'interruptions sont bien choisis cela peut "dramatiser" le déroulement de l'image et favoriser la discussion en classe.

- **L'image modifiable**

Dans un imagiciel, l'utilisateur peut non seulement intervenir sur le déroulement de la construction de l'image mais aussi modifier celle-ci. Ses possibilités d'action sur l'image sont très variées suivant l'imagiciel : "zoom" sur une partie de la courbe, déplacement d'un point d'une figure géométrique, changement des valeurs numériques de certains paramètres (rapport d'une homothétie, coefficient directeur d'une droite) ..

Quel que soit le mode d'intervention, on peut pratiquer deux types de déformation de la figure : celles qui se font **en continu** (on déplace un point à l'aide des flèches et "le reste suit") et celles qui se produisent **d'un seul coup** (on change un point en entrant ses coordonnées au clavier et la nouvelle image apparaît). Une même situation pouvant donner lieu aux deux types d'action, il est certain que, dans les deux cas, le contexte d'exploration de la situation n'est pas le même.

Le logiciel **BARY3** est un "traceur" du barycentre de trois points A, B et C respectivement affectés des coefficients a, b et c. L'utilisateur peut faire varier les coefficients soit de manière continue : par exemple en appuyant sur la touche "A", il augmente ou diminue le réel a d'un pas constant. Il peut aussi proposer directement une nouvelle valeur de a en utilisant les chiffres du clavier. Les figures obtenues sont très différentes, les remarques des élèves le seront aussi. Sur la figure de gauche, on passe directement de la situation a=2, b=1, c=1 à la situation a=–1, b=1, c=1, alors que sur la figure de droite on le fait continûment en diminuant a de 0,5 à chaque fois.



Si nous avons rapproché le dynamisme du tracé de celui du film de dessin animé, ce caractère modifiable de l'image est assurément plus riche et peut être davantage comparé au *conte à votre façon* de Raymond Queneau ou aux "livres dont vous êtes le héros" qui fleurissent depuis quelques années. Il s'agit, en fait, d'une des composantes de l'aspect fondamental de l'image au sein d'un imagiciel : son interactivité.

- Une image interactive

l'image dans un imagiciel est interactive

A de rares exceptions près où il s'agit d'illustrer un point très particulier (tracé de la cycloïde comme exemple de courbe périodique), l'image d'un imagiciel est en fait constituée d'une infinité potentielle d'images qui apparaîtront à la demande de l'utilisateur. Telle est la définition de **l'interactivité** de l'image qui permet à l'utilisateur de l'interroger et qui fait de chaque utilisation de l'imagiciel une histoire unique. C'est, à coup sûr, la spécificité essentielle de l'image d'un imagiciel. Nous nous contenterons ici de l'évoquer puisque cette interaction imagiciel-utilisateur sera au centre de la troisième partie.

Signalons simplement que les possibilités d'interrogation de l'utilisateur peuvent être plus ou moins limitées depuis la simple demande de l'affichage des coordonnées d'un point ou des valeurs d'une suite jusqu'à l'entrée d'une fonction quelconque dont on obtiendra la représentation graphique. La question se pose alors à l'auteur de savoir quel degré de liberté il doit laisser à l'utilisateur. Permettre de faire varier tous les paramètres de l'image peut, dans un premier temps, paralyser le travail d'exploration. Limiter excessivement le choix peut appauvrir irrévocablement la situation(12). Entre ces deux extrêmes l'équilibre n'est pas toujours facile à trouver.

• Une image motivante

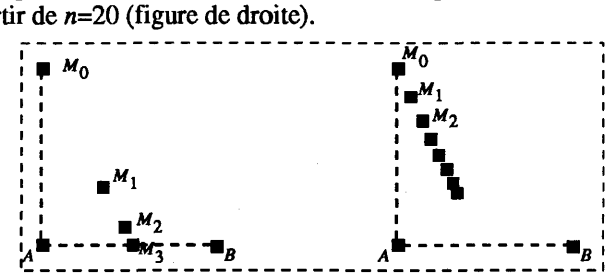
Nous voudrions évoquer, sous cette rubrique au titre vague, les différents aspects de l'image d'un imagiciel qui contribuent à ce que les élèves "entrent" dans la situation que l'imagiciel veut mettre en place. L'image n'est, bien entendu, qu'une composante de ce dispositif favorisant l'appropriation par les élèves du problème mathématique sous-jacent. Le choix de la situation elle-même, le moment de son introduction, sa présentation et sa gestion par l'enseignant sont, bien évidemment, également à prendre en compte. Il n'en demeure pas moins que l'image, partie visible, "accrocheuse", de l'imagiciel a son rôle à jouer dans ce registre de la motivation. Nous distinguerons rapidement trois aspects.

- **Le caractère lisible de l'image**

l'image dans un imagiciel est lisible...

Après avoir reconnu l'utilité d'une illustration sur ordinateur d'une situation, il se peut que l'image informatique correspondant à des valeurs "naturelles" des paramètres de cette situation, soit peu lisible. On risque ainsi de manquer ce que l'utilisation de l'imagiciel pouvait apporter à l'étude du problème. L'auteur doit donc ajuster les données numériques de la situation dans le but de créer une image lisible, exploitable.

SUITBARY est un logiciel proposant un travail sur des suites numériques définies à partir d'une suite de points. On se donne deux points A et B et à partir d'un point M_0, on construit la suite de points M_n telle que pour tout entier n, M_{n+1} est le barycentre du système pondéré $\{(A,1), (B,1), (M_n,10)\}$.
L'objectif est d'utiliser ce que l'on peut voir sur cette suite de points pour prévoir les propriétés des suites des coordonnées x_n et y_n du point M_n.
Dans la situation de départ, les trois points étaient pondérés par le même coefficient, la symétrie par rapport aux trois points "cachait" le rôle prépondérant du milieu de [AB], mais l'image produite était peu lisible (voir ci-dessous, figure de gauche), et la convergence trop rapide de la suite de points rendait les conjectures difficiles : à partir de n=3, tous les points de la suite étaient confondus. En choisissant de pondérer le point M_n par 10, nous avons permis qu'un plus grand nombre de points soient visibles sur l'écran, les points sont confondus seulement à partir de n=20 (figure de droite).



