Penser la transposition didactique de questions génératrices pour initier des parcours d'étude et de recherche en mathématiques

Un exemple en algèbre élémentaire

Yves Matheron

Correspondant IFE pour le LéA Réseau Collège Marseilleveyre

Le 24 mai 2016

Deux assertions…

- Enseigner la résolution de problèmes généraux ne conduit pas vers des compétences ou des connaissances mathématiques (Sweller & al., 2011).
- Dans le programme standard de tels contextes peuvent être utilisés comme des « habillages » (*cover stories*) pour motiver un sujet, on irait ensuite vers de « vraies mathématiques » organisées traditionnellement. Mais dans ce cas, les solutions aux problèmes en contexte constituent la majeure partie des mathématiques étudiées. Autrement dit, les mathématiques apparaissent souvent dans un contexte particulier, et leurs caractéristiques sont élaborées dans ce contexte ; leur formalisation plus large et la décontextualisation ne sont pas prises en compte (Schoenfeld, 1994).

Un exemple venu d'ailleurs, quoique…

Habilidades específicas

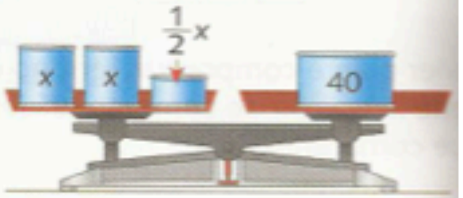
1. Identificar la diferencia entre una expresión algebraica y una ecuación.
2. Comprobar si un número dado es solución de una ecuación.
3. Reducir una ecuación a otra que es equivalente a ella.
4. Plantear y resolver problemas en contextos reales, utilizando ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Recuerde

– Las letras en una expresión representan valores desconocidos. Se denominan **variables**.
– Los signos de operación son +, –, ·, ÷, $\sqrt{\ }$ y potencias indicadas con un exponente.
– Los tipos de paréntesis: ( ), [ ] y { }, son signos de agrupación.

Lea la situación problema

¿Cuál es el valor de **x** para que la balanza se mantenga en equilibrio?



Analice

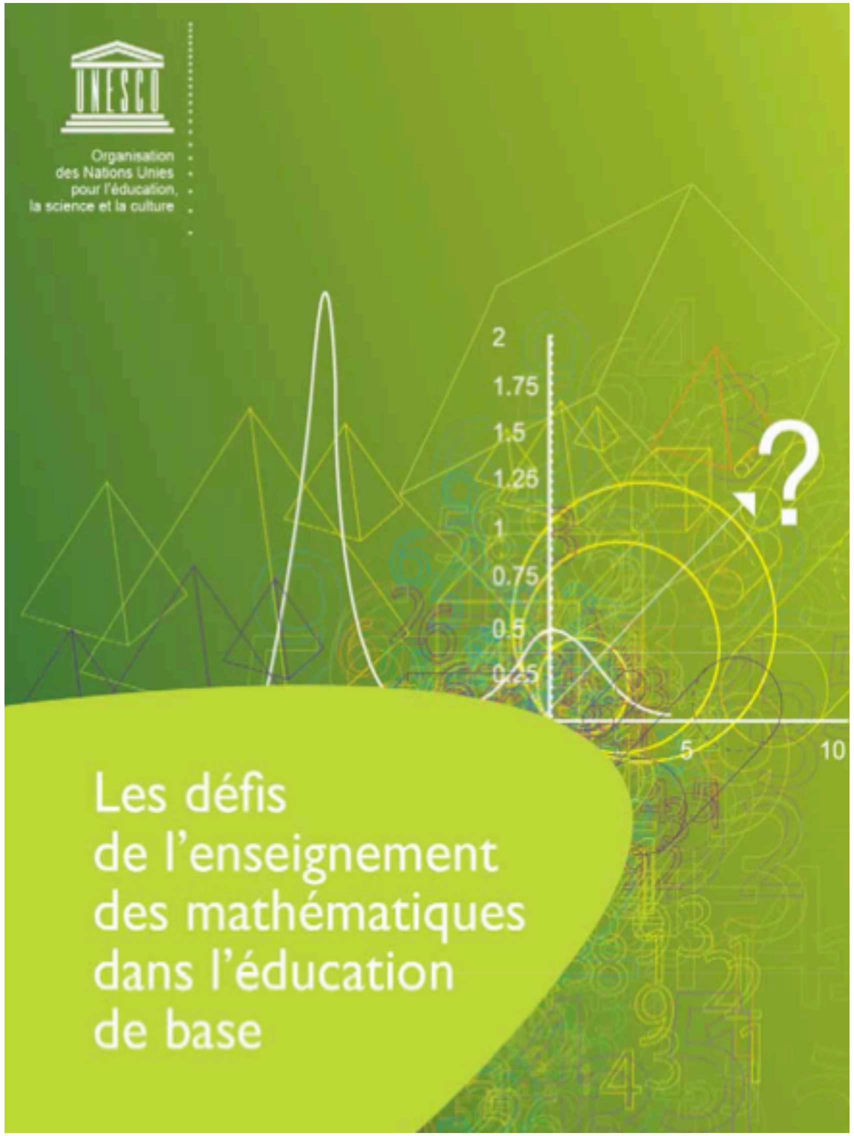
- ¿Cuántas veces aparece **x** en la balanza?
- ¿Podría usted representar la situación mediante una igualdad? ¿Con cuál?

