Progressions de problèmes

Objectif : développer les **actions scientifiques** (Gandit, 2015 ; Chanudet et al., 2017) des élèves dans l'activité de **chercher**, **débattre scientifiquement** (Legrand, 1993) et **prouver**.

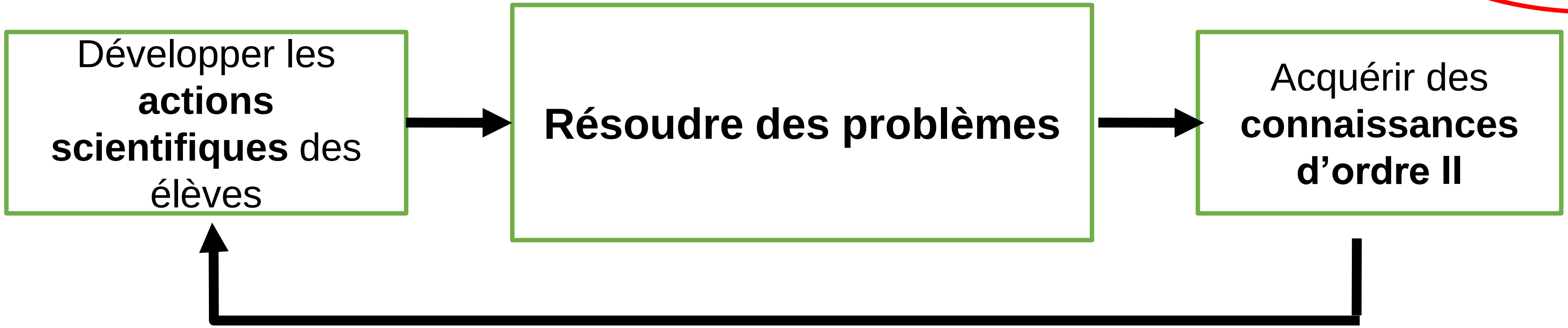
LéA : Réseau de l'école à l'université – Grenoble et Annecy

Actions scientifiques (Gandit, 2017)

- Expérimenter (chercher, prouver)
- Généraliser (chercher, prouver)
- Questionner (inventer)
- Communiquer (débattre scientifiquement, prouver)

Théorie des Situations Didactiques
(Brousseau, 1998)

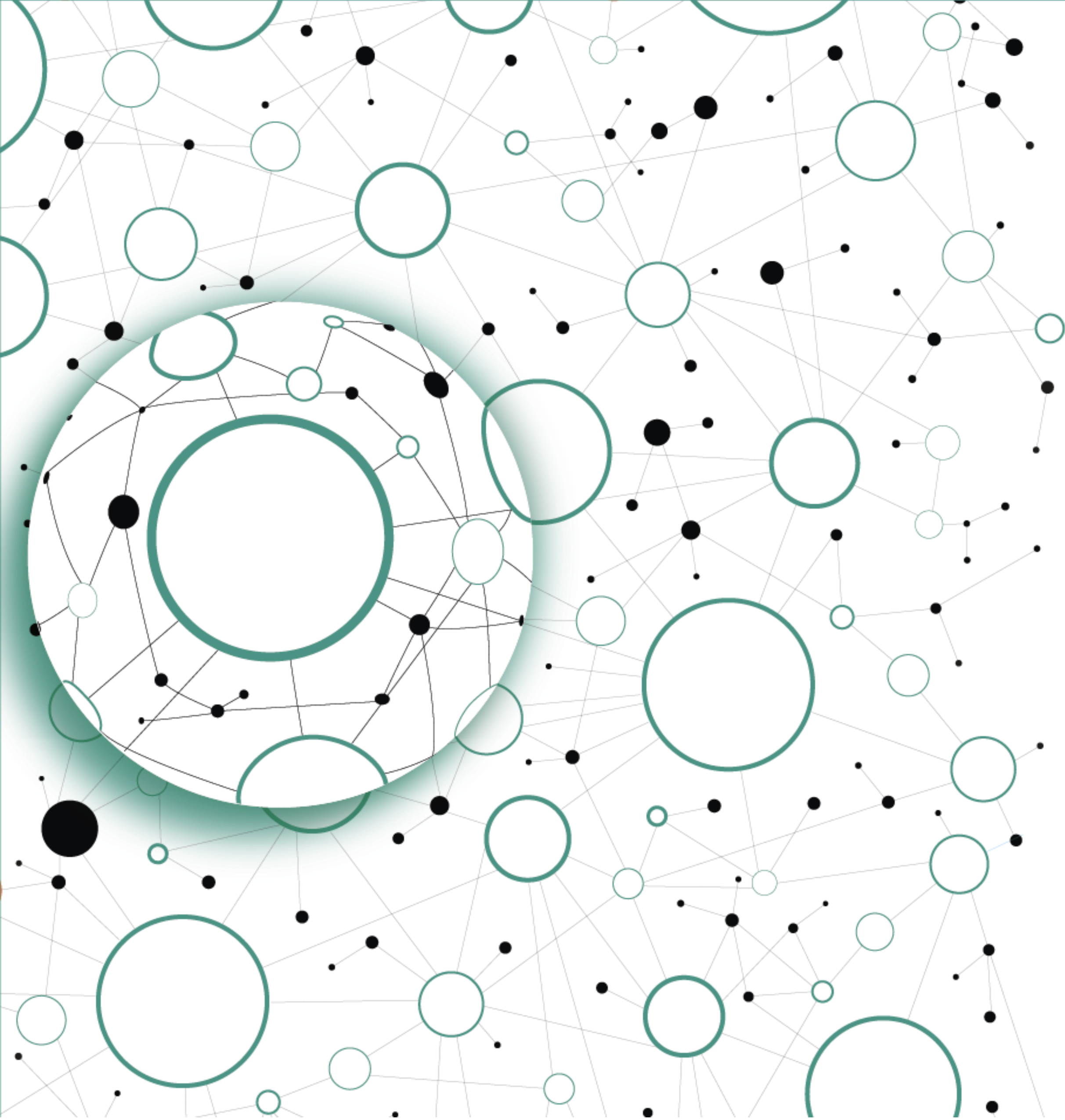
Dialectique Objet/Outil
(Douady, 1986)