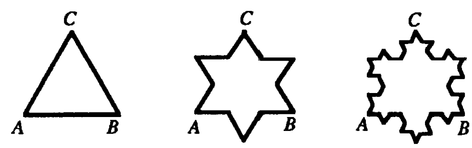
(12) Ceci nous a parfois amenés à distinguer les variables et les paramètres d'une image informatique (CREEM 1991b).

- Le caractère esthétique de l'image

esthétique...

De même qu'il y a de "beaux problèmes" il peut y avoir de "belles images" en mathématiques et il n'est pas inutile de chercher dans le choix de la représentation une certaine émotion ou, au moins, curiosité esthétique qui peut être le premier pas vers l'exploration de la situation. Il est alors essentiel de veiller à ne pas parasiter la représentation par une surcharge décorative de traits non-pertinents risquant de détourner l'attention ou de pervertir l'interprétation.

Ainsi l'imagiciel **FLOCONS** propose une étude de suites à partir d'une situation fractale. Outre le caractère "culturel" de cette situation, (on parle beaucoup d'objets fractals aujourd'hui, il y a même une collection de manuels qui porte ce nom), on peut dire que l'aspect des images peut être un facteur de l'intérêt des élèves.
A partir d'un triangle équilatéral, on construit une suite de polygones de la façon suivante : pour passer d'un polygone au suivant, on remplace chaque segment par une ligne brisée comportant quatre segments de longueur égale au tiers de la longueur du segment initial comme sur la figure ci-dessous. Le logiciel permet d'obtenir à l'écran, les premiers polygones de la suite.

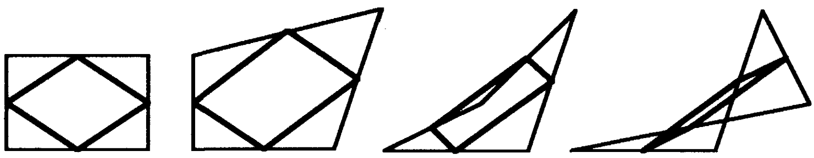


- Le caractère dramaturgique de l'image

dramatiquement bien construite

Par son dynamisme, par sa disponibilité aux propositions de l'utilisateur, l'image d'un imagiciel est une histoire à écrire et à suivre. Entre l'imagiciel et la classe se joue une pièce dans laquelle, tour à tour spectateurs et acteurs, les élèves doivent "entrer". L'auteur doit donc faire en sorte que l'image soit intriguante, étonnante, frappante, en un mot dramatiquement bien construite, pour favoriser cet investissement de l'élève dans ce qui est en train de se jouer. Dans certain cas cet aspect peut être tout à fait central.

Considérons l'imagiciel **VARIGNON** qui illustre la propriété classique suivante : les milieux des côtés d'un quadrilatère quelconque forment un parallélogramme. L'imagiciel permet de déformer le quadrilatère dessiné à l'écran (en pilotant ses sommets) et de faire apparaître ce parallélogramme des milieux.



exemples de quadrilatères obtenus par déformations successives.

Nous aurions pu dessiner à l'écran dès le début un quadrilatère dit "quelconque", et illustrer ainsi immédiatement la généralité du phénomène. Nous avons choisi au contraire de partir d'une situation particulière : au départ le quadrilatère est un rectangle, le parallélogramme des milieux est alors un losange. Ce choix permet de ménager quelques effets dramatiques dans la classe. L'imagiciel sert d'abord pour présenter le problème et poser la question : *"le résultat obtenu à l'écran est-il encore vrai pour d'autres quadrilatères ?"*.
Les élèves peuvent croire que si le quadrilatère de départ n'a rien de particulier, celui obtenu en joignant les milieux n'aura rien de particulier non plus ; ils seront souvent surpris par la première figure qu'ils réaliseront, et donc s'impliqueront davantage dans cette recherche individuelle. Nous avons ainsi observé des élèves faisant de très nombreux essais sur le papier avant d'être convaincus qu'ils n'arriveraient pas à trouver un quadrilatère pour lequel le quadrilatère des milieux ne serait pas un parallélogramme.
L'imagiciel peut naturellement être utilisé pour vérifier la propriété découverte, il peut encore contribuer à la dramaturgie de la séquence : en effet dans leur recherche sur papier, peu d'élèves essaient spontanément un quadrilatère non convexe ; quand on commence à déformer l'image en bougeant un sommet, on est conduit naturellement à un quadrilatère croisé. Ce qui crée encore souvent une réaction dans la classe : *"c'est encore vrai si le quadrilatère est croisé !"*.
Cette "dramatisation" de la situation favorise l'implication d'un maximum d'élèves dans l'activité proposée, et met en lumière la quantification de l'énoncé.

Au fur et à mesure de cette description des caractères spécifiques de l'image dans un imagiciel, nous avons vu apparaître la question de l'usage comme tout à fait déterminante pour l'analyse du rôle de l'imagiciel dans la situation d'enseignement. C'est cette question qu'il nous faut aborder maintenant à la lumière de ce qui vient d'être dit sur la nature de l'image et dans le but de répondre partiellement à notre question initiale.

3. UTILISATION DE L'IMAGICIEL

3.1. Remarques méthodologiques

Tout discours sur l'utilisation d'un outil ou d'une démarche pédagogique oscille, le plus souvent, entre deux extrêmes :

- le premier consiste à collectionner les observations d'utilisations effectives et à les rapporter, sous forme plus ou moins anecdotique, parfois typologique, en concluant sur l'inévitable diversité et hétérogénéité des pratiques réelles et sur le danger de toute généralisation et théorisation par nature abusive ;
- le second considère et évalue les utilisations réelles comme des réalisations plus ou moins réussies, plus ou moins déviantes, d'une pratique définie a priori et qui constitue la norme dans l'optique d'une pédagogie "science dure", le credo dans le cadre d'une pédagogie militante.

concevoir l'utilisation des imagiciels plutôt que la décrire ou l'évaluer

Descriptif ou normatif, le discours sur les pratiques pédagogiques abolit la tension entre la multiplicité du réel et la nécessaire abstraction de tout discours.