Resuelva

Responda

INSTITUT FRANÇAIS DE L'ÉDUCATION

Un constat partagé car aussi établi par l'UNESCO (2011)



« L'enseignement des mathématiques […] est […] un enseignement ***peu stimulant*** :

- […] centré sur l'apprentissage de ***techniques*** et la ***mémorisation de règles*** dont ***la raison d'être ne s'impose pas aux élèves*** ;
- […] les objets mathématiques sont introduits ***sans que l'on sache à quels besoins ils répondent***, ni comment ils ***s'articulent*** avec ceux préexistants ;
- liens faibles avec le monde réel**, *trop artificiels pour convaincre* »**

De la question au problème (www.cnrtl.fr)

- Etymologie : Empr. au lat. *problema* « problème, question à résoudre », gr. προ’βλημα « ce qu'on a devant soi, obstacle ; tâche, sujet de controverse, problème », dér. de προβα΄λλω « jeter devant ; mettre en avant comme argument ; proposer (une question, une tâche, etc.) »
- Epistémologie : Question à résoudre par des méthodes rationnelles ou scientifiques.
- Mathématiques : Question pouvant être résolue à partir des éléments donnés dans l'énoncé.

La question de la question en épistémologie

« Avant tout, il faut savoir poser des problèmes. Et quoi qu'on dise, dans la vie scientifique, les problèmes ne se posent pas d'eux-mêmes. C'est précisément ce sens du problème qui donne la marque du véritable esprit scientifique. ***Pour un esprit scientifique, toute connaissance est réponse à une question.*** S'il n'y a pas eu de question, il ne peut y avoir connaissance scientifique. Rien ne va de soi. Rien n'est donné. ***Tout est construit.*** »

Gaston Bachelard, *La formation de l'esprit scientifique*, 1938

La question de la question dans l’enseignement

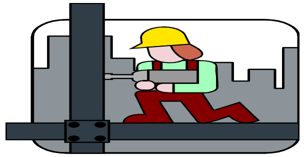
« Si l’on accepte que l’apprentissage est une modification de la connaissance que l’élève doit produire lui-même et que le maître doit seulement provoquer, on est conduit à faire les raisonnements suivants. […] Le travail du professeur consiste donc à proposer à l’élève une situation d’apprentissage afin que ***l’élève produise ses connaissances comme réponse personnelle à une question*** et les fasse fonctionner ou les modifie comme ***réponses aux exigences du milieu*** et non à un désir du maître. »

Guy Brousseau, *Théorie des situations didactiques*, 1998

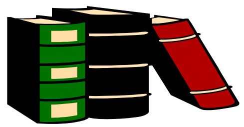
La forme générale prise par la réponse à une question (scientifique ou non)

Question = type de tâches problématique : (comment) construire un immeuble ?