Développer les **actions scientifiques** des élèves

Résoudre des problèmes

Acquérir des **connaissances d'ordre II**

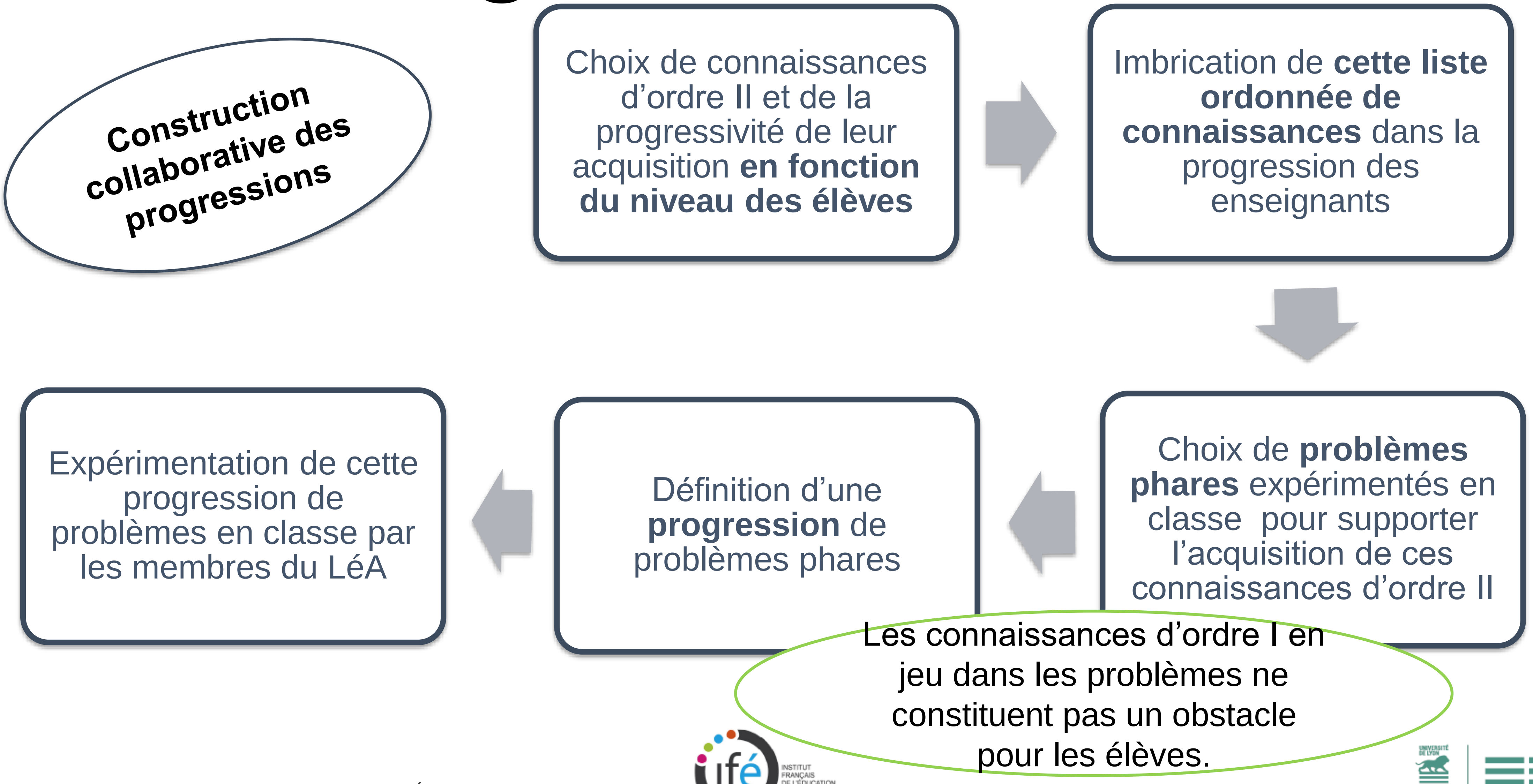


Connaissances d’ordre II

- **Au sens de Sackur et al. (2005)** : logique mathématique, raisonnements.

- **Savoirs pratiques et heuristiques (Castela, 2011)** : manière de s’y prendre, démarrer et avancer dans sa recherche.

Méthodologie



Construction collaborative des progressions

Choix de connaissances d'ordre II et de la progressivité de leur acquisition **en fonction du niveau des élèves**

Imbrication de **cette liste ordonnée de connaissances** dans la progression des enseignants

Choix de **problèmes phares** expérimentés en classe pour supporter l'acquisition de ces connaissances d'ordre II

Les connaissances d'ordre I en jeu dans les problèmes ne constituent pas un obstacle pour les élèves.

Définition d'une **progression** de problèmes phares

Expérimentation de cette progression de problèmes en classe par les membres du LéA

Illustration pour la classe de seconde

Circuit

Notion de modèle en mathématique. Nécessité de définir un modèle pour prendre en charge un problème en mathématique.

Notion de vrai et de faux en mathématique : une proposition en mathématique est soit vraie, soit fausse. Principe du tiers exclu.

Notions d'exemple, de contre-exemple et de hors sujet.

Savoir qu'une présentation organisée du raisonnement par *disjonction* de cas permet d'assurer que tous les cas sont étudiés, sans répétition.

Notion d'implication.

Savoir qu'un contre-exemple suffit pour prouver qu'une conjecture est fausse.

