

Michèle

Enseignement et développement professionnel autour du concept chercher-prouver aux cycles 1, 2, 3

LéA : Réseau de l'école à l'université – Grenoble et Annecy



Michèle GANDIT - François LATHURAZ - Valérie FERREYRE - Laurence MOSSUZ
michele.gandit@univ-grenoble-alpes.fr



Lyon, 13ème rencontre internationale des LéA-IFÉ 24 mai 2023

Michèle

Enseigner la preuve en
mathématiques
pour former le citoyen
au raisonnement, à l'autonomie
et au débat scientifique

Annecy
1er degré

Lycée Pablo **Neruda**
Grenoble
2nd degré

REP **Olympique**
Grenoble
1er et 2nd degré

Université Grenoble
Alpes
Licence

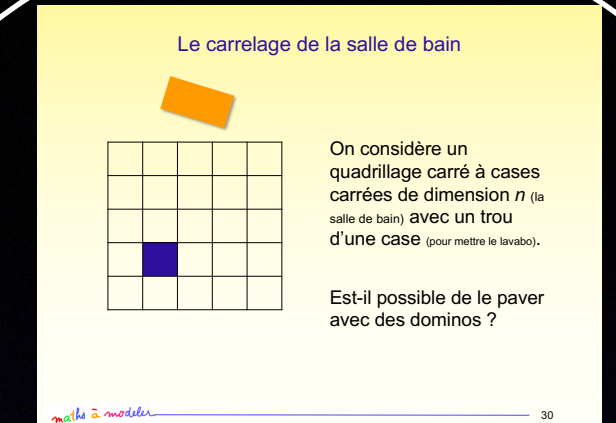
Michèle

Outil n°1

Complexité croissante :

- * au niveau des actions mathématiques des élèves
- * au niveau de la gestion de la classe

Mise en œuvre du débat scientifique



Situations de Recherche pour la Classe

Communiquer et défendre ses résultats

Max. de

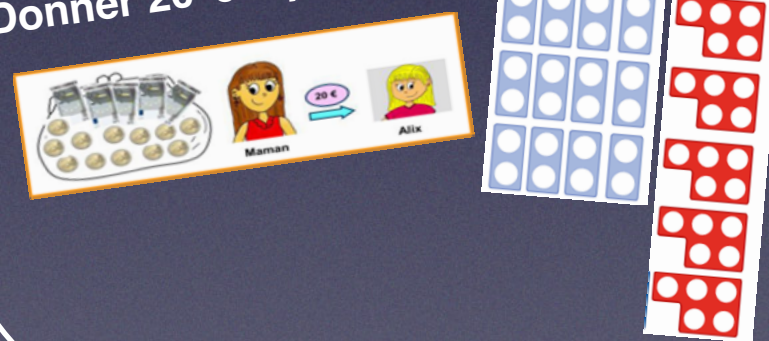
Max.

Convaincre qu'une condition est nécessaire
Convaincre qu'une condition est suffisante

...

Convaincre qu'il n'y a pas d'autre solution.
Ou que c'est impossible.