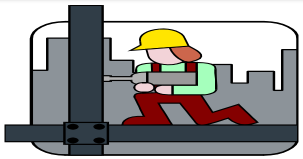
Savoir-faire : tâches d'un type donné & technique



+ Savoir : « discours » (*logos*) tenu sur le savoir-faire permettant de le justifier, le rendre compréhensible, le produire



= Praxéologie

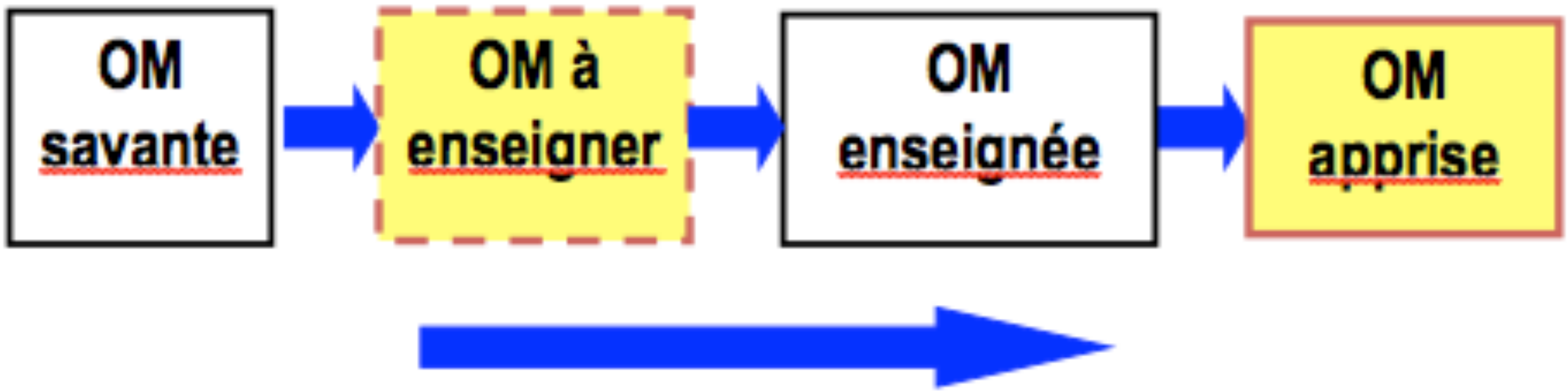


La transposition didactique et ses questions

Une 1re question : quelle vigilance épistémologique au cours du processus de transposition didactique (éloignement OM à enseigner / OM savante) ?

Une 2e question : comment faire vivre chez les élèves l'étude d'une question qui génèrerait l'OM à enseigner (donc transposée) ?

Une 3e question : éloignement OM enseignée / OM à enseigner (formation des professeurs)



Des amplitudes d'OM différentes pour des questions génératrices de types différents

Question du 1er type : « Combien passe-t-il de cercles par 3 points ? » ⇒ Activité d'étude et de recherche (construction d'une organisation mathématique locale : un chapitre)

Question du 2e type : « Combien passe-t-il de cercles par *n* points ? »

Question du 2e type : « Comment mesurer l'épaisseur de divers types de feuilles de papier, notamment en les assemblant ? » ⇒ Parcours d'étude et de recherche (construction d'une organisation mathématique régionale : les fractions et leurs opérations)

Qui répond à la question ? ⇒ deux formes d'organisations didactiques

1re forme : le professeur donne la réponse ⇒ cours magistral & activités des manuels ; ce qui est la forme standard de l'enseignement (enseignant = celui qui montre ⇒ ostension) ***Où est passée la question ?***

2e forme : des équipes d'élèves sous la direction du professeur ⇒ enseignement par adaptation ou par direction d'étude.

Dévolution aux élèves de la question et des sous-questions qui apparaissent au fil de l'étude par la recherche. Partage des responsabilités entre P et E.