Savoir qu'une conjecture est vraie s'il n'existe pas de contre-exemple.

Notion de réciproque.

Notion de contraposée (éventuellement).

Cartes bicolores

Notions de condition nécessaire (CN), condition suffisante (CS).

Raisonnement déductif.

Savoir produire et examiner des cas (faire des essais) pour s'approprier le problème.

Savoir que l'observation organisée de multiples cas particuliers différents, y compris des cas particuliers simples, permet de dégager une généralité (une conjecture).

Savoir qu'un exemple ne suffit pas pour prouver une conjecture de portée générale.

Nombres digisibles

Raisonnement par l'absurde.

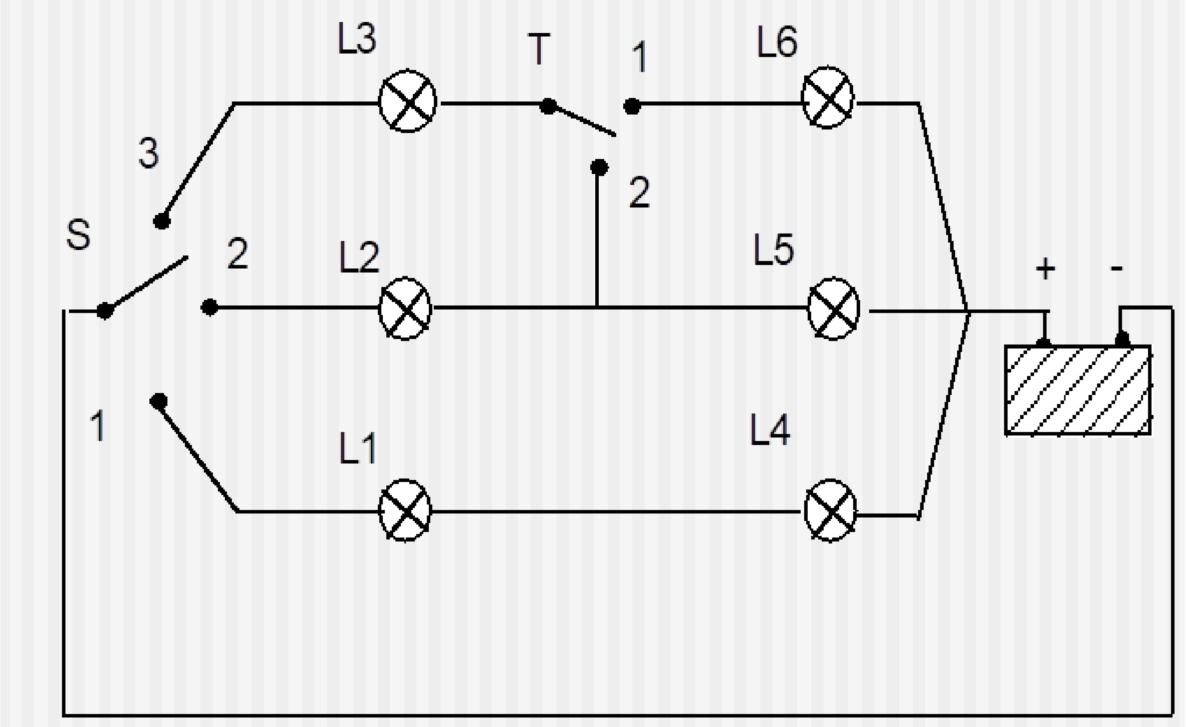
Milieux

Notion de négation

Concept
« chercher-débattre-prouver »

Circuit

Conjecture 1 :
« Si je vois la lampe 4 briller, alors je suis certain que la lampe 1 brille elle aussi ».