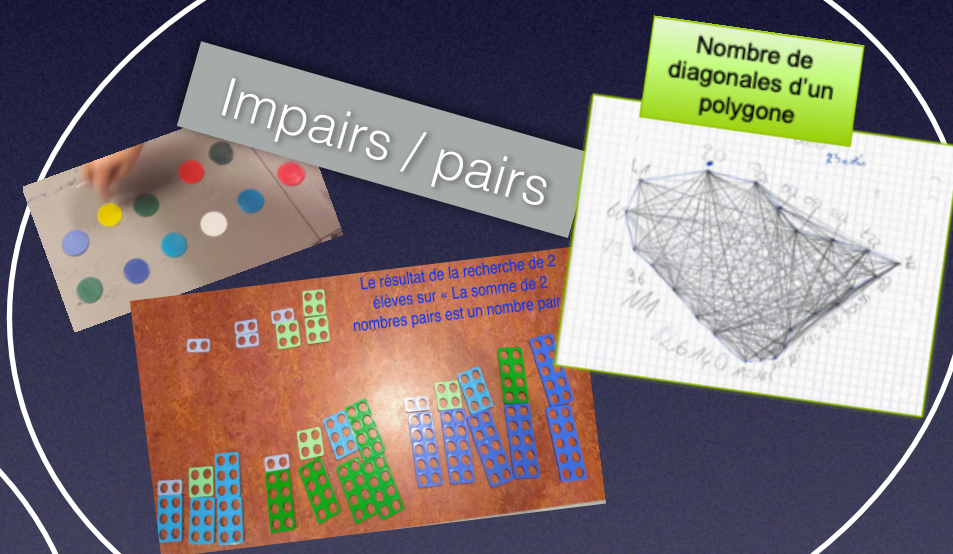
Donner 20 € à partir



Trouver plusieurs solutions à un problème.
Faire des essais.
Simplifier.

Impairs / pairs

Nombre de diagonales d'un polygone



Faire des conjectures
Se poser la question de leur vérité

Une liste ordonnée d'apprentissages relatifs au chercher-prouver, qui sont visés au travers de la résolution de certains problèmes

Différentes phases

P) Présentation du problème

Ri) Recherche individuelle des élèves

Mp) Mise au point collective

Rb) Recherche (en binômes) des élèves et production des premières idées

D) Débat scientifique

C) Communication scientifique par les élèves sur le problème

C-I) Conclusion et institutionnalisation

Une trame de mise en œuvre de la démarche de résolution, cohérente avec les stratégies d'évaluation formative, qui favorisent l'auto-régulation des apprentissages

Différentes phases

P) Présentation du problème

Ri) Recherche individuelle des élèves

Mp) Mise au point collective

Rb) Recherche (en binômes) des élèves et production des premières idées

D) Débat scientifique

C) Communication scientifique par les élèves sur le problème

C-I) Conclusion et institutionnalisation

Une trame de mise en œuvre de la démarche de résolution, cohérente avec les stratégies d'évaluation formative, qui favorisent l'auto-régulation des apprentissages

Quatre critères portant sur la pratique de P (l'enseignant.e) :

- 1) Désignation des connaissances en jeu et explicitation des objectifs visés**
- 2) Observation des actions des élèves**
- 3) Pratique du débat scientifique - validation**
- 4) Conclusion sur le problème et institutionnalisation**

Un tableau de progression
qui permet à l'enseignant.e de situer sa pratique

Michèle

Outil n°3

Quatre critères portant sur la pratique de P (l'enseignant.e) :

- 1) Désignation des connaissances en jeu et explicitation des objectifs visés
- 2) Observation des actions des élèves
- 3) Pratique du débat scientifique - validation
- 4) Conclusion sur le problème et institutionnalisation

La parole à François

Un tableau de progression
qui permet à l'enseignant.e de situer sa pratique

François

Préciser, faire évoluer les objectifs lors de la résolution de ce type de problèmes, institutionnaliser

Récapitulons ce que nous avons appris

Les Tours
29/09/2022

- Un problème peut avoir plusieurs réponses.
- Nous ne sommes pas obligés de dessiner toutes les tours pour les dénombrer.
- Il faut s'organiser pour trouver toutes les solutions.

Ce que nous avons appris

Les Diagonales
20/03/2023

Il ne faut pas chercher « compliqué ».
Il faut chercher « simple » (ex : avec des polygones qui n'ont pas beaucoup de sommets).

Récapitulons ce que nous avons appris

Les Billets
18/11/2022

Pour prouver que nous avons toutes les solutions, nous avons dû les organiser.