Avant l'algèbre (« *Arithmétique* » *Jacques Peletier du Mans, 1554)*

INSTITUT FRANÇAIS DE L'ÉDUCATION

Exemple : J'ai mis certaine somme d'Ecus en Banque pour en avoir par chaque an 6 pour 100 : Au bout de 10 ans m'ont été baillés 500 Ecus pour tout : Quelle était la somme principale ? […]

Feignons un Nombre à plaisir et par icelui faisons notre discours, tout ainsi que si c'était la somme principale que nous cherchons. Comme par exemple, mettons cas que ce soit 200 Ecus que j'avais premièrement baillés : donc ils m'ont valu en 10 ans 120 Ecus à raison de 6 pour 100 : Or 120 joints avec 200 ne font que 320 Ecus : Mais il en fallait 500. Voilà comment j'ai trois termes pour la Règle de Trois : l'un qui contiendra la question, qui est 500, et les deux autres que j'ai formés artificiellement, qui sont 200 et 320 : de sorte que 320 doit avoir telle proportion à 200, comme 500 a au terme que je cherche : savoir est, à la vraie somme principale. J'ai donc recours à la Règle de Trois en cette sorte. Si 320 Ecus provient de 200, de combien provient 500 ? Multipliez 500 par 200, ce font 100000, lesquels divisés par 320 font 312 ½, qui est la somme que j'avais baillée.

INSTITUT FRANÇAIS DE L'ÉDUCATION

Quelle(s) raison(s) d'être pour l'algèbre ? A quelle(s) question(s) ou problème(s) répond l'algèbre ? (Clairaut, 1746)

ÉLÉMENS D'ALGEBRE.

PREMIERE PARTIE.

De la Méthode Algébrique d'exprimer les Problêmes par des Equations, &c. de la résolution des Equations du premier degré.

PARMI les différens Problêmes dont les premiers Mathématiciens qui ont eu le nom d'Algébristes se sont occupés, je choisis celui-ci, comme un des plus propres à faire voir comment ils sont parvenus à former la Science qu'on nomme Algebre ou Analyse.

I.

Exemple d'un Problême semblable à ceux que les premiers Algébristes ont pû se proposer.

Partager une somme, par exemple, 890 ℔ à trois personnes, ensorte que la premiere ait 180 ℔ de plus que la seconde, & la seconde 115 ℔ de plus que la troisieme.

Voici d'abord comme j'imagine qu'aura raisonné un homme, qui, sans aucune teinture de l'Algebre, sera parvenu à résoudre ce Problême.

Solution de ce Problême telle qu'on la pourroit trouver sans Algebre.

Il est évident que si on connoissoit une des trois parts, on connoîtroit aussi-tôt les deux autres; supposons, par exemple, qu'on connoisse la troisieme qui est la plus petite, il faudra y ajoûter 115 ℔, & l'on au a la valeur de la seconde; ensuite pour avoir la premiere, il faudra ajouter 180 ℔ à cette seconde, ce qui revient au même que si on ajoûtoit 180 ℔ plus 115 ℔ ou 295 ℔ à la troisieme.

Quelle que soit la troisieme part, nous sçavons donc que cette part, plus elle-même avec 115 ℔, plus encore elle-même avec 295 ℔ doit faire une somme égale à 890 ℔.

De-là, il suit que le triple de la plus petite part, plus 115 ℔ plus 295 ℔ ou en une fois plus 410 ℔ est égal à 890 ℔.

Or, si le triple de la part qu'on cherche plus 410 ℔ est égal à 890 ℔, il faut donc que ce triple de la part qu'on cherche soit plus petit que 890 ℔ de 410 ℔. Donc ce triple de la plus petite part est égal à 480 ℔. Donc la plus petite part est égale à 160 ℔.

La seconde sera par conséquent de 275 ℔ & la premiere ou la plus grande de 455 ℔.

C'est vrai-semblablement ainsi que les premiers Algébristes ont raisonné quand ils se sont proposés de pareilles questions, sans doute qu'à mesure qu'ils avançoient vers la solution d'une question, ils chargeoient leur mémoire de tous les raisonnemens qui les avoient conduits au point où ils en étoient, & lorsque les questions n'étoient pas plus compliquées que la précédente, il n'y avoit pas de quoi se rebuter; mais dès que leurs recherches ont offert plus d'idées à retenir, il a fallu qu'ils cherchassent une maniere plus courte de s'exprimer, qu'ils eussent quelques signes simples, avec lesquels quelqu'avancés qu'ils fussent dans la solution d'un Problême, ils pussent voir d'un coup d'œil ce qu'ils avoient fait & ce qu'il leur restoit à faire. Or, l'espece de langage particulier qu'ils ont imaginé pour cela, c'est l'Algebre.