L'issue que nous proposons, ici, à cette fausse alternative est la suivante : poser sur la question de l'utilisation de l'imagiciel le regard de l'auteur ; c'est-à-dire envisager les pratiques potentielles et fournir aux utilisateurs, non pas un recueil d'exemples ou un schéma d'action mais un cadre de réflexion qui permette, à eux comme à nous, de **donner du sens** à ce qui va effectivement se passer. Schématiquement nous pourrions dire que nous ne cherchons ni à décrire ce qui se passe, ni à transmettre ce qui doit se passer, mais à **expliciter ce qui pourrait se passer**, ou plutôt **ce qui permettra de mettre en place et de comprendre ce qui va se passer.**

Pour que cela soit possible, la première condition est de tenir compte de la réalité des pratiques. Nous remplissons cette condition de deux manières : d'abord en étant nous-mêmes utilisateurs des imagiciels dans nos propres classes, ensuite grâce à une équipe d'une dizaine d'expérimentateurs qui, outre les informations nécessaires à l'amélioration d'un imagiciel lors de la phase d'élaboration (cf 1.), nous fournissent un ensemble de remarques, d'expériences personnelles que devra intégrer notre analyse de la pratique. C'est d'ailleurs en constatant la difficulté qu'il y avait à transmettre, à cette équipe d'expérimentateurs (extérieure au travail d'écriture des imagiciels), les moyens d'envisager l'utilisation des imagiciels que nous avons été amenés à développer notre recherche dans ce sens.

Il s'agit donc de **concevoir la pratique** et non pas de la décrire ou de l'évaluer, et, si nous parlons de la pratique, au singulier, il ne faut y voir ni la naïveté qui consisterait à croire que le seul fait d'utiliser un imagiciel détermine, dans les faits, une seule pratique possible(13), ni le dogmatisme qui souhaiterait imposer, à travers l'outil pédagogique, une unique "bonne" manière d'agir. La pratique des imagiciels est l'outil théorique mais réaliste que nous essayons d'élaborer pour pouvoir penser les pratiques.

l'outil pédagogique est à la fois le fruit et la source d'une réflexion didactique

Signalons enfin que si, parfois, nous donnons l'impression de ne concevoir la pratique de l'enseignement qu'à travers l'emploi d'imagiciels, il faut y voir l'effet local de la problématique choisie pour cet article et non une prise de position dogmatique pour l'imagiciel "panacée universelle". L'imagiciel n'est qu'un outil pédagogique parmi d'autres et, si nous estimons que ce qu'il rend possible dans la pratique est susceptible d'améliorer l'enseignement des mathématiques, nous pensons également que la réflexion didactique nécessaire pour concevoir cet usage est digne d'intérêt parce que susceptible d'éclairer certains aspects de l'enseignement des mathématiques (et parfois d'autres disciplines) avec ou sans imagiciel.

Il est temps maintenant de regarder cette pratique sous l'angle du caractère expérimental de l'activité mathématique qui peut y être menée.

3.2. Les différents rôles d'un imagiciel

Utiliser un imagiciel c'est lui assigner un certain rôle dans l'activité proposée aux élèves. Ce rôle n'est pas une propriété intrinsèque de l'image (une même image peut jouer différents rôles) mais bien le signe de l'importance de l'usage dans la description d'un imagiciel. Il est donc essentiel de se faire une idée aussi précise que possible du rôle que peut tenir un imagiciel dans le déroulement de l'activité. Nous proposons d'en distinguer un certain nombre que nous regroupons autour de trois registres de l'activité mathématique en classe(14).

- Appréhender la situation

l'imagiciel peut servir, dans un premier temps, à appréhender la situation

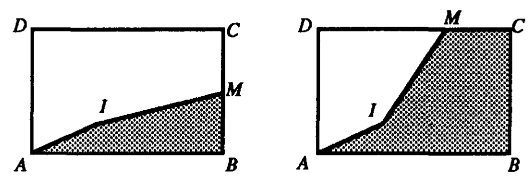
L'imagiciel peut intervenir soit comme **présentation** soit comme **illustration** d'une situation.

Dans le premier cas, il s'agit de permettre aux élèves d'entrer dans un problème souvent déroutant par une description de celui-ci plus intelligible, plus "sensible" que celle qui pourrait en être faite par un texte écrit ou une consigne orale.

(13) Nous partageons d'ailleurs sur ce point l'avis de Chantal D'Halluin et Daniel Poisson (1987) : *Les outils techniques eux-mêmes n'engendrent pas de nouvelles pratiques pédagogiques mais sont amplificateurs des pratiques existantes.*

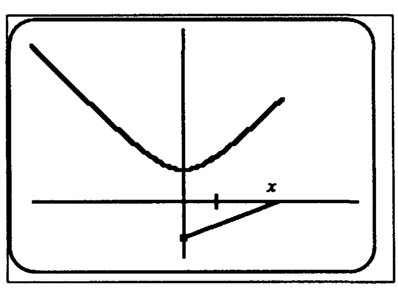
(14) Nous reprenons, sous une forme légèrement différente, l'analyse proposée dans CREEM 1991.

L'imagiciel **AIRECT** propose une famille de fonctions affines par intervalles : étant donné un rectangle *ABCD* et un point *I* intérieur au rectangle, un mobile *M* fait le tour du rectangle dans le sens *ABCD*. On s'intéresse à la fonction qui, à la distance parcourue par *M*, associe l'aire balayée par le segment *IM*.
Une option permet de déplacer le mobile et de voir l'aire se colorier sans tracer la courbe de la fonction. Cette option permet d'utiliser le logiciel pour faire comprendre à chaque élève ce que signifie "l'aire balayée par IM".