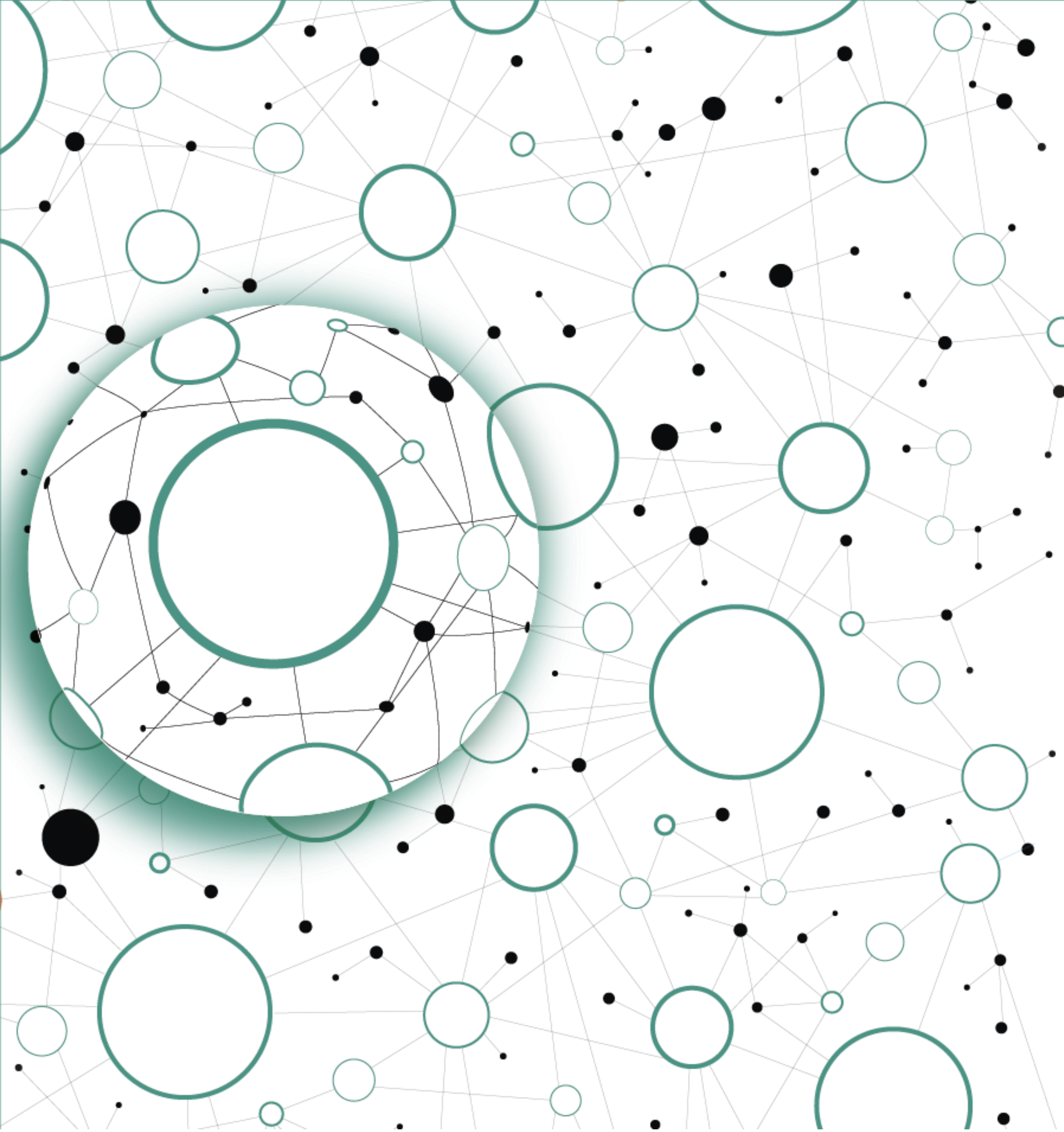


Difficultés des enseignants au lycée

- L'**institutionnalisation à l'écrit** des connaissances d'ordre II mise en œuvre dans la séquence de résolution d'un problème.

- La **première expérimentation de la mise en œuvre** d'un problème de la progression**.** En effet, de manière récurrente, la première **fois qu'un problème** de la progression est expérimenté en classe, des **difficultés de mise en œuvre** avec les élèves sont évoquées par les enseignants.

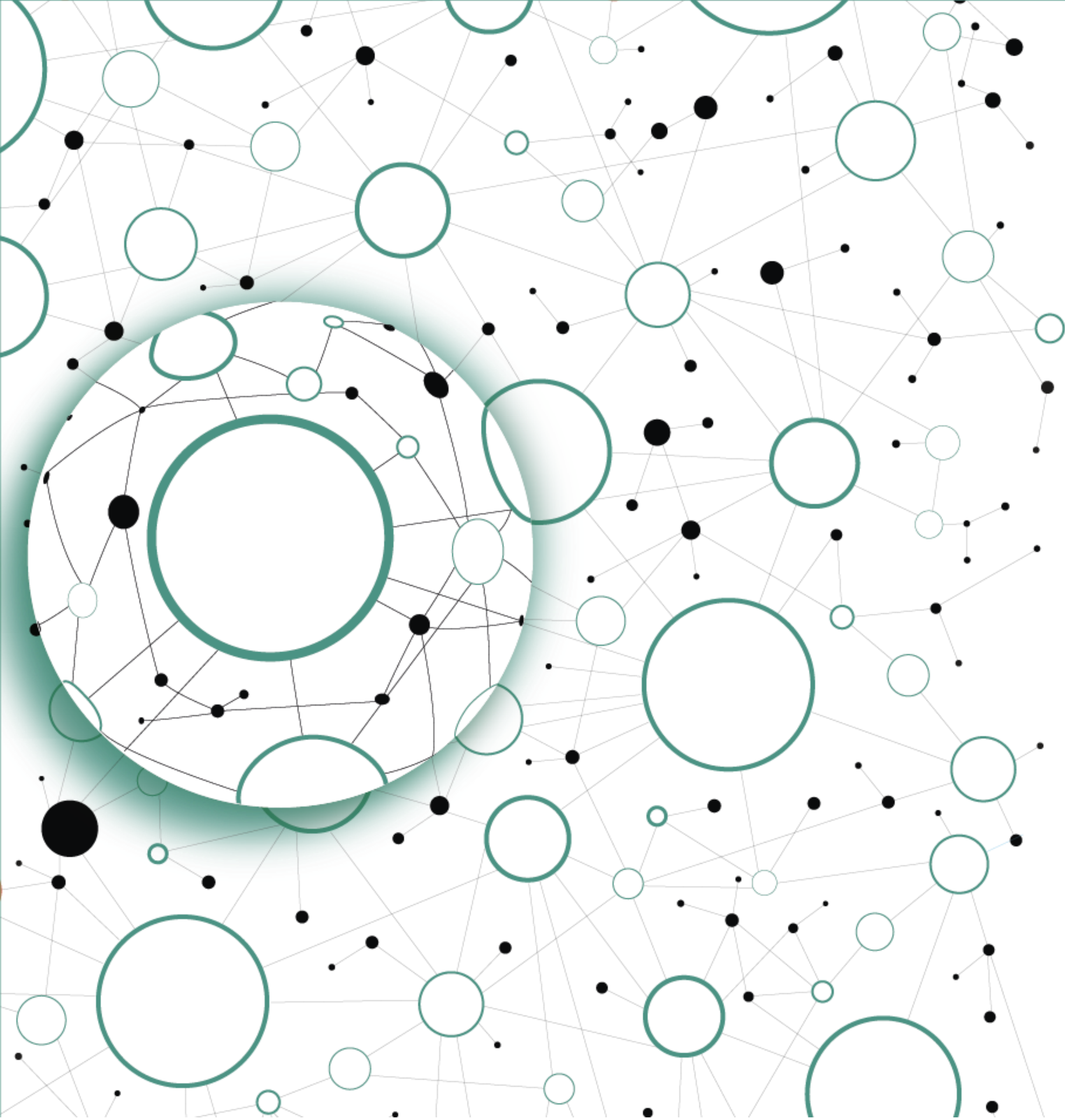
- La **mise en place d'un nouveau contrat didactique** avec les élèves. Ce nouveau contrat implique une **posture** plus en retrait **de l'enseignant** pour **permettre le débat scientifique** dans la classe, ce qui est plutôt inhabituel pour les élèves et l'enseignant.



