28.05

**Atelier**

# La recherche de problème en mathématiques : quels problèmes pour quels objectifs ?

- LéA MaPcv
- LéA Ecl@Maths
- LéA Réseau de l'école à l'université - Grenoble et Annecy

# LéA MaPcv

Equipe de circonscription Bagnols-sur-Cèze
IEN, 3 CPC, ERUN

8 Enseignant·es

2 enseignantes - chercheures

7 PE de la circonscription Bagnols-sur Cèze

1 PES Académie de Versailles

## LÉA MATHÉMATISATION DE PROBLÈMES CONCRETS EN VIDÉO (MAPCV)

DEPUIS 2023

**Académie :** Montpellier
**Unités de recherche :** S2HEP, LIRDEF

École Élémentaire

**ACTION :** Mathématisation de Problèmes concrets à partir de vidéos (MaPcv)

**MOTS-CLÉS :** Mathématiques - Problèmes concrets - Mathématisation - Formation - Processus de collaboration

**QUESTION CENTRALE MISE AU TRAVAIL CETTE ANNÉE :**

Les pratiques d'enseignement et de formation à la modélisation, et le rôle des acteurs dans un processus collaboratif.

Site LéA-IFÉ

**SIGNES PARTICULIERS :**

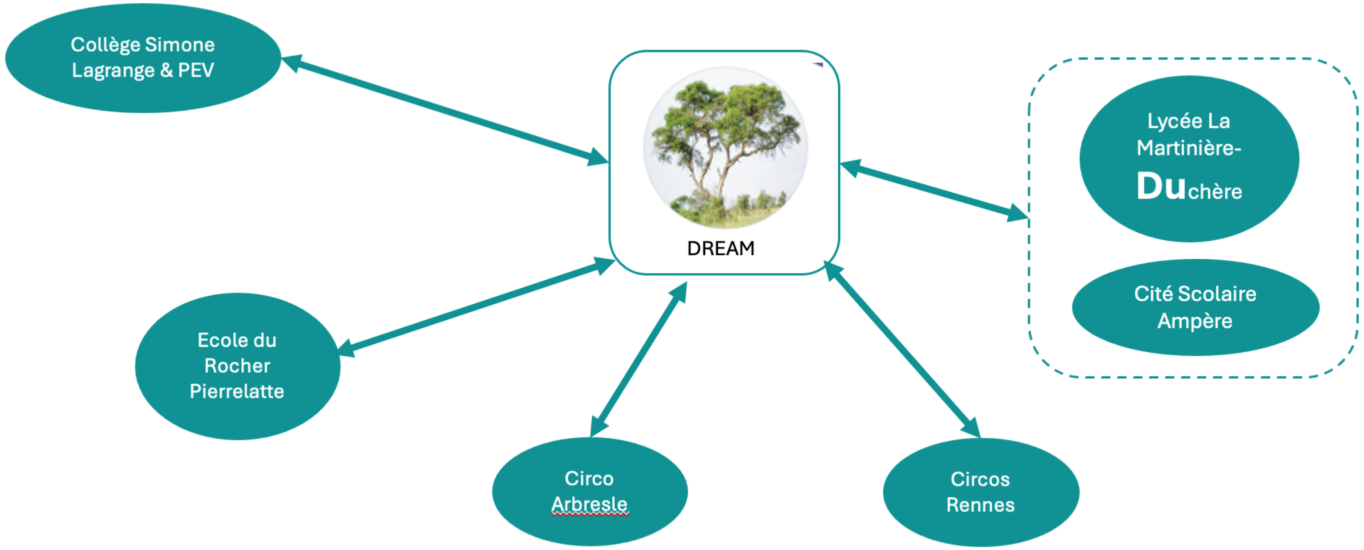
- Problèmes vidéos
- Collaboration enseignants du premier degré, formateurs, chercheurs, équipe de circonscription
- Mathématisation horizontale

Correspondante Recherche : **Sonia YVAIN-PRÉBISKI**
Correspondante LéA : **Christine PRETCEILLE**

-P.30-

# LéA Ecl@Maths

Fonder son enseignement sur la recherche de problèmes






## LÉA ÉCOLE COLLÈGE LYCÉE POUR L'APPRENTISSAGE DES MATHS (ECL@MATHS) DEPUIS 2023

**Académies :** Grenoble, Lyon, Rennes
**Unités de recherche :** S2HEP, UER MS

École Élémentaire
Collège
Lycée

**ACTION :** Démarche de Recherche pour l'Enseignement et l'Apprentissage des Mathématiques

**MOTS-CLÉS :** Mathématiques - Recherche de problèmes - Évaluation - Développement professionnel - Didactique

### QUESTION CENTRALE MISE AU TRAVAIL CETTE ANNÉE :

**Quelle évaluation des compétences mettre en place dans un enseignement fondé sur la recherche de problèmes ? Quelles sont les caractéristiques d'un dispositif d'accompagnement entre pairs avec co-enseignement permettant de conduire un enseignement fondé sur la recherche de problèmes ?**

Site LéA-IFÉ

### SIGNES PARTICULIERS :

- Du cycle 3 au lycée
- Sur 3 académies
- Associé au groupe DREAM de l'IREM de Lyon

LéA ECL@MATHS LYON RENNES GRENOBLE École Collège Lycée @pprentissage des mathématiques

**Correspondante Recherche :** Marie-Line GARDES
**Correspondante LéA :** Miriam DI FRANCIA

# LéA Réseau de l'école à l'université - Grenoble et Annecy

- Beaucoup de personnes impliquées
- De la maternelle à l’université

**Objectifs** :

- Mise en situation de recherche
- Débat scientifique
- Formation à la pratique
- Construction d’outils

# Organisation de l’atelier

**Partie 1 13h45 – 15h10**

- Recherche de 3 problèmes
  - Rectangle de 4 couleurs
  - Le problème qui déchire
  - Les pizzas
- Trois roulements
  - 13h50 – 14h15
  - 14h15 – 14h40
  - 14h40 – 15h05