II.

Méthode Algébrique d'exprimer le Problême précédent.

Pour mieux donner les principes de cette Science, nous allons reprendre la même question, nous écrirons en langage ordinaire les raisonnemens que l'Algébriste fait pour résoudre son Problême & en caracteres Algébriques, ce qui lui suffit d'écrire pour aider sa mémoire.

La plus petite ou la troisieme part, quelle qu'elle soit, je l'exprime par une seule lettre qui sera, par exemple x

La seconde sera par conséquent x plus 115, ce que j'écris ainsi . . . . $x + 115$, choisissant le signe + qu'on prononce *plus* pour désigner l'Addition des deux quantités entre lesquelles on le place.

Le signe + indique l'addition.

ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

Réponse épistémologique et questions transpositives

- ***Algèbre élémentaire*** = science des calculs sur les programmes de calcul qu'elle modélise

. ***Questions :*** Peut-on établir un lien entre entre réponses mathématiques et épistémologiques d'une part et transposition didactique du programme, connaissances antérieures des élèves d'autre part ? Est-il possible de faire vivre par les élèves l'algèbre comme modélisation de problèmes arithmétiques afin que cela ait du sens pour eux ? Et si oui, à partir de quelle(s) question(s) ?

Nécessité de modéliser des programmes de calcul : un exemple (1)

Dénombrer.1.

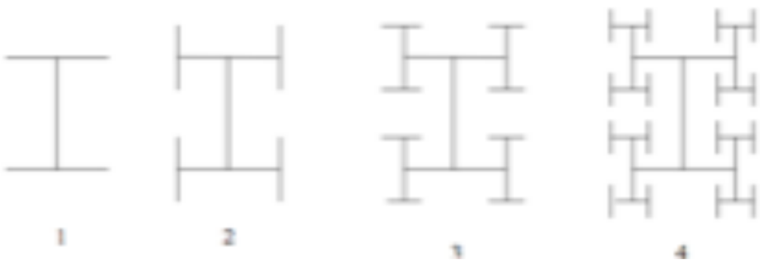
Voici quatre problèmes d'une même catégorie : on y demande de dénombrer des objets.

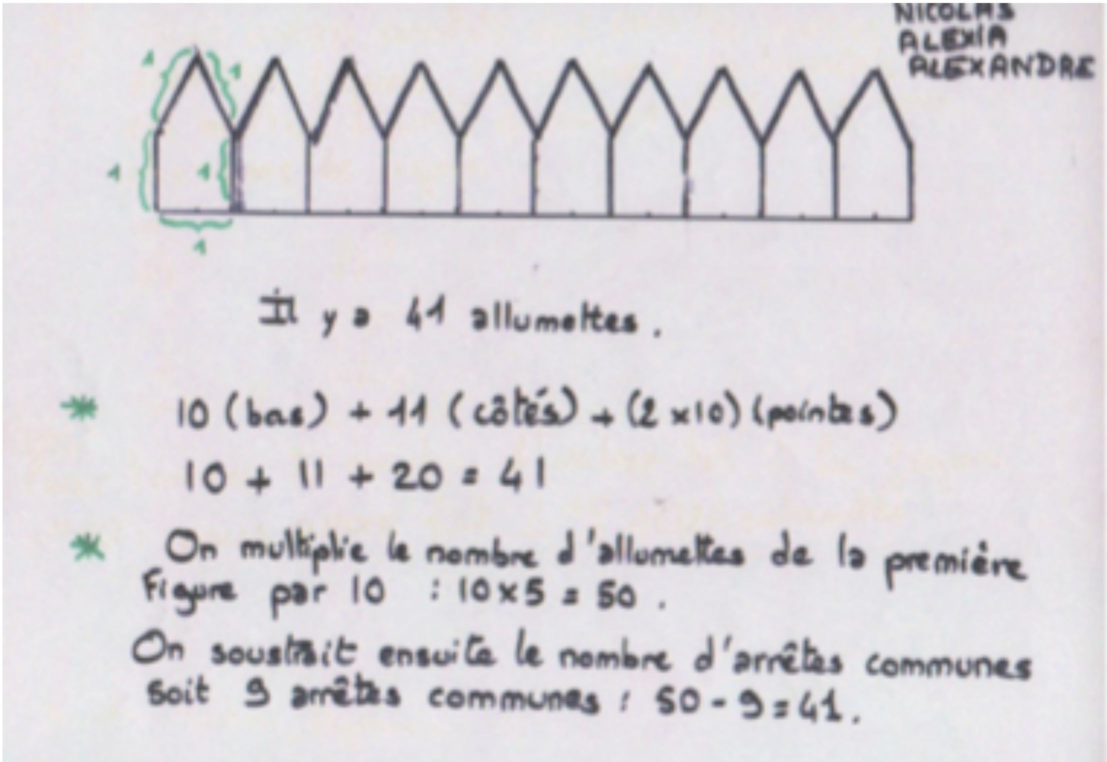
1. Les assemblages suivants sont constitués d'allumettes. Combien y aura-t-il d'allumettes dans l'assemblage n° 10 ?