Dans le second cas, l'imagiciel permet de réaliser à l'écran un travail (qui pourrait être fait sur papier) en utilisant les caractéristiques de l'image d'ordinateur (dynamisme, rapidité, souplesse, ...) pour rendre la représentation plus "frappante" et plus agréable dans un but, par exemple, de mémorisation.

L'imagiciel **DIST1** représente la fonction qui à un réel x associe la distance du point de coordonnées $(x,0)$ au point de coordonnées (0,-1). Si on choisit cette situation pour introduire la notion de minimum d'une fonction, on peut faire fonctionner le logiciel immédiatement après la description de la situation ; le travail des élèves consiste alors à expliquer les particularités de la courbe obtenue. Si la séquence était faite sans imagiciel, par exemple en distribuant aux élèves une courbe dessinée sur papier, nous perdrions le dynamisme de la construction point par point qui nous semble essentiel.



• Rechercher des énoncés vrais

Une fois compris (à l'aide de l'imagiciel et/ou d'une activité papier) le problème posé, il faut répondre aux questions qu'il pose explicitement ou implicitement, c'est-à-dire, finalement, produire des énoncés vrais portant sur la situation en mobilisant des connaissances déjà acquises. Dans cette recherche d'énoncés vrais, l'imagiciel peut intervenir soit pour aider à produire les énoncés soit pour les confirmer ou les réfuter.

- **Aide à la production de conjectures**

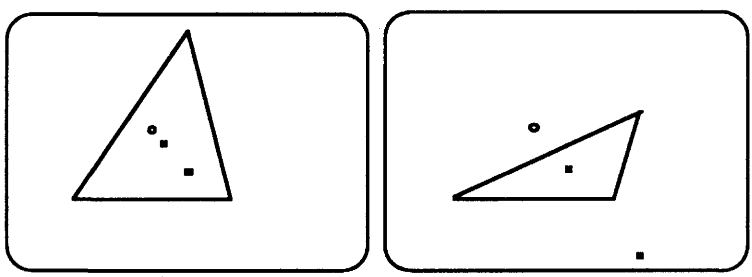
l'imagiciel permet quatre modes d'exploration...

L'imagiciel permet de faire rapidement (c'est-à-dire détaché de l'exécution des tâches techniques répétitives) l'exploration des différents cas d'une situation une fois celle-ci comprise (en étudiant, par exemple, les premiers cas sur papier).
Par cette fonction d'**outil d'exploration**, par le statut d'image collective (c'est-à-dire commune) de l'image qu'il délivre, l'imagiciel favorise la production de conjectures qui sans lui auraient pu être très difficiles à obtenir. Mais si le but est le même (produire des conjectures), le type et le statut des énoncés recherchés délimitent plusieurs modes d'exploration.

l'exploration systématique...

. L'exploration systématique consiste à faire varier l'élément caractéristique (la variable) de la situation afin de rechercher si toutes les images obtenues ont une ou plusieurs propriétés communes permettant de fournir une ou plusieurs conjectures. L'imagiciel permet ici d'approcher, d'illustrer la quantification universelle, plus ou moins implicite, dans la plupart des problèmes mathématiques. Ce que l'image unique et statique ne peut exprimer (cf plus supra 2.1.) l'image dynamique d'un imagiciel permet d'en faire sentir le sens et l'exigence.

L'imagiciel **DROITE d'EULER** dessine à l'écran un triangle, son centre de gravité *G*, son orthocentre *H* et le centre de son cercle circonscrit *O*. Le triangle est déformable en pilotant chacun de ses sommets. Ce logiciel est une illustration de la propriété suivante : pour tout triangle, *H* est l'image de *O* dans l'homothétie de centre *G* et de rapport (–2).
La construction sur le papier d'une telle figure demande beaucoup de soin si on veut qu'elle soit suffisamment exacte et donc il faut y consacrer du temps. On peut éventuellement proposer aux élèves de la faire pour un triangle, mais ce serait absurde qu'ils la fassent pour plusieurs. Dans ces conditions, il est difficile de leur demander de faire une conjecture qui commence par "pour tout triangle...". Souvent même ils ne remarquent rien sur une figure construite sur papier d'une part parce qu'elle est encombrée par de nombreux traits de construction, d'autre part parce que cette propriété ne peut apparaître que comme un "invariant" par rapport à la variable "triangle" de la situation, ce qui nécessite de voir un grand nombre de triangles.

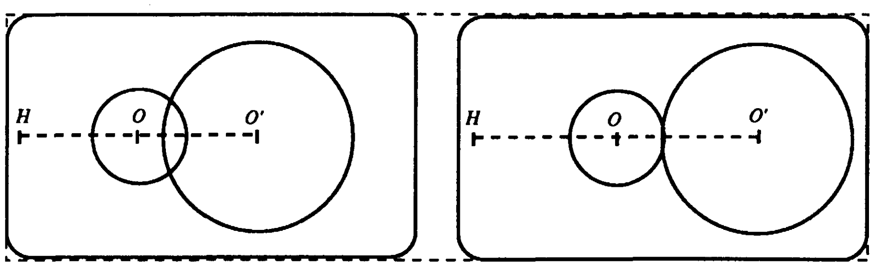


l'exploration organisée...

. L'exploration organisée ressemble à la précédente dans la mesure où il s'agit de faire varier plusieurs caractéristiques de la figure à la recherche d'énoncés généraux, mais elle s'en distingue par le caractère structuré, planifié du travail exploratoire qui cherche à isoler les valeurs des paramètres permettant de dégager différents cas correspondant à différentes conclusions. Si l'exploration systématique était une exploration **pour voir**, l'exploration organisée est davantage une exploration **pour prouver** (15).