Ce que nous avons appris

Nombres pairs-impairs
13-16/01/2023

- Un contre-exemple permet de prouver qu'une hypothèse est fautive.
- Les exemples nous aident à trouver une hypothèse mais ils ne permettent pas de montrer que cette hypothèse est vraie.
- Pour prouver qu'une hypothèse est vraie, il faut trouver une explication : par exemple étudier tous les cas possibles en s'organisant.

Ce que nous avons appris

Les Gommettes
09/05/2023

- Ici, nous n'avons pas trouvé une solution exacte mais une fourchette.
- Pour dire que l'on pouvait assembler au moins 19 carrés, on a trouvé un assemblage.
- Le fait de ne pas avoir réussi à faire un assemblage à plus de 19 carrés avec 6 gommettes ne signifie pas que cela n'existe pas : il faut une preuve.

La parole à Michèle

Michèle

Outil n°3

Quatre critères portant sur la pratique de P (l'enseignant.e) :

- 1) Désignation des connaissances en jeu et explicitation des objectifs visés**
- 2) Observation des actions des élèves**
- 3) Pratique du débat scientifique - validation**
- 4) Conclusion sur le problème et institutionnalisation**

La parole à Valérie

Un tableau de progression
qui permet à l'enseignant.e de situer sa pratique

Valérie

Chercher-prouver, communiquer au cycle 1

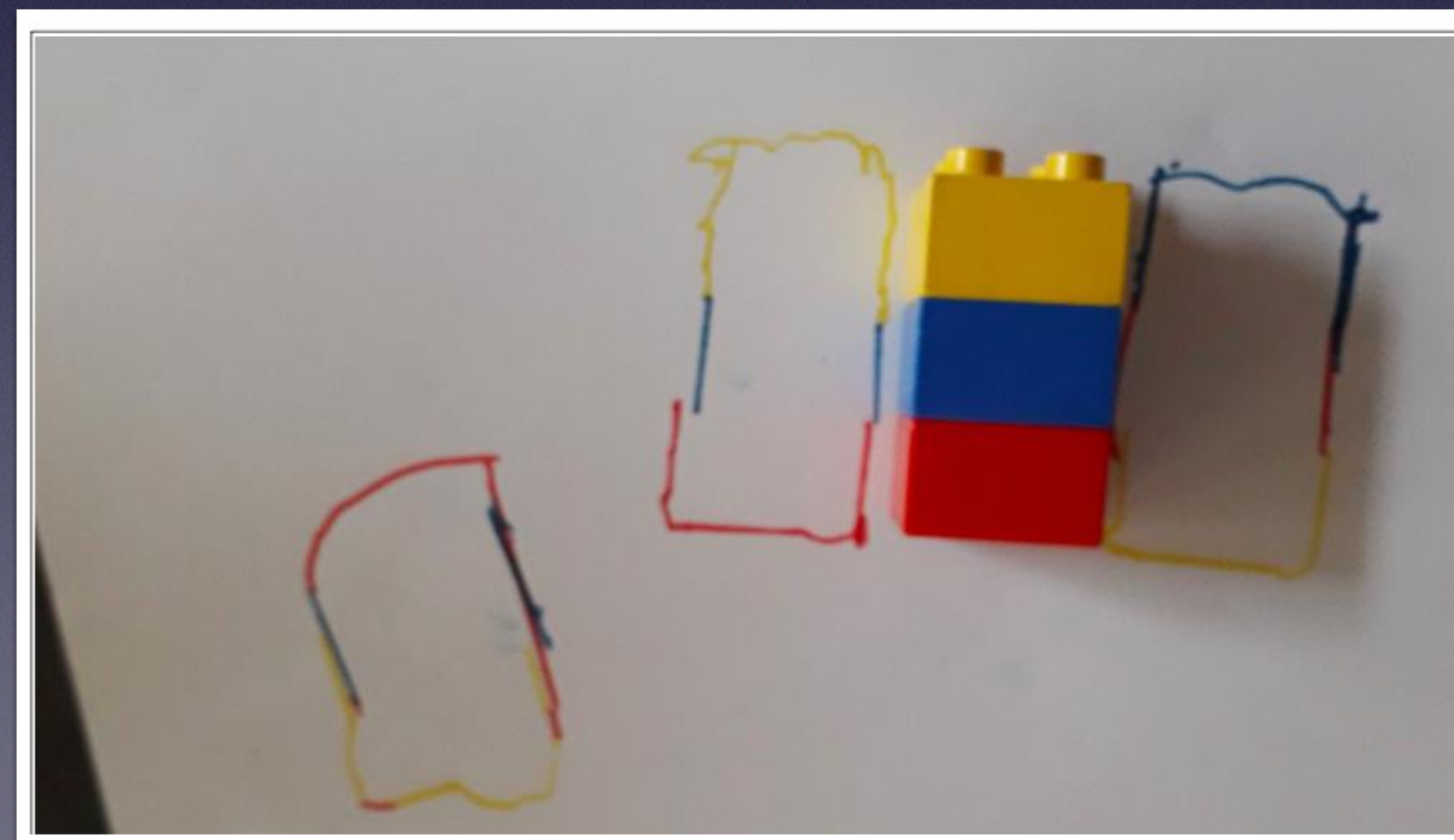
Les Tours

Posture de P

Variables des situations proposées :
nombre d'élèves, matériel, durée, fréquence...

- Engagement des élèves :
- verbalisation : se rappeler à l'aide d'une trace, expliciter ;
 - les élèves agissent en manipulant le matériel (mode enactif)

La parole à Michèle



Quatre critères portant sur la pratique de P (l'enseignant.e) :

- 1) Désignation des connaissances en jeu et explicitation des objectifs visés
- 2) Observation des actions des élèves
- 3) Pratique du débat scientifique - validation
- 4) Conclusion sur le problème et institutionnalisation

Laurence :
 Mémoire de master MEEF PIF 2022
 « Enseigner la preuve à des élèves