2. Les assemblages suivants sont eux aussi constitués d'allumettes. Combien y aura-t-il d'allumettes dans l'assemblage n° 10 ?

3. Déterminez le nombre d'étoiles contenues dans la figure n°20.

4. Observez bien la manière dont chacun des motifs suivants a été constitué : chaque extrémité du motif précédent donne naissance à un segment se terminant par deux nouvelles extrémités. Dans ces conditions, déterminez le nombre d'extrémités du motif n°10.Par exemple, dans le premier motif, on compte 4 extrémités.



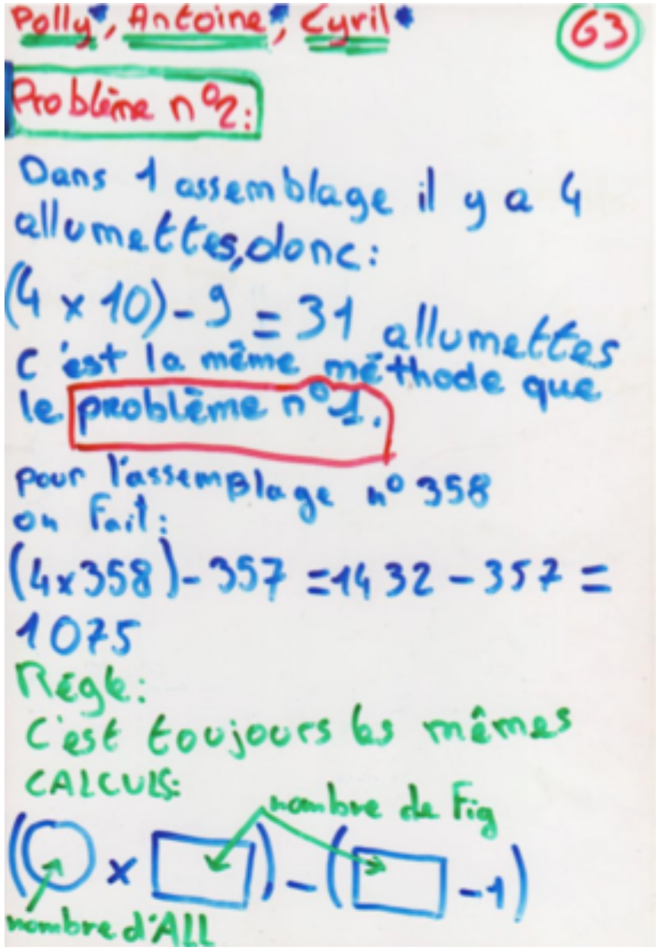

NICOLAS
ALEXIA
ALEXANDRE

Il y a 41 allumettes.

* 10 (bas) + 11 (côtés) + (2 × 10) (pointes)
10 + 11 + 20 = 41

* On multiplie le nombre d'allumettes de la première figure par 10 : 10 × 5 = 50.
On soustrait ensuite le nombre d'arrêtes communes soit 9 arrêtes communes : 50 − 9 = 41.