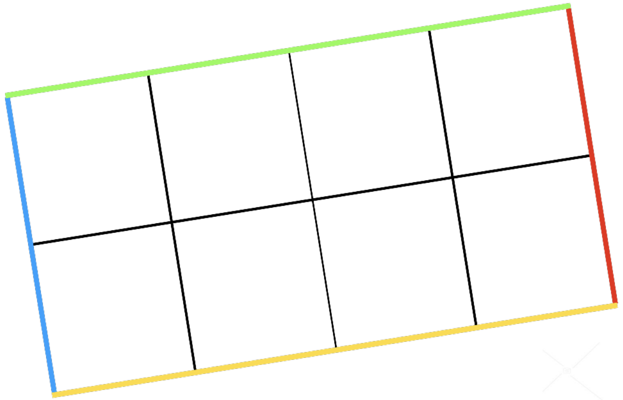
**Partie 2 15h20 – 16h45**

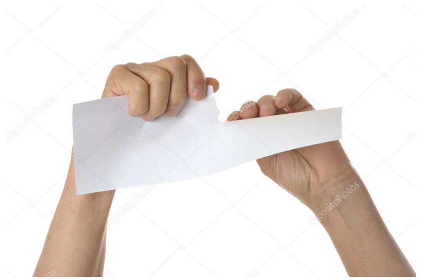
- Réflexions sur les objectifs d’apprentissage des 3 problèmes
- Présentation des 3 LéA
- Discussion finale

# Organisation de l’atelier

**Partie 1 13h45 – 15h10**

- Recherche de 3 problèmes
  - Rectangle de 4 couleurs
  - Le problème qui déchire
  - Les pizzas
- Trois roulements
  - 13h50 – 14h15
  - 14h15 – 14h40
  - 14h40 – 15h05



# Organisation de l'atelier

## Questions

Quels sont, selon vous, les objectifs d'apprentissage visés dans chacun des problèmes ?

Quelles connaissances pourraient être institutionnalisées à l'issue de la recherche de chaque problème ?

**Partie 2 15h20 – 16h45**

- Réflexions sur les objectifs d'apprentissage des 3 problèmes
- Présentation des 3 LéA
- Discussion finale

# LéA MaPcv

# LéA MaPcv

Problème extra-mathématique → Problème accessible par un traitement mathématique

**Mathématisation horizontale**

Treffers (1978), Freudenthal (1991)- RME

- la mathématisation *horizontale* qui « *part du monde de la vie au monde des symboles* »

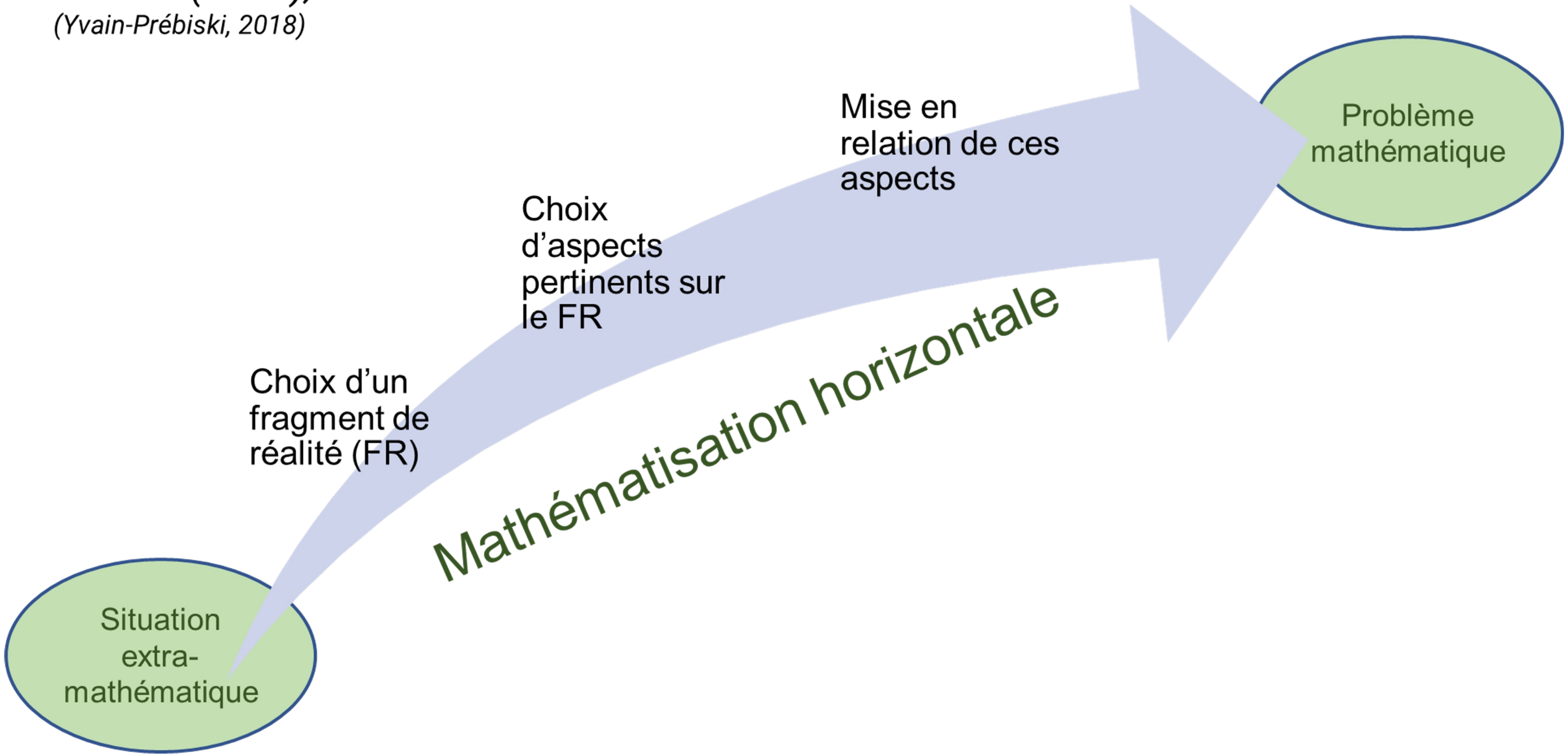
- la mathématisation *verticale* « *qui se déplace à l'intérieur de ce monde des symboles* »