(15) Cette distinction se rapproche de celle faite par Astolfi et Develay (1989) à propos de l'expérimentation. On peut aussi évoquer à ce sujet les déclarations de Claude Bernard invitant les physiologistes à faire des *"expériences pour voir"* et déclarant par ailleurs : *"quand on ne sait pas ce que l'on cherche on ne voit pas ce que l'on trouve."*

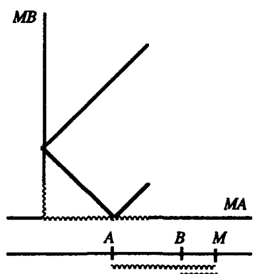
L'imagiciel **DEUX CERCLES HOMOTHÉTIQUES** représente à l'écran un cercle de centre O et de rayon R et son image dans une homothétie de centre H et de rapport k. L'utilisateur choisit le rapport puis les deux cercles étant dessinés à l'écran, il peut déplacer le point O et changer le rayon R. Le problème proposé aux élèves est de rechercher les conditions pour que les deux cercles soient tangents.
La situation est ici assez complexe dans la mesure où il y a beaucoup de variables : la position du point O par rapport à H, le rayon R et le rapport k.
Les élèves peuvent proposer de nombreuses conjectures chacune d'elles étant valable pour certaines valeurs des variables et pas pour d'autres. La production d'une conjecture générale peut demander du temps et des efforts d'organisation des recherches.
Dans une première étape, on pourra utiliser le logiciel en agissant uniquement sur la position de O, ce qui permettra de dégager une première conjecture. Mais cette conjecture devra être confrontée aux autres variables. Pour être sûrs de ne pas oublier de cas, ou de ne pas traiter plusieurs fois le même, les élèves vont être amenés à organiser leurs expériences et à préciser et/ou à réajuster petit à petit leur conjecture.



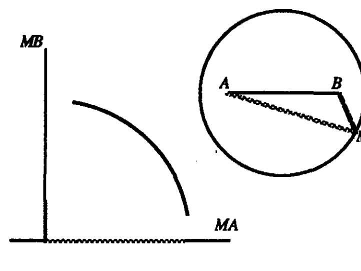
l'exploration qualitative...

. <u>L'exploration qualitative</u> consiste à parcourir les différents cas d'une situation dont les premiers ont été étudiés en détail. On peut alors, suivant les situations, se contenter de constater le résultat que l'image illustre ou indiquer rapidement la preuve des énoncés issus de l'observation lorsque ces preuves sont simples parce qu'analogues à celles utilisées dans les premiers cas étudiés. Quoiqu'il en soit, l'imagiciel, par sa rapidité de production des images, permet d'envisager, même succinctement, un plus grand nombre d'aspects de la situation, un plus grand nombre d'images que le travail sur papier et cette possibilité d'exploration qualitative qu'offre l'imagiciel nous semble d'un grand intérêt. Etudier un problème mathématique ce n'est pas seulement en produire la résolution achevée, c'est aussi en saisir les différents aspects, la complexité, les points cruciaux et les prolongements possibles, dans une vue plus synthétique qu'analytique.

L'imagiciel **MAMB** représente dans un repère orthonormal le point de coordonnées (MA,MB) où A et B sont deux points fixes et M un point variable d'une droite ou d'un cercle. Dans le logiciel, dix options sont prévues (selon la position des points A et B par rapport à la droite ou au cercle) qu'il est impossible d'étudier toutes en détail. Pour chacune d'elle, il faut répondre à la question : la longueur MB est-elle une fonction de la longueur MA ?



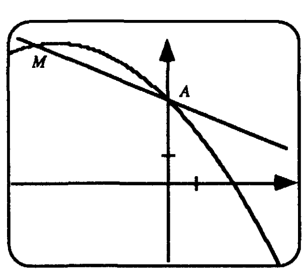
M se déplace sur la droite AB

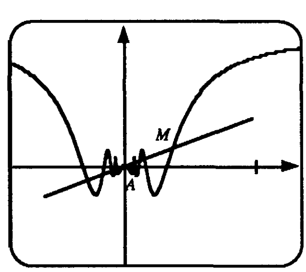


M se déplace sur un cercle centré au milieu de AB

On étudiera avec soin une ou deux options, (en demandant à chaque élève de faire une figure sur papier, de tracer les points de coordonnées (MA,MB) pour quelques points M, etc...). Ensuite, par exemple, on pourra envisager de classer les autres situations selon qu'il s'agit ou non d'une fonction. L'utilisation de l'imagiciel évite de passer trop de temps à exécuter des tâches techniques (il n'est plus nécessaire de faire une figure et de construire des points de la courbe) ; on pourra au contraire se consacrer aux justifications des conjectures.

L'imagiciel **PENTLIM0** illustre une situation de limite en zéro de fonction non définie en zéro. Sur l'écran est dessinée une courbe d'équation $y=f(x)$ où f est une fonction définie en zéro. A et M étant les points de cette courbe d'abscisses respectives 0 et $x \neq 0$, on s'intéresse à la position limite de la droite AM quand x tend vers zéro. On sera donc amené à étudier la limite de la pente de cette droite AM en fonction de x.
Dans le logiciel nous avons proposé la courbe représentative de la fonction f définie par $f(0)=0$ et $f(x)=x\sin 1/x$ pour $x \neq 0$. Dans ce cas la droite AM n'a pas de position limite. Si on utilise le logiciel dans une classe de première, les élèves n'ont aucun outil pour justifier ce résultat (ils peuvent seulement prouver qu'une fonction a une limite), il nous semble cependant important qu'ils voient de tels images et qu'ils essaient de les interpréter.

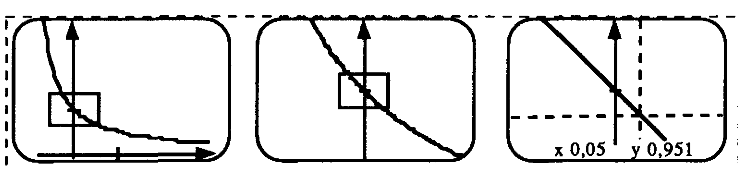




l'exploration d'une image

. <u>L'exploration d'une image</u> est assez différente des trois précédentes en ce qu'elle ne s'attache pas à dégager les régularités d'un ensemble d'images mais qu'elle cherche à préciser la nature et l'expression d'un objet représenté (objet intervenant dans une conjecture) en évaluant qualitativement et quantitativement sa représentation. L'exemple suivant fera mieux comprendre cette situation particulière.