Nécessité de modéliser des programmes de calcul : un exemple (2)


Polly, Antoine, Cyril — 63

Problème n°2 :

Dans 1 assemblage il y a 4 allumettes, donc :

$(4 \times 10) - 9 = 31$ allumettes

c'est la même méthode que le problème n°1.

pour l'assemblage n° 358 on fait :

$(4 \times 358) - 357 = 1432 - 357 = 1075$

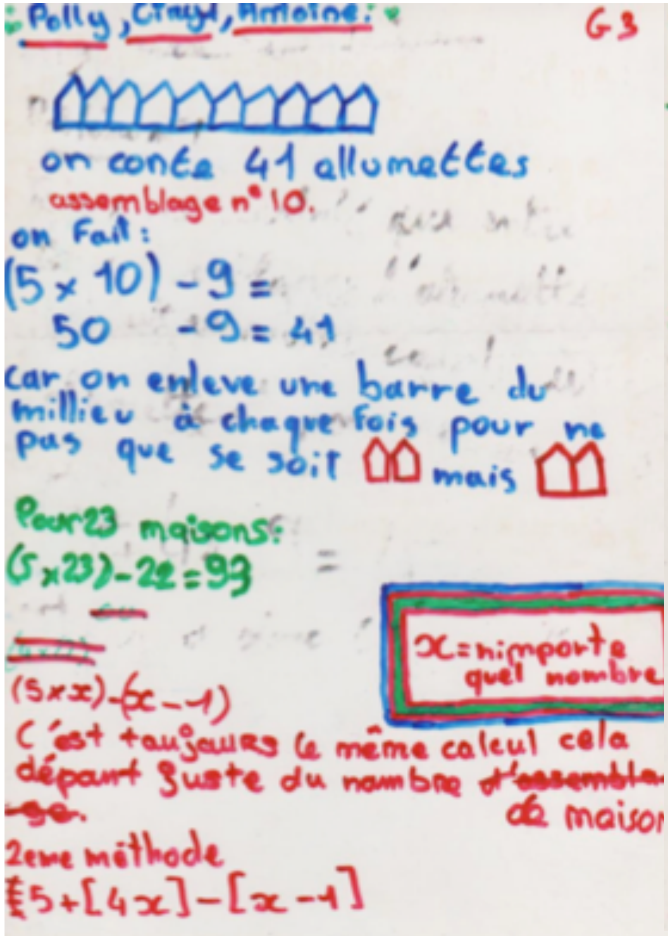
Règle :

C'est toujours les mêmes calculs :

$(\bigcirc \times \square) - (\square - 1)$

nombre de Fig

nombre d'All


Polly, Cindy, Antoine — G3

on conte 41 allumettes assemblage n°10.

on fait :

$(5 \times 10) - 9 =$

$50 - 9 = 41$

car on enlève une barre du millieu à chaque fois pour ne pas que se soit mais

Pour 23 maisons :