Monde la vie —**MH**→ Monde des symboles **MV**

**MH ↔ MV**

# LéA MaPcv

*Dans le cadre de la Realistic Mathematics Education et en appui sur les travaux d'Israël (1996),* **caractérisation de la MH :**
*(Yvain-Prébiski, 2018)*

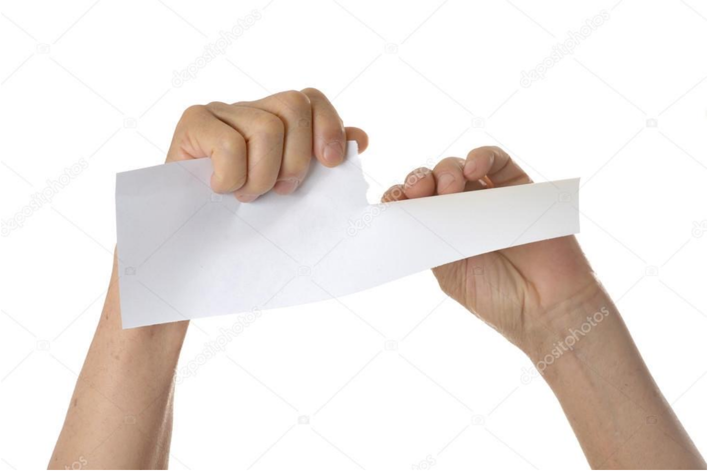


# LéA MaPcv

## Vers une caractérisation de nos problèmes :

- ne pas poser de questions mais  suggérer une question porteuse de l'enjeu de modélisation : "*Modeling problems naturally encourage problem posing as students work collaboratively in model generation*" (Lyn D. English, 2020), "*problem posing is one way to provide mathematically authentic pedagogical contexts for instruction*" (Jinfa Cai & Stephen Hwang, 2020)
- ramener le réel dans la classe avec la forme vidéo
- permettre la prise de donnée instrumentée
- proposer un nombre raisonnable de fragments de réalité sur lesquels on peut se questionner
- garder un contexte « authentique » tout en prenant en compte les connaissances mathématiques disponibles des élèves
- nécessité de faire des hypothèses simplificatrices pour résoudre le problème

# LéA Ecl@Maths



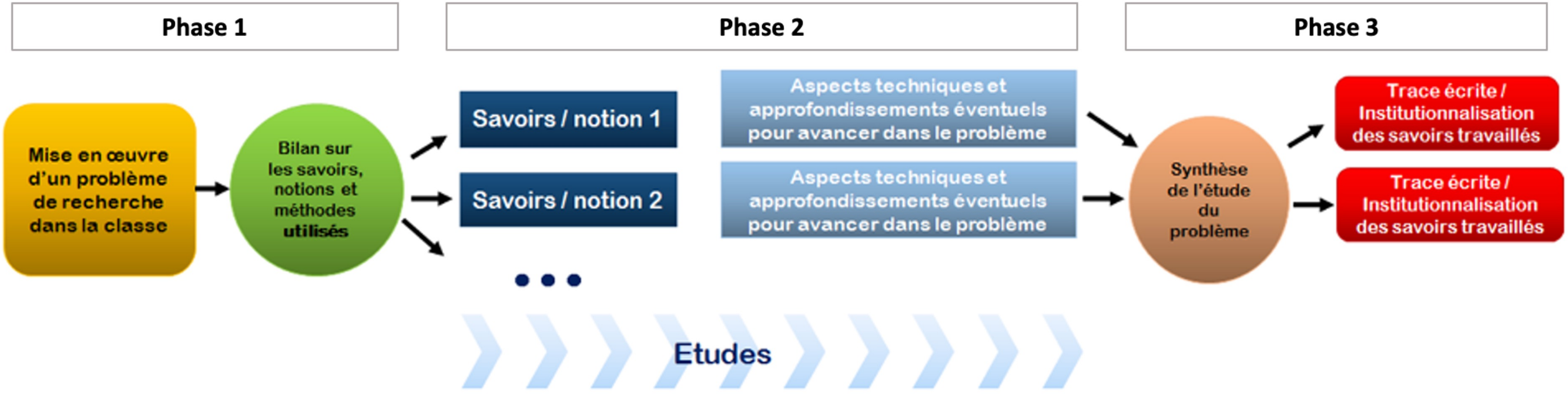
# LéA Ecl@Maths

## Fonder son enseignement sur la recherche de problèmes

Créer une **organisation** qui permette :

- de rendre plus régulière la pratique de recherche de problèmes en classe,
- d’approfondir la recherche d'un problème en classe,
- de traiter les éléments mathématiques du programme à partir des recherches faites par les élèves,
- de relier la progression d’un niveau donné à ces situations didactiques de recherche de problème.

# LéA Ecl@Maths

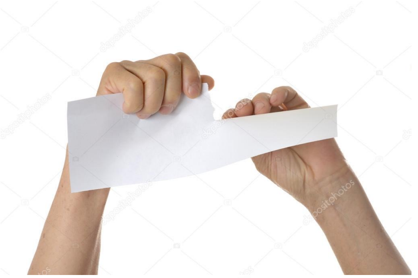



2 à 3h

Plusieurs heures en fonction du problème et du travail des élèves

Moins d'1h

# LéA Ecl@Maths



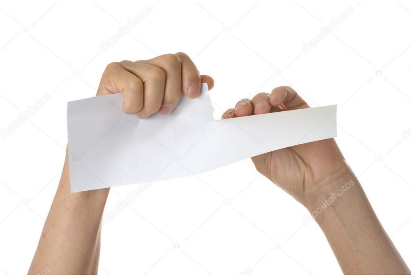
## De quels problèmes parle-t-on ?

[...] *un problème mathématique doit être difficile, mais non pas inabordable, sinon il se rit de nos efforts ; il doit au contraire être un véritable fil conducteur à travers les dédales du labyrinthe vers les vérités cachées, et nous récompenser de nos efforts par la joie que nous procure la découverte de la solution*.