 d'école primaire au sein d'un projet
 LéA »

<p>Pratique du débat scientifique - validation</p>	<p>Tous les élèves présentent leurs productions. P les valide ou les invalide.</p>	<p>P anticipe une mise en commun par un classement des productions des élèves suivant les stratégies de résolution ou leur validité. Les élèves présentent leurs productions, que P valide ou invalide. Aucune rétroaction de la part des élèves.</p>	<p>P sélectionne des productions ou conjectures d'élèves pour mettre en place le débat avec la classe, permettant de valider ou rejeter ces conjectures. P favorise les rétroactions de la part des élèves pour faire évoluer leurs stratégies. P incite les élèves à être des ressources pour leurs pairs. Mais c'est P qui finalement valide ou rejette les conjectures.</p>	<p>P sélectionne des productions ou conjectures d'élèves pour mettre en place le débat avec la classe, permettant de valider ou rejeter ces conjectures. P favorise les rétroactions de la part des élèves pour faire évoluer leurs stratégies. P incite les élèves à être des ressources pour leurs pairs. P incite les élèves à être responsables de leurs propositions. Les conjectures avec leurs preuves acquièrent le statut de résultats mathématiques.</p>
---	---	---	--	--

Un extrait du tableau de progression qui permet à l'enseignant.e de situer sa pratique

Laurence :
 Mémoire de master MEEF PIF 2022
 « Enseigner la preuve à des élèves
 d'école primaire au sein d'un projet
 LéA »

Des critères et des indicateurs portant sur la pratique du débat scientifique et la validation

Organisation de la présentation des productions

Statut des productions :
 conjectures, résultats d'élèves, argument

Ordre de présentation :
 anticipé, argumenté, au fil de la résolution

Qui valide ?

Quelques élèves, toujours les mêmes

Nombre d'élèves impliqués

L'ensemble de la classe
 Une petite partie de la classe

Engagement dans la validation

Vote des élèves oui/non à main levée
 