Aspects positifs

Les enseignants notent un changement positif dans l’attitude des élèves :

- Plus **d’élèves actifs et qui s’engagent** dans la recherche, notamment ceux qui sont en difficultés.
- Des élèves qui s’**écoutent**.
- Une **argumentation** qui s’enrichit.



Extrait d’un entretien

- Extrait audio de l’entretien de Thomas

Références

Brousseau, G. (1998). Théorie des situations didactiques. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Castela, C. (2011). Des mathématiques à leurs utilisations, contribution à l’étude de la productivité praxéologique des institutions et de leurs sujets / Le travail personnel au cœur du développement praxéologique des élèves en tant qu’utilisateurs de mathématiques [Note de synthèse présentée en vue de l’habilitation à diriger des recherches, Université Denis Diderot Paris VII]. math.HO tel-00683613.

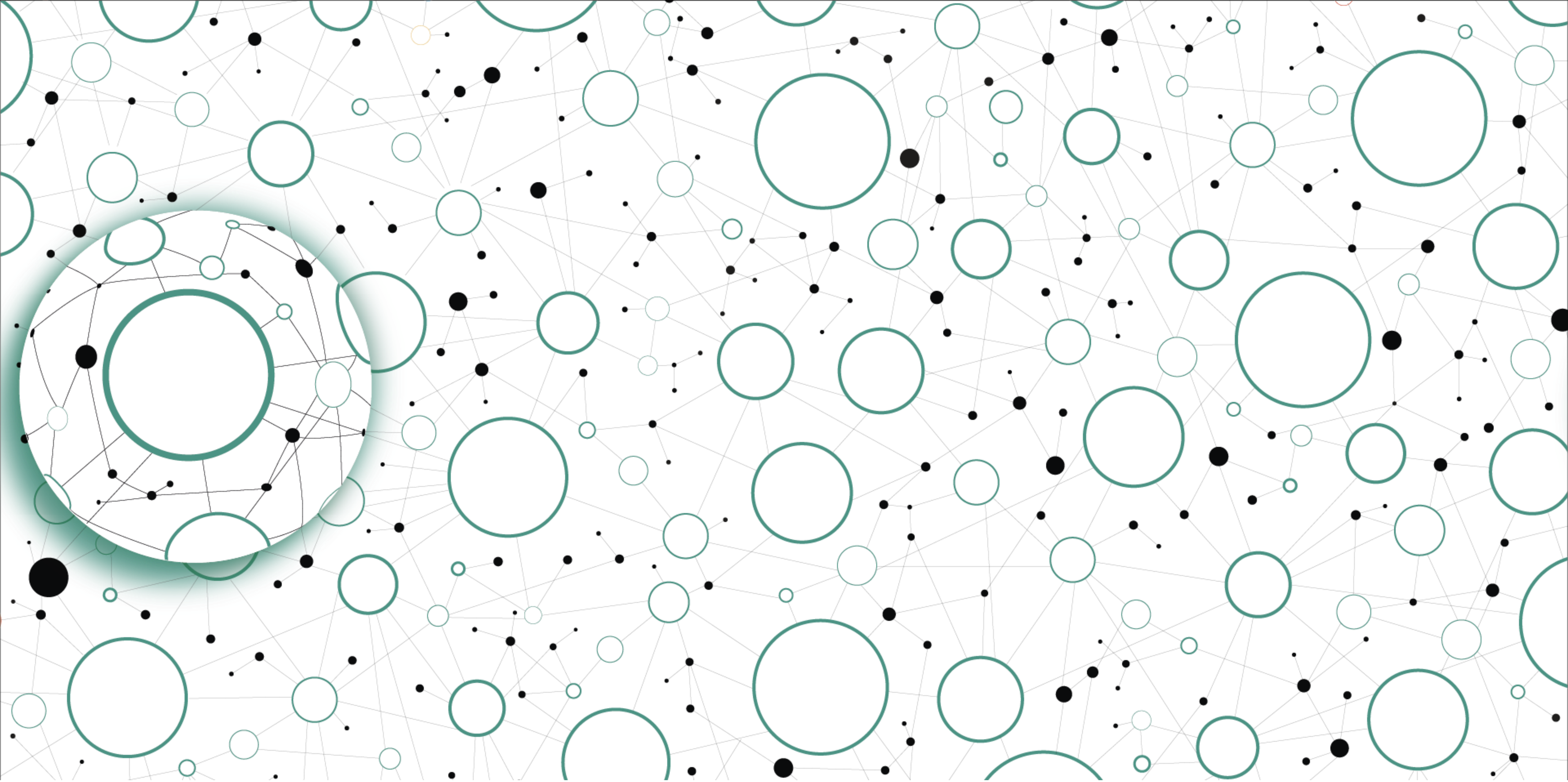
Chanudet, M., Coppé, S., Gandit, M. M. R., & Moulin, M. (2017). ANALYSE DES INTERACTIONS DIDACTIQUES DANS UNE PERSPECTIVE D'EVALUATION FORMATIVE. In *19 ème école d'été de didactique des mathématiques*.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet Recherche en Didactique des Mathématiques (Vol. 7-2). *Grenoble : La Pensée Sauvage*.

Gandit, M. (2015). L’évaluation au cours de séances d’investigation en mathématiques. *Recherches en éducation*, (21).