(Ghys, 2010 reprenant les termes de la conférence de Hilbert)

Un problème mathématique se doit d'être **robuste et en même temps doit se laisser aborder, questionner, explorer.**

# LéA Ecl@Maths



## Un problème de recherche, c’est…

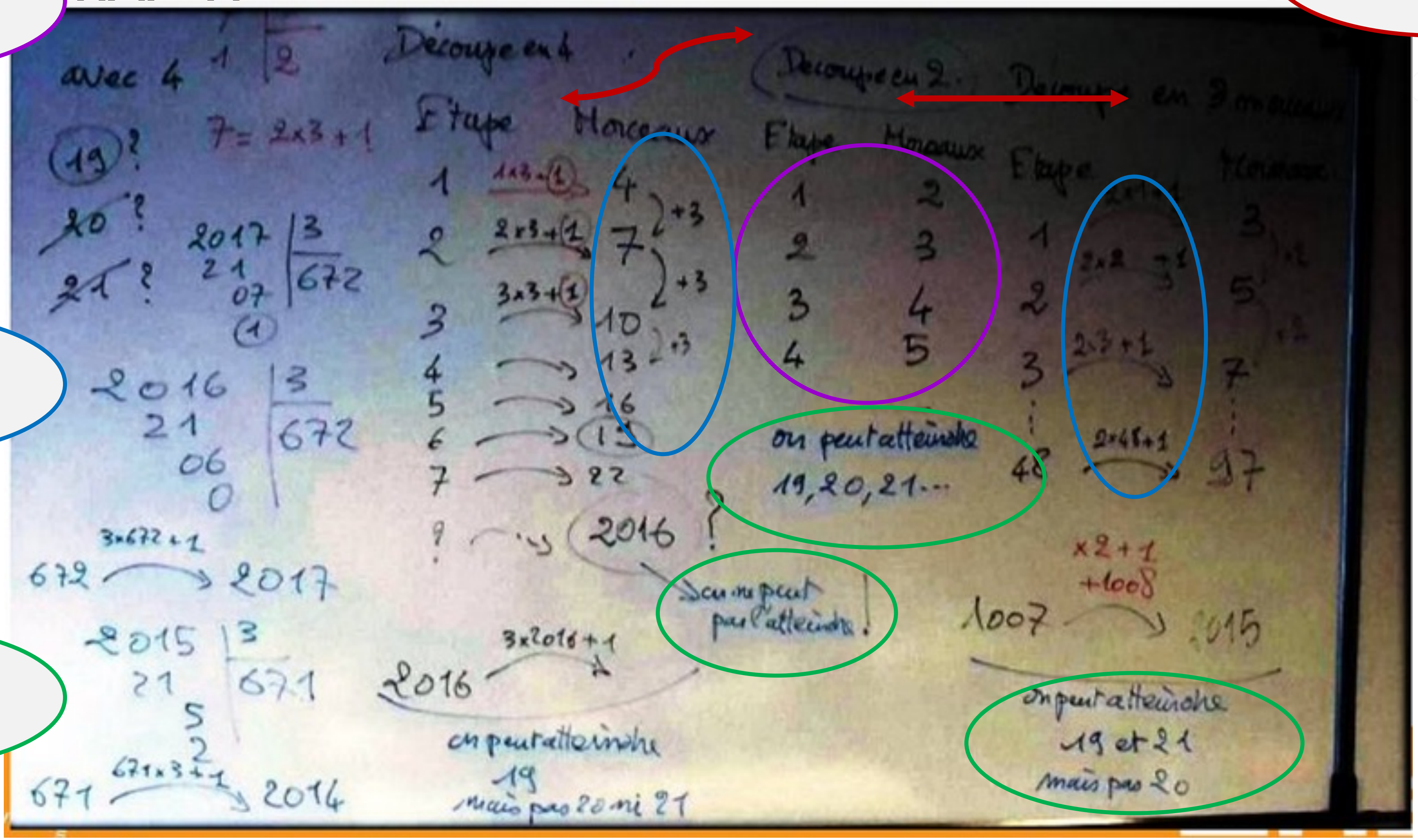
…un problème mathématique avec les caractéristiques suivantes :

- Un énoncé court
- L’énoncé ne donne ni la méthode, ni la solution
- Le problème se trouve dans un domaine conceptuel familier aux élèves
- Le problème permet de mettre en œuvre **une dimension expérimentale**
- La recherche du problème met en jeu **une dialectique entre la mobilisation, l’approfondissement de connaissances et le développement de compétences**

(Gardes, 2013, 2018)

Des expériences

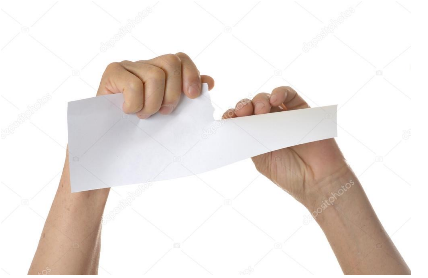
Des allers et retours




Recherche de régularités

Des résultats partiels

# LéA Ecl@Maths



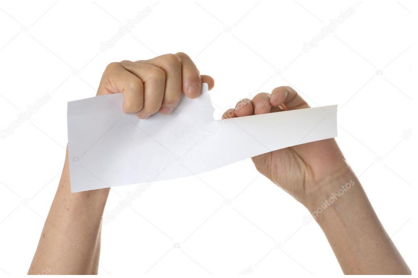
- Multiples et diviseurs des nombres d'usage courant. Critères de divisibilité (2, 3, 4, 5, 9, 10)
- Résoudre des problèmes mettant en jeu les quatre opérations. Sens des opérations.
- Calculs
- Calcul littéral
- Utiliser des outils pour représenter un problème
- Suites
- Équations diophantiennes