Pour présenter la notion d'approximation affine d'une fonction au voisinage d'un point, on peut utiliser les possibilités de "zoom" du traceur de courbes **CARTESI1**.
Sur les figures ci-dessous, on a reproduit le tracé de la courbe de la fonction f définie par $f(x) = 1/(1+x)$, puis on a effectué des "zooms" successifs au voisinage du point de la courbe d'abscisse zéro.
L'image obtenue permet de faire facilement la conjecture suivante : dans l'intervalle correspondant au cadrage, la courbe vue à l'écran est un morceau de droite. Le premier travail est alors de préciser quelle est cette droite. Diverses stratégies peuvent être mises en œuvre pour la déterminer : on peut en particulier utiliser une des options du logiciel qui permet de lire sur l'écran les coordonnées d'un point. Comme la droite passe par le point de coordonnées (0,1), il sera facile de calculer alors une équation de la droite. Le traceur est ensuite utilisé pour vérifier les propositions des élèves : en particulier si plusieurs propositions sont faites le logiciel peut aider à conjecturer celle qui convient le mieux. En explorant l'image obtenue, les élèves peuvent ainsi découvrir eux-mêmes que $f(x) \approx -x+1$ au voisinage de zéro. Bien sûr, il reste à interpréter tout ce travail et à le justifier.



Courbe d'équation $y = \frac{1}{1+x}$ Après un premier "zoom" Après un deuxième "zoom"

le travail d'exploration doit être accompagné d'un travail de formulation

Cette exploration donne à la représentation un statut d'objet quasi réel et le risque est grand, alors, de succomber aux tentations évoquées plus haut (illusion de la transparence, autonomie de l'image..). A des degrés divers, le risque est d'ailleurs présent dans toutes ces démarches d'exploration et pour que la commodité d'exploration qu'offre l'imagiciel ne favorise pas chez les élèves une attitude de stricte observation, il est nécessaire que l'enseignant accompagne l'utilisation de l'imagiciel d'un travail sur papier et d'une synthèse collective. Au cours de cette synthèse, la formulation explicite de ce qui a été observé et la mise en évidence des énoncés mathématiques que cela illustre permet de faire passer de la simple manipulation à l'activité mathématique proprement dite, à savoir : décrire et expliquer les particularités de l'image et justifier les résultats obtenus. Ce travail de formulation qui part de la représentation et, en s'en détachant, produit un énoncé mathématique indépendant de celle-ci, est tout à fait fondamental.

- **Confirmation et réfutation**

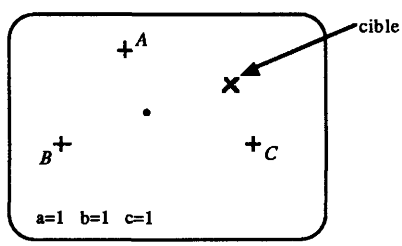
Ce rôle peut être tenu en trois occasions.

l'imagiciel intervient également pour tester une conjecture, une réponse ou corriger un exercice

. Soit que, la classe ayant produit, à la suite d'un travail d'exploration avec l'imagiciel, une ou plusieurs conjectures, il soit décidé d'utiliser l'imagiciel pour **tester ces conjectures** en étudiant d'autres cas. L'imagiciel sur les cercles homothétiques évoqué ci-dessus illustre ce rôle.

. Soit que, le but étant d'obtenir une certaine image-résultat, l'imagiciel fournisse l'illustration de la solution proposée par la classe et permette donc de voir si elle correspond à la réponse attendue. Il s'agit alors de **tester une réponse**.

L'imagiciel **BARY3J** est un jeu de cible qui accompagne le logiciel BARY3 décrit plus haut. Trois points A, B et C sont dessinés sur l'écran ainsi que le barycentre du système $\{(A,a)\ (B,b)\ (C,c)\}$ et un point "cible" tiré au hasard par la machine. L'utilisateur doit trouver les valeurs de a, b et c pour faire coïncider le barycentre avec la cible.



. Soit enfin que, le travail ayant été fait sur papier, l'imagiciel constitue un outil de validation de ce travail par l'illustration qu'il propose du résultat correct. L'imagiciel est alors un outil de **correction d'exercice**.

On peut utiliser l'imagiciel **DIST1** décrit plus haut dans ce sens : pour vérifier que les élèves savent trouver le minimum d'une fonction, on leur demandera de prouver que la fonction qui à un réel x associe la distance AM admet un minimum, le logiciel sera utilisé pour confirmer les réponses des élèves.

Dans ce dernier cas, il est bien entendu essentiel que l'imagiciel n'intervienne qu'après le travail sur papier, sous peine que, la réponse s'imposant trop nettement aux élèves, ils ne jugent plus utile de mobiliser leurs connaissances pour résoudre le problème posé.

- Donner du sens

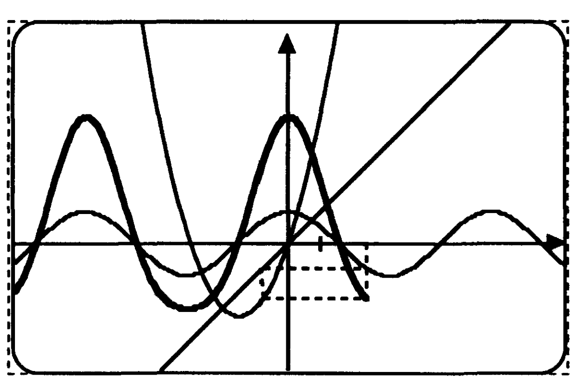
l'image, nécessitant une interprétation, peut être problématique...