$(5 \times 23) - 22 = 93$

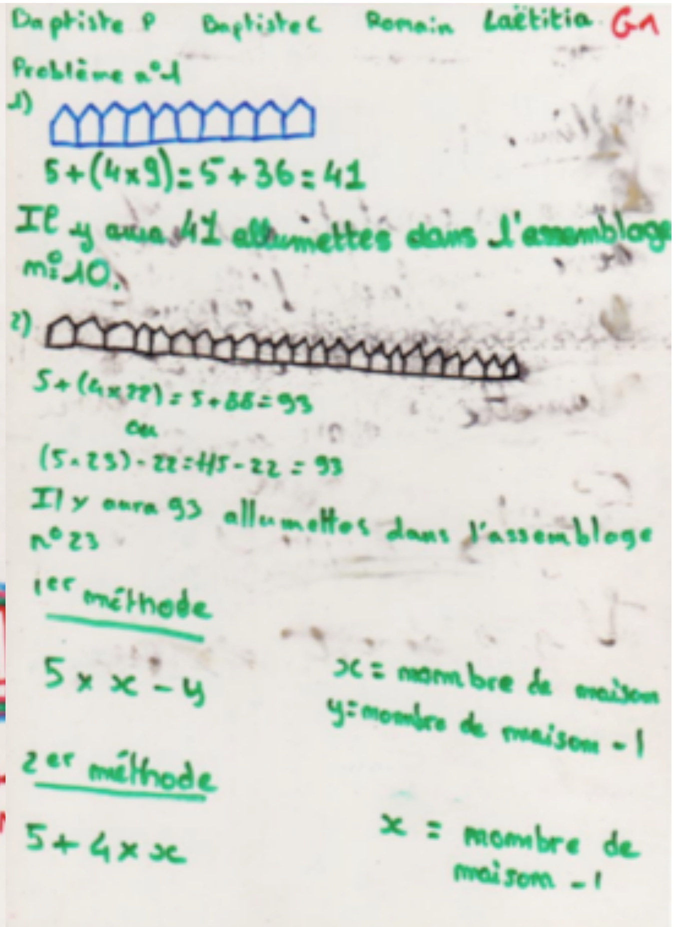
x = n'importe quel nombre

$(5 \times x) - (x - 1)$

C'est toujours le même calcul cela dépent juste du nombre ~~d'assemblage~~ de maison

2eme méthode

$5 + [4x] - [x - 1]$


Baptiste P, Baptiste C, Romain, Laëtitia — GA

Problème n°1

1) $5 + (4 \times 9) = 5 + 36 = 41$

Il y aura 41 allumettes dans l'assemblage n°10.

2) $5 + (4 \times 22) = 5 + 88 = 93$

ou

$(5 \times 23) - 22 = 115 - 22 = 93$

Il y aura 93 allumettes dans l'assemblage n°23

1er méthode

$5 \times x - y$

x = nombre de maison

y = nombre de maison − 1

2er méthode

$5 + 4 \times x$

x = nombre de maison − 1

Continuer l'étude : un enseignement par cycle… et au-delà !

- Comment savoir si 2 PC sont « équivalents » ?

$\Longrightarrow$ Nécessité de la forme canonique, développement et réduction des polynômes : $(5 \times x) - (x - 1) \equiv 5 + [4 \times (x - 1)]$?

- Si 2 PC ne sont pas équivalents, existe-t-il des valeurs pour lesquelles ils donnent le même résultat, ou bien pour lesquelles l'un est supérieur à l'autre ?

$\Longrightarrow$ Résolution d'équations, d'inéquations, factorisation, tableur

- Comment varient 2 PC l'un par rapport à l'autre ?

$\Longrightarrow$ Fonctions, tableaux de valeurs, graphiques

Résoudre des équations en 4e… sans recourir à la balance !

Nombres choisis par Alice et Bertrand	Résultats obtenus par Alice	Résultats obtenus par Bertrand	Ecart entre les résultats obtenus par Alice et Bertrand
0	5	9	-4
0,1	6,1	9,4	-3,3
0,2	7,2	9,8	-2,6
0,3	8,3	10,2	-1,9
0,4	9,4	10,6	-1,2
0,5	10,5	11	-0,5
0,6	11,6	11,4	0,2
0,7	12,7	11,8	0,9
0,8	13,8	12,2	1,6
0,9	14,9	12,6	2,3
1	16	13	3

$A(x) = 11x + 5$

$B(x) = 4x + 9$

$A(x) = B(x)$

$\Leftrightarrow A(x) - B(x) = 0$

(définition de l'égalité)

$\Leftrightarrow 11x + 5 - (4x + 9) = 0$

$\Leftrightarrow 7x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 7x = 4$

(définition de l'égalité)

$\Leftrightarrow x = 4/7$

(définition du quotient)

$$a = b \Leftrightarrow a - b = 0 \Leftrightarrow (a + c) - (b + c) = 0 \Leftrightarrow a + c = b + c$$

Des ressources mais…

- http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/documents/

- Il est nécessaire de se former préalablement et en continu pour leur prise en mains car rompre avec « un enseignement ***peu stimulant*** » nécessite un changement pour lequel la seule volonté ne suffit pas :

Documents pour la formation