⇆

- Chercher
- Raisonner
- Calculer
- Représenter
- Modéliser
- Communiquer

# Le problème qui déchire

**En 5ème** (Lagrange)



- **Notions travaillées**
  - Propriétés des nombres et des opérations
  - Résoudre des problèmes en mettant en jeu les quatre opérations
  - Ecrire une expression littérale
  - Multiples et diviseurs
- **Chercher**
  - S'engager dans une démarche scientifique, observer, questionner, manipuler, expérimenter
  - Chercher des exemples, simplifier ou particulariser une situation, émettre une conjecture
- **Représenter**
  - Utiliser des outils pour représenter un problème : dessins, schémas, tableaux
- **Modéliser**
  - Utiliser le calcul littéral pour modéliser une situation
- **Raisonner**
  - Fonder et défendre ses jugements en s'appuyant sur des résultats établis et sur sa maîtrise de l'argumentation.
  - Mener collectivement une investigation en sachant prendre en compte le point de vue d'autrui
- **Communiquer**
  - Expliquer à l'oral ou à l'écrit sa démarche, son raisonnement
  - Comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange

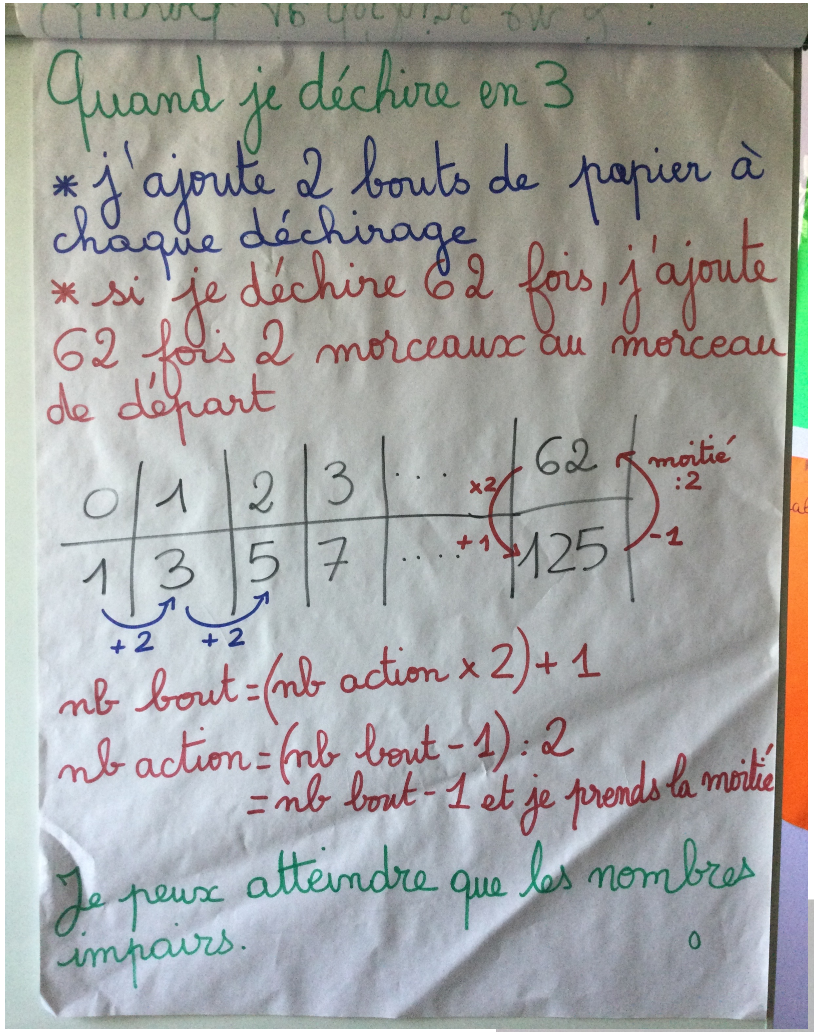
# LéA Ecl@Maths

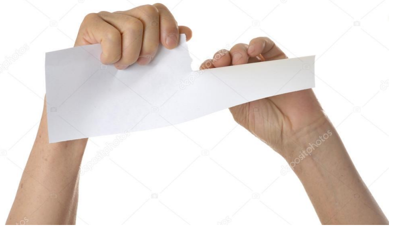
**En CM1** (Pierrelatte)

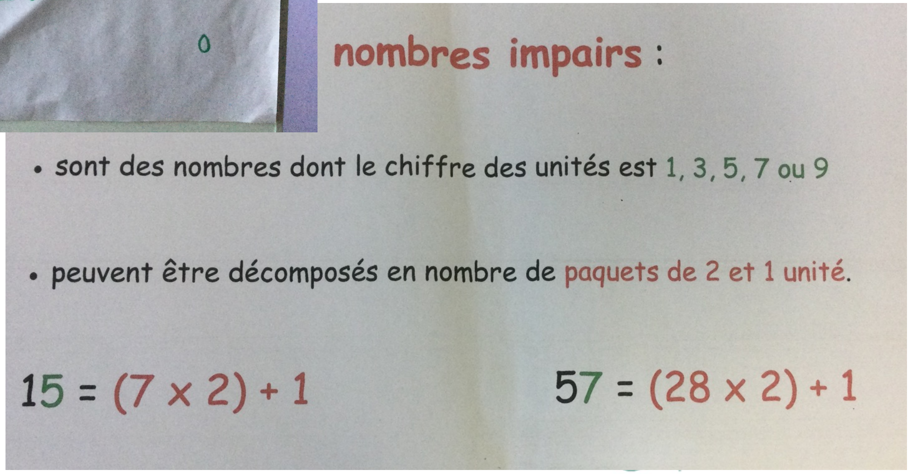
**Objectifs** :

- Développer des stratégies de recherche
- Aborder la compréhension du sens de la division euclidienne