Legrand, M. (1993). Débat scientifique en cours de mathématiques. *Repères irem*, *10*, 123-159.

Sackur, C., Assude, T., Maurel, M., Drouhard, J. P., & Paquelier, Y. (2005). L’expérience de la nécessité épistémique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *25*(1), 57-90.



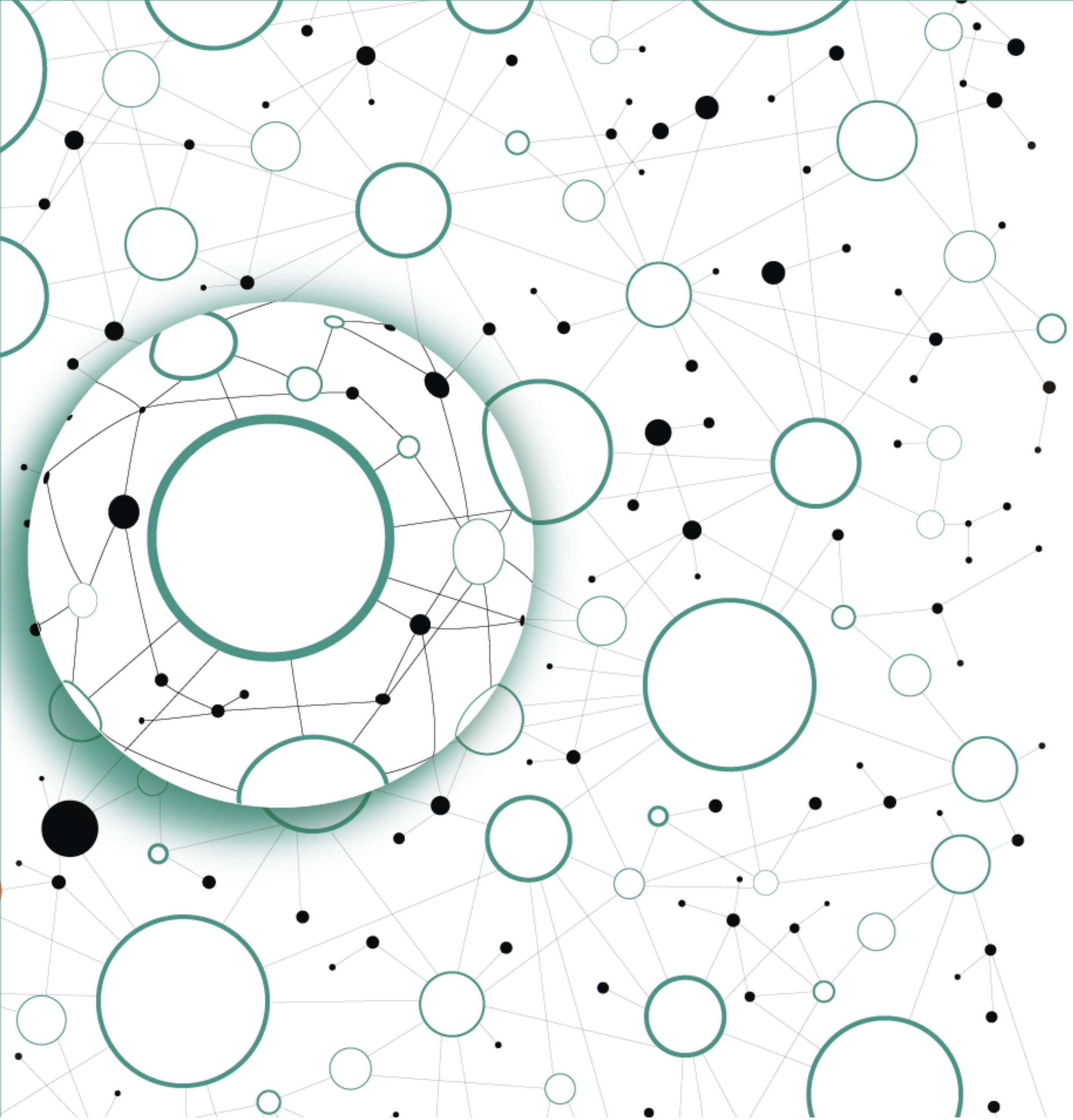
Classe de 2^{nde} d’Elsa en 2023

Exemples d’actions scientifiques d’élèves de 2^{nde}

- **Problème : Milieux**

On dispose d’un quadrillage sur lequel on souhaite placer des points à coordonnées entières.

Question : « Combien au maximum pouvons-nous placer de points à coordonnées entières sur un quadrillage de sorte qu'aucun milieu n'ait **ses deux coordonnées** entières ? ».



Difficulté pour comprendre le problème

- **Difficulté** sur la **négation** de : « avoir ses deux coordonnées entières »**.**

- **Etayage** de l'enseignant : aider les élèves **à faire le lien** avec le chapitre de probabilités, en particulier sur l'événement contraire.

  Liste de tous les cas possibles autres que (entier ; entier).

- Puis **une élève** a **reformulé** : « avoir au moins l'une de ses coordonnées non entière ».