Dans certains cas, la situation mathématique peut être claire et les questions de vérité non encore posées ou résolues par d'autres moyens que l'imagiciel, mais c'est alors l'interprétation de l'image produite qui fait problème. Nous parlerons alors **d'image problématique** et nous distinguerons trois situations dans lesquelles elles peuvent intervenir.

parce que complexe...

- Soit en phase préliminaire lorsqu'on ne comprend pas ce que représente l'image et qu'on ne voit pas quel est le lien entre elle et le problème posé. C'est **l'image complexe**. Il est donc nécessaire, afin de pouvoir utiliser l'image pour explorer la situation, de préciser le statut et les règles de construction des représentations apparaissant à l'écran.

L'utilisation de l'option "composition" du traceur de courbe **CARTESI1** conduit à la production d'une telle image. Avant de pouvoir se servir de cette option pour examiner les particularités de l'opération composition des fonctions, il faut d'abord décrypter l'image écran. L'option permet de construire la courbe C de la fonction gof à partir des courbes représentatives des fonctions f et g.
Sur la figure ci-dessous nous avons reproduit l'état de l'écran en cours de construction lorsque f et g sont respectivement définies par $f(x)=\cos(x)$ et $g(x)=x(x+3)$ [la courbe de la fonction gof en cours de construction est en gras sur la figure]. Les élèves devront utiliser la définition de la fonction gof pour expliquer comment est obtenu le point d'abscisse x sur la courbe C (pour cela il faut trouver le rôle de la droite d'équation $y=x$ et des différentes lignes en pointillés sur la figure).



parce que déroutante...

- Soit au cours de l'exploration, lorsque l'image apparaît différente de celle à laquelle on s'attendait intuitivement. Avant même de chercher à prouver le résultat que l'image semble illustrer et réfuter notre intuition première, il faut chercher à comprendre l'image, à l'accepter malgré son opposition à ce qui nous semblait une évidence. Nous parlerons alors d'**image déroutante**.

Par exemple dans le cas de la situation proposée par **CERCLIM** (cf supra), l'intuition conduit rarement à la prévision correcte pour la position limite : la prévision parfois argumentée est soit celle d'un cercle réduit à un point ("les trois points étant confondus en un seul, le cercle est lui-même un point"), soit celle d'une droite en tant que cercle de rayon infini ("pour trouver le centre on prend l'intersection de la médiatrice du segment *AM*, or la droite *AM* se rapproche de l'axe des abscisses donc le centre s'éloigne de plus en plus"). Or par exemple dans le cas de la parabole illustrée plus haut, le cercle a pour limite un cercle de rayon 0,5. Cette image peut être suffisamment déroutante pour essayer d'en comprendre la raison.

parce qu'illusoire

- Soit, également au cours de l'exploration, lorsque l'image nous trompe, confirmant une idée fausse ou jetant le doute sur un résultat obtenu par ailleurs. L'image est alors **image illusoire** et il est alors utile de revenir sur le mode de production de l'image, sur les limites et les dangers de toute représentation informatique et sur la vigilance nécessaire dans toute interprétation d'une représentation d'un objet mathématique L'exemple **SUITFIG**, donné plus haut, de la suite des carrés (cf supra) est une parfaite illustration de cette situation.

3.3. Imagiciel outil d'expérimentation

A partir des différents rôles des imagiciels que nous venons de dégager, est-il possible de qualifier de "démarche expérimentale" une partie de l'activité mathématique effectuée à l'aide d'imagiciels ?

l'imagiciel peut être vu comme un outil d'expérimentation...

Assurément l'analogie est grande avec le travail d'expérimentation tel qu'il nous apparaît dans l'enseignement des sciences expérimentales (Astolfi, Develay 1989). La place accordée par l'emploi d'imagiciels aux tâtonnements, aux constatations, aux explorations, la légitimité reconnue de la démarche d'essais-erreurs dans la recherche de conjectures, la possibilité d'explorer une image comme si on analysait un phénomène physique ou disséquait un être vivant, tout ceci va dans le sens de cette analogie et concourt à faire de l'imagiciel un **outil d'expérimentation**.

Mais l'analogie peut aussi être trompeuse.
Certes, l'utilisation d'imagiciels est une des pratiques pédagogiques qui remet en cause la conception dogmatique de l'enseignement des mathématiques égrenant son chapelet

de définitions-théorèmes-démonstrations. Elle le fait en profondeur : non pas en masquant sous la fiction d'une participation illusoire des élèves le déroulement d'un contenu magistral mais en offrant la possibilité de pratiques et de problématiques réellement collectives donnant aux questions abordées un véritable enjeu et modifiant les modes d'appropriation des connaissances. La perturbation apportée par l'emploi d'imagiciels n'est pas seulement de l'ordre des moyens, elle touche également l'idée que l'on se fait de la finalité de l'enseignement des mathématiques. En cela, le terme d'expérimentation accolé à celui de mathématique, par le caractère a priori paradoxal de l'expression marque la rupture.

mais l'activité mathématique autour de l'imagiciel n'est pas, à proprement parler, expérimentale

Cependant, si utiliser des imagiciels peut instaurer une approche nouvelle des mathématiques qu'il faut définir, cela ne fait pas forcément de l'activité mathématique une activité expérimentale au sens habituel (s'il existe) et des mathématiques une science expérimentale.

L'usage de l'imagiciel, à travers ses différents rôles, indique des ressemblances entre l'activité mathématique et l'expérimentation en sciences expérimentales. C'est ce que ces pages ont tenté de préciser. Il resterait à pointer les différences. La place manque ici pour le faire rigoureusement. Nous voudrions cependant en donner une idée en guise de conclusion.