- Chercher, raisonner, calculer, communiquer



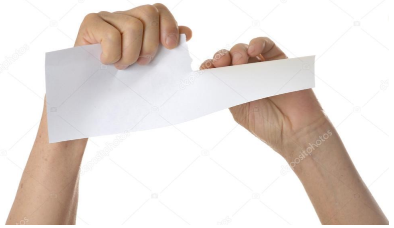



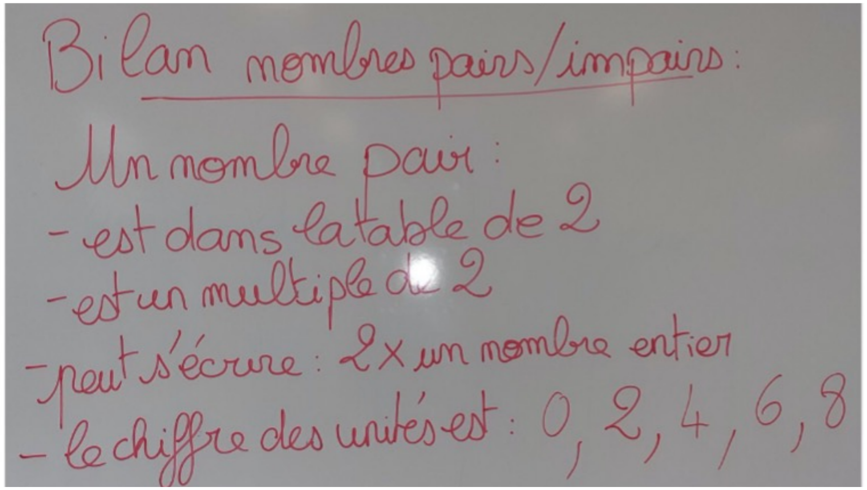

nombres impairs :

- sont des nombres dont le chiffre des unités est 1, 3, 5, 7 ou 9
- peuvent être décomposés en nombre de paquets de 2 et 1 unité.

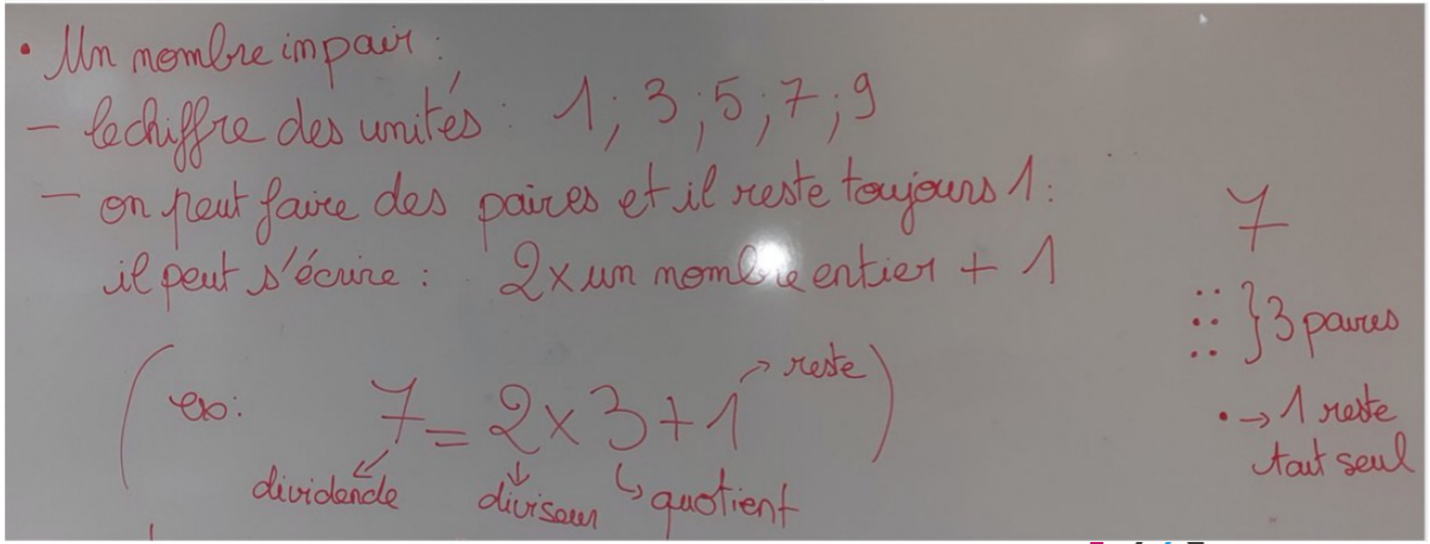
$15 = (7 \times 2) + 1$ $57 = (28 \times 2) + 1$

# LéA Ecl@Maths






## En 6ème (PEV)




## En Seconde

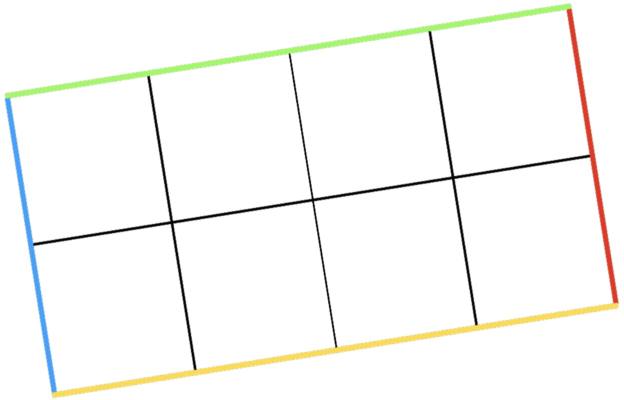
$$\begin{aligned} f(x) = x + 1 &\Leftrightarrow 2016 = x + 1 \\ &\Leftrightarrow x = 2016 - 1 \\ &\Leftrightarrow x = 2015 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) = (m-1)x + 1 &\Leftrightarrow 2016 = 2x + 1 \\ &\Leftrightarrow 2016 - 1 = 2x \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2015}{2} \\ &\Leftrightarrow x = 1007.5 \end{aligned}$$

tous les valeurs possibles de $m$ tel que $\frac{2016-1}{m-1} \in \mathbb{N}$

Ces découpes sont 2, 6, 14, 32, 66, 156, 404, ou 2016 morceaux.