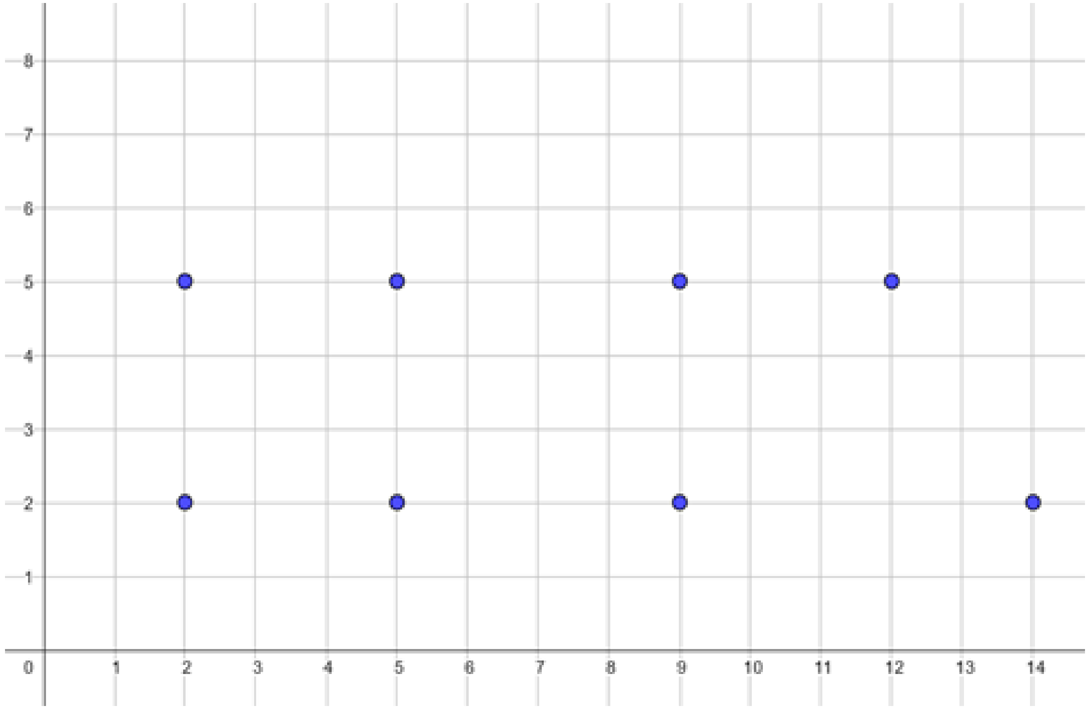
Expérimenter

Cas ni trop simples, ni trop complexes pour comprendre le problème

Observation de ces cas au regard du problème :

Les points placés sont vérifiés deux par deux, mais pas deux points au hasard parmi ceux déjà placés.

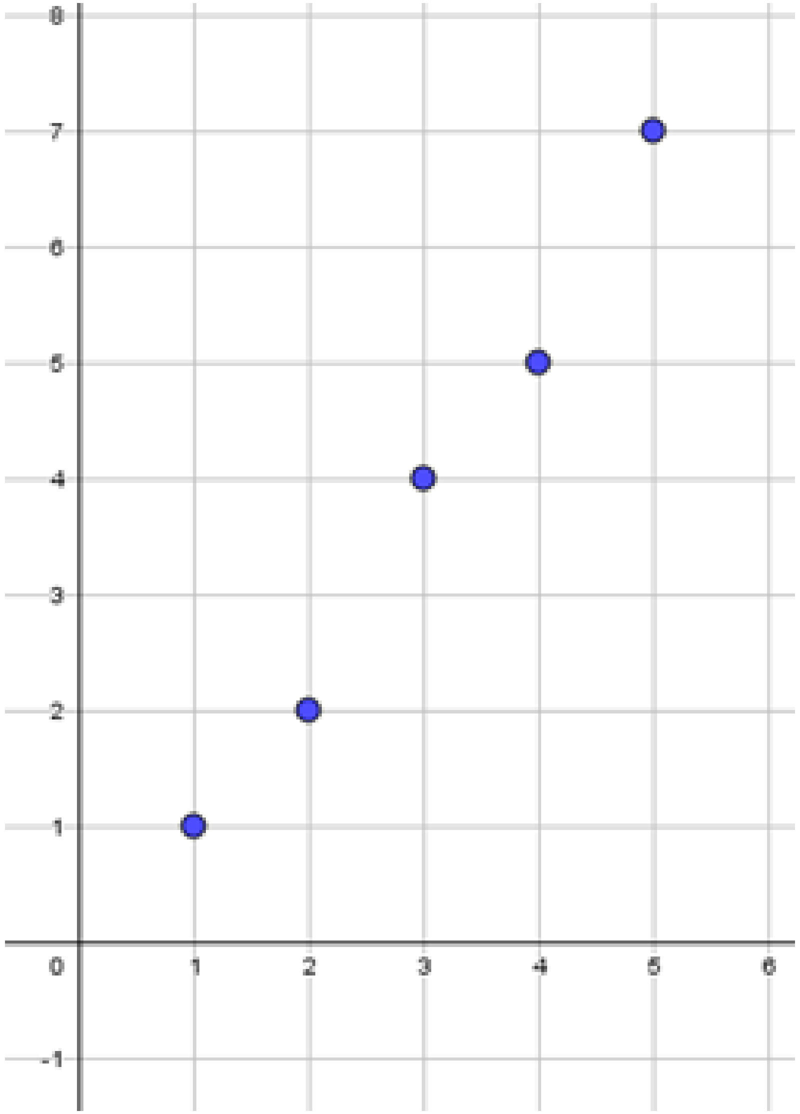
Les premiers points sont placés, puis en découvrant une certaine logique de construction, les élèves en placent d'autres sans vérifier avec les premiers points placés.



Expérimenter

Un hors sujet :

Un élève est parti avec un algorithme du type + 1 ; +2 ; +1 ; +2 en ordonnée (avec +1 ; +1 ; +1 ; +1 en abscisse), mais sans vérifier la condition sur le milieu de deux points pour le 5ème point, ni pour les autres.