CONCLUSION :
L'IMAGICIEL "LIEU D'EXPÉRIENCE"

Intervenant dans la classe, l'imagiciel n'est pas seulement un outil nouveau, il est également un élément supplémentaire du dispositif de communication mis en place. Dès lors que nous utilisons un imagiciel en classe de mathématiques, celui-ci crée *"des changements dans l'espace des interactions"* (Flores, Winograd 1989). C'est l'étude de ces changements qui permettra d'envisager, à partir de l'imagiciel outil d'expérimentation, l'imagiciel **"lieu d'expérience"** : c'est-à-dire moyen et occasion, espace de représentations et événement de paroles, au sein duquel l'élève construit, collectivement et individuellement, ses connaissances mathématiques et la représentation qu'il s'en fait.

l'expérience mathématique faite à partir de l'imagiciel est d'une autre nature

L'analyse des échanges verbaux dans la classe de mathématiques où intervient l'imagiciel est actuellement un de nos sujets d'étude et donnera lieu à des publications ultérieures prolongeant celle-ci. C'est à travers l'analyse de ce **"dialogue triangulaire"**, maître-élèves-imagiciel, que pourra apparaître le caractère spécifique de cette expérience mathématique que l'imagiciel rend possible. C'est dans ce dialogue que sera pris en compte la relation particulière, que nous avons évoquée, entre l'objet mathématique et ses représentations. C'est également là que se jouera la question de la preuve (critères, statut, fonction) et la notion de la vérité mathématique, à travers la problématique de l'adhésion inter-individuelle (16).

Comme souvent en didactique, la réflexion ouvre des territoires à explorer plutôt qu'elle ne clôt des jardins où se reposer. Au moins, à l'issue de ces quelques pages, avons-nous les moyens de rendre l'exploration plus fructueuse, l'aventure moins aventureuse.

Françoise MONNET
Yves PAQUELIER
Équipe "Imagiciels" du CREEM,
CNAM, Paris

BIBLIOGRAPHIE

ADDA J. *Travaux sur les difficultés inhérentes aux mathématiques et sur les phénomènes d'incompréhension, causes et manifestations.* Thèse de doctorat d'état. Université Paris VII.1976.

ARTIGUE M. "L'évolution du rôle de l'image en mathématiques liée à l'utilisation de l'outil informatique" in *Place et rôle de l'image dans l'enseignement. Coordinations des ressources informatiques pour la classe.* Paris. CNAM. 1987. Publication interne.

BROUSSEAU G. *Théorisation des phénomènes d'enseignements des mathématiques.* Thèse d'état. Université de Bordeaux I. 1985.

CHASTENET DE GERY J, HOCQUENGHEM S. "Les micro-ordinateurs à possibilités graphiques dans l'enseignement des mathématiques" in *Communications au VIIème colloque franco-soviétique sur l'enseignement programmé de Tbilissi* (publié en russe à Moscou) 1980.

CHASTENET DE GERY J, HOCQUENGHEM S. "Collective uses of micro computer with graphics to illustrate the mathematics lesson" in *Communications au WCCE 1981 de Lausanne* publié in *Computers in education.* North-Holland. 1981.

CREEM. "Imagiciels pour la classe de seconde". *Bulletin de l'APMEP n°371.*1989.

CREEM. *Mathématiques avec images logicielles en classe de seconde.* Paris. Hachette.1991a.

CREEM. *Utiliser des imagiciels en classe de seconde.* CRDP Poitiers. 1991b.

D'HALLUIN C, POISSON D. "Le choc des nouvelles images : des modifications spécifiques induites par les nouvelles images dans l'enseignement des mathématiques" in *Place et rôle de l'image dans l'enseignement. Coordinations des ressources informatiques pour la classe.* Paris. CNAM. 1987. Publication interne.

(16) Sur cette question de l'adhésion, et notamment sur le triple registre d'adhésion (rituel, vérité, signification) qui fait écho à la classification des rôles des imagiciels, on pourra consulter Paquelier 1991.

DELCOURT J. "Réflexions sur les choix et les techniques de reproduction d'images mathématiques par ordinateur" in *Place et rôle de l'image dans l'enseignement. Coordinations des ressources informatiques pour la classe*. Paris. CNAM. 1987. Publication interne.

DROUIN A.M. "Des images et des sciences" in *Communiquer les sciences ASTER n°4*. INRP. 1987.

FLORES F, WINOGRAD T. *L'intelligence artificielle en question*. Paris. PUF.1989.

HOCQUENGHEM S. "Enseignement des mathématiques illustré par ordinateur : quelques exemples". *Education et informatique n°14*. 1983.

HOCQUENGHEM S. "Imagiciels". *Dossier de la revue de l'EPI n°4*. 1984.

HOCQUENGHEM S. "L'ergonomie des logiciels d'enseignement" in *Problèmes posés par l'introduction de l'ordinateur dans la classe. Coordinations des ressources informatiques pour la classe*. Paris. CNAM. 1987. Publication interne.

JACOBI D. "Des images pour apprendre la science" in *"La formation scientifique des adultes" Education permanente n°90*. Centre National des Lettres. 1987.

PAQUELIER Y. *Interaction et rationalité : une étude du rôle de l'argumentation dans l'enseignement des mathématiques*. Thèse de doctorat. Université Paris VII.1991 (à paraître).

ROGALSKI J. "Les représentations graphiques dans l'enseignement" in *Contributions à la seconde école d'été de didactique des mathématiques*. Irem d'Orléans. 1982.

ROGALSKI J. "Représentations graphiques dans l'enseignement : concepts et méthodes d'analyse appliqués au graphe de fonctions". in Giordan A et Martinand JL (Ed). *Signes et discours dans l'éducation et la vulgarisation scientifique. Sixièmes journées internationales sur l'éducation scientifique*. Paris. UER de didactique des disciplines de Paris VII. 1984.

OUVRAGES COLLECTIFS TRAITANT DES IMAGICIELS :

- *"Imagiciels : enseignement des mathématiques illustré par ordinateur"*. *Rencontres pédagogiques n°1* . INRP. 1983.
- *Colloque inter-Irem de géométrie* . Irem de Lille. 1986.
- *Du tableau noir vers l'ordinateur graphique*. CNAM 1987.

TOUS LES IMAGICIELS cités dans cet article sont :

- soit publiés dans CREEM 1991a et 1991b (pour la classe de seconde),
- soit en cours d'écriture et d'expérimentation (pour les classes de première et terminale).