# LéA Réseau de l'école à l'université - Grenoble et Annecy

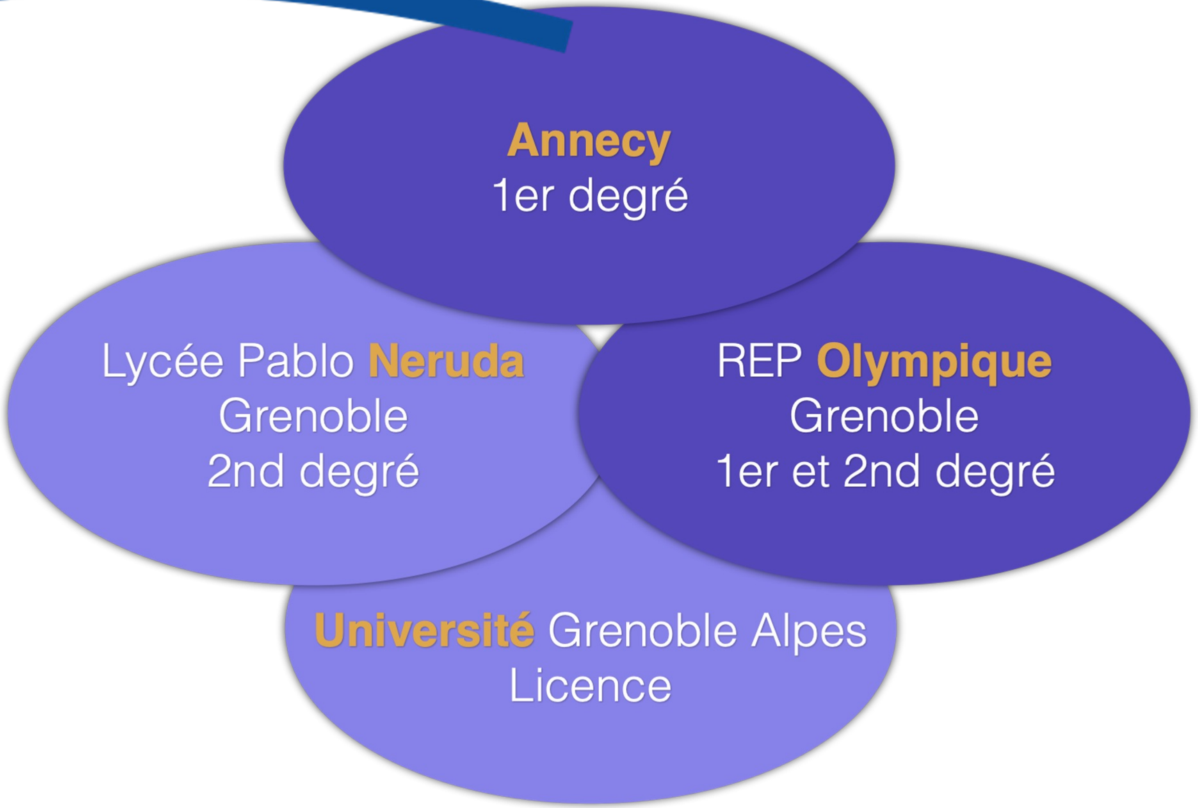


# LéA Réseau de l'école à l'université - Grenoble et Annecy

Evolution du questionnement

Des difficultés des élèves
—> les pratiques des enseignant·e·s

De la mise en œuvre en classe de la résolution de problème
—> la mise en œuvre du chercher-débattre-prouver



## Des résultats

De la mise en œuvre en classe de la résolution de problème
—> la mise en œuvre du chercher-débattre-prouver

Des outils co-construits

- Il est possible de mettre en œuvre en classe, dès le cycle 1, le chercher-débattre-prouver.
- Les effets positifs sur les attitudes des élèves dépassent le cadre des mathématiques.
- Sous réserve de conditions nécessaires portant sur :
  * le choix des problèmes,
  * l'explicitation des apprentissages visés,
  * la pratique du débat scientifique.

## Outil n°1 : outil double

Une liste ordonnée d’apprentissages : des *connaissances d’ordre II* (Sackur et al., 2005) et des *savoirs pratiques et heuristiques* (Castella, 2011)

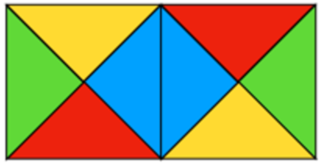
Ex. : savoir que l’observation organisée de multiples cas particuliers, y compris des cas particuliers simples, permet de dégager une généralité (une conjecture de portée générale)
Ex. : le principe du tiers exclu

Une liste ordonnée de problèmes (Grenier et Payan, 2002 ; Da Ronch, Gandit, Gravier, 2020) :

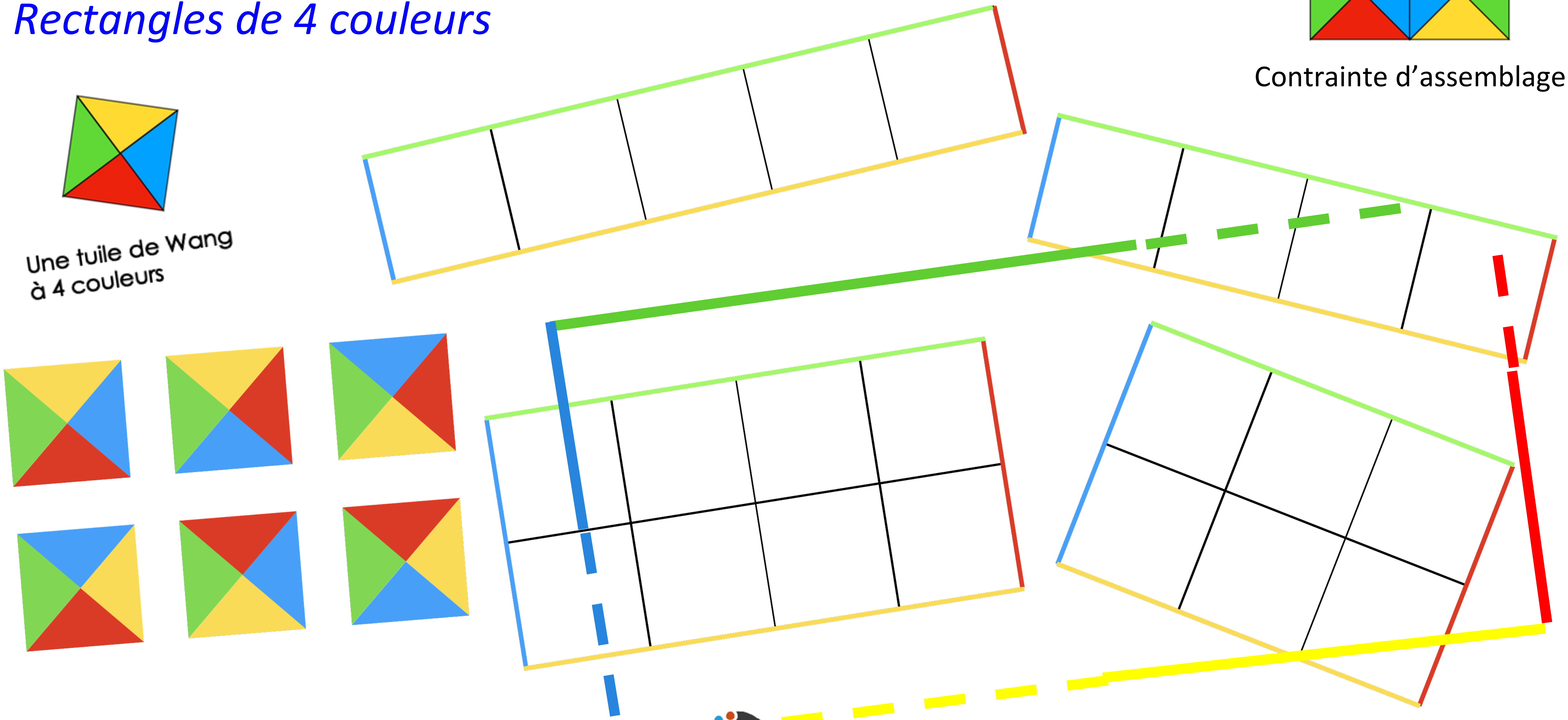
- où ces savoirs et connaissances sont des *outils*,
- qu’il s’agit ensuite d’institutionnaliser en tant qu’*objets* (Douady, 1986)

Ex. : *Rectangles de 4 couleurs*

# Rectangles de 4 couleurs



Contrainte d'assemblage

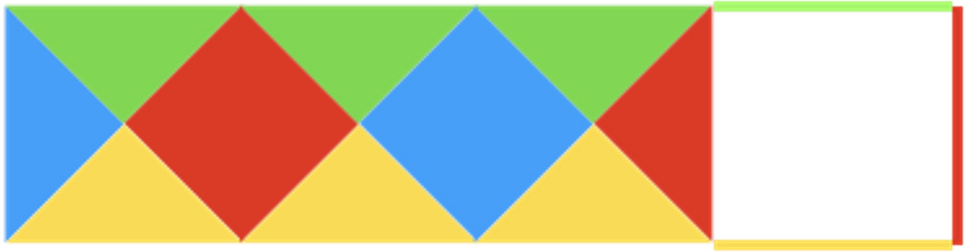


# *Rectangles de 4 couleurs* est un problème de la fin de la progression

## **Les apprentissages**

- Savoir ce qu’on appelle un cas particulier pour un problème donné.
- Savoir que, pour comprendre un problème, on choisit différents cas particuliers et on étudie ces cas particuliers, en commençant par des cas simples.
- Savoir qu’une présentation organisée du raisonnement par disjonction de cas permet d’assurer que tous les cas sont étudiés, sans répétition.
- Savoir que l’observation organisée de multiples cas particuliers différents, y compris des cas particuliers simples, permet de dégager une généralité (une conjecture).
- Savoir qu’on peut formuler une généralité (une conjecture) sous la forme d’une phrase en « si…, alors… ». Ce qui est écrit à la suite du « si » est l’hypothèse, ce qui est écrit à la suite du « alors » est la conclusion.
- Savoir qu’en mathématiques, une conjecture est soit vraie, soit fausse (il n’y a pas d’autre possibilité).
- Savoir que, pour une conjecture donnée (de portée générale), un exemple est un cas particulier pour lequel l’hypothèse et la conclusion sont vraies.
- Savoir que l’exhibition d’un exemple suffit à prouver la possibilité.
- Savoir que si l’on ne trouve pas d’exemple, cela ne suffit pas à prouver une impossibilité.
- Savoir qu'une impossibilité ne peut se prouver que par un raisonnement.

# *Rectangles de 4 couleurs* est un problème de la fin de la progression



Pour paver ce rectangle 1 x 4, il n'y a pas d'autre possibilité pour la 1ère tuile à gauche, puis pour la 2ème tuile à gauche, puis pour la 3ème ; pour recouvrir le 4ème carré, il est nécessaire d'avoir une tuile avec 2 fois la couleur rouge, ce qui est impossible.

- Savoir qu'une impossibilité ne peut se prouver que par un raisonnement.

## *Rectangles de 4 couleurs* est un problème de la fin de la progression

## **Les apprentissages : suite**

- Savoir que plusieurs exemples permettent d'établir une conjecture, dont il reste à prouver qu'elle est vraie.

- Savoir que, pour une conjecture donnée (de portée générale), un contre-exemple est un cas particulier pour lequel l'hypothèse est vraie et la conclusion est fausse.
- Savoir que, pour prouver qu'une conjecture est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple.
- Savoir que, pour prouver qu'une conjecture est vraie, on fait un raisonnement qui prouve que ce qui est affirmé est vrai dans tous les cas possibles, en les examinant tous, ou on fait un raisonnement qui prouve qu'il est impossible qu'elle soit fausse.

# De quel type de problème parlons-nous ?

**(Da Ronch, 2022)**

## Epistémologie

**Critère syntaxique**
* question
* instances
* conditions

**Critère sémantique**
* espace-problème consistant

——> temps long

## Didactique

***Analyse a priori***
* analyse mathématique du problème de départ
* analyse didactique de la situation sous-jacente

**Choix des variables et des conditions**
* certaines variables restent libres
* d'autres ont leur valeur fixée
* formalisme exclu, objets en jeu simples

## Ergonomie

**Support matériel**
* indispensable pour l'étude de cas particuliers
* renforce la motivation à s'engager dans la résolution

Problème transposé, issu d'un problème des mathématiques savantes

# Conclusion

Résolution de problèmes

**Des objectifs d'apprentissage différents**

Processus de modélisation

Processus de recherche

Processus de preuve

**Des connaissances institutionnalisées diverses**

Connaissances notionnelles

Connaissances sur l'activité mathématique (sur le processus de…)

Une épistémologie commune

Une vision des mathématiques partagée

Fin

MERCI !