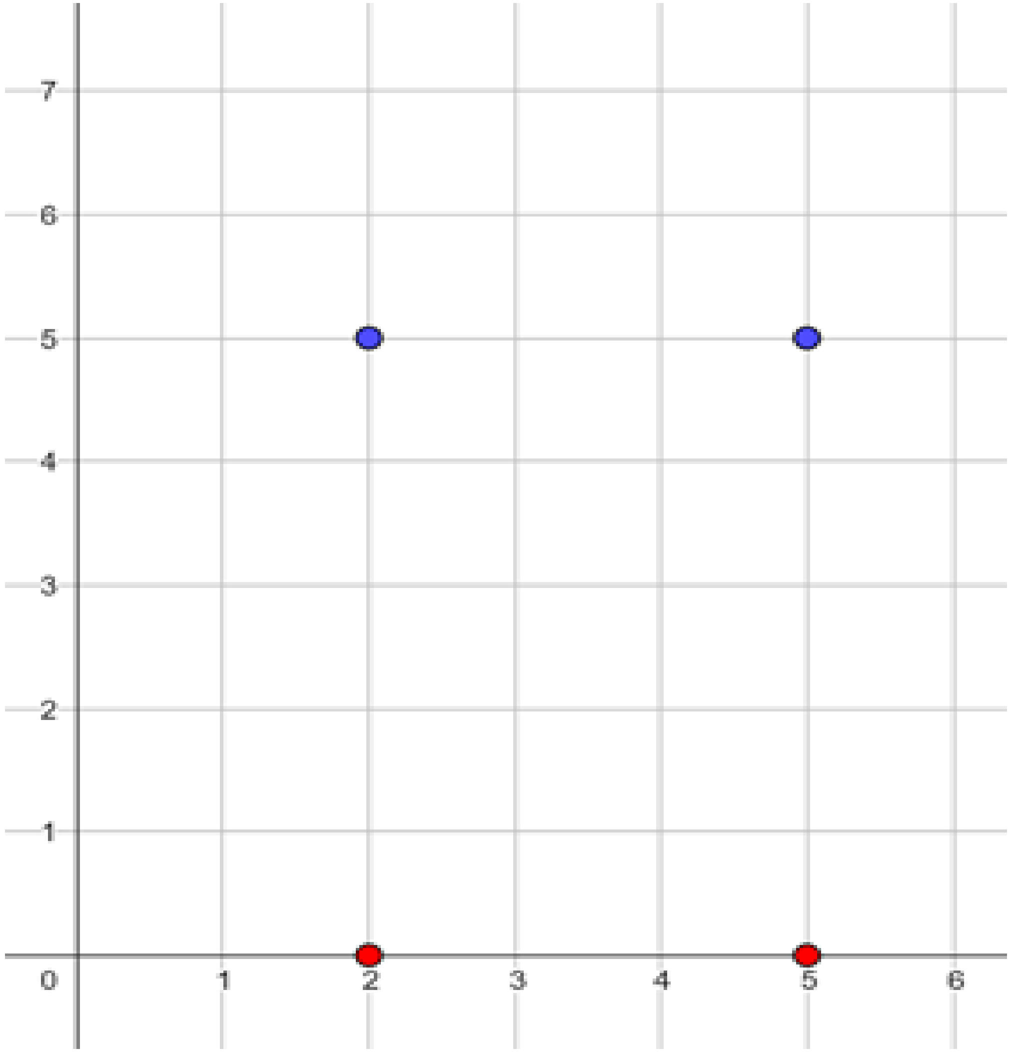


Expérimenter

Observation de ces cas au regard du problème :

Un groupe s’est posé la question sur la configuration formée par les points : ils sont arrivés facilement à 4 points.

Puis, ils testent certains types de quadrilatères : « On a trouvé 4 points formant un parallélogramme ; 4 points formant un carré ; mais pas formant un losange … »



Généraliser

- Reconnaître les résultats établis concernant ces cas particuliers :

Les élèves **conjecturent** : « On ne peut pas placer plus de 4 points ».

Ils cherchent à comprendre pourquoi un 5ème point ne peut pas être placé en essayant d'en placer un.

- Dégager une méthode pour étudier le problème :

Un groupe a écrit la formule du calcul des coordonnées du milieu, mais sans avancement.

Un **binôme d'élèves** a rappelé le résultat : « pair + pair = pair et impair + impair = pair » et en a déduit : « **il faut que les abscisses ou les ordonnées soient de parité différente** », **CN.**

Un élève a raisonné sur la parité des coordonnées de vecteurs, pour arriver à la condition « au moins l'une des deux coordonnées de chaque vecteur formé **doit être** impaire », **CN**.

Généraliser

Un groupe a réfléchi aux différents cas possibles de la parité des coordonnées des points et a essayé de **distinguer tous les cas possibles** pour avoir au moins l'une des coordonnées de milieu non entière, (au moins deux coordonnées de parité différente) :

- A(P ; P) et B(P ; I)
- A(P ; P) et B(P ; I)
- A(P ; I) et B(P ; P)
- A(I ; P) et B(P ; P)

Ils font la **conjecture** : « **4 cas possibles donc 4 points maximum !** » .

Questionner

Question : « **N'y a-t-il pas d'autres cas de figures possibles** où deux points ont des coordonnées de parité différente ? »

Après réflexion, ils trouvent :

- A(I ; I) et B(I ; P)
- A(I ; I) et B(P ; I)
- A(P ; I) et B(I ; I)
- A(I ; P) et B(I ; I)
- Et d'autres encore…

La **conjecture** de 4 cas est **invalidée** par le groupe.

Généraliser et expérimenter

Les élèves finissent par faire la conjecture : « il n'y a **pas plus de 4 points possibles** à placer ».

Ils cherchent à comprendre en essayant de placer un 5ème point pour essayer de trouver un moyen de prouver cette conjecture.

Communiquer

Une élève repart de ce travail et organise les cas afin de **distinguer tous les cas possibles** à l'aide d'**un tableau**, et détermine si le milieu possède deux coordonnées entières ou pas :

	(P ; P)	(P ; I)	(I ; P)	(I ; I)
(P ; P)	oui	non	non	Non
(P ; I)	non	oui	non	non
(I ; P)	non	non	oui	Non
(I ; I)	non	non	non	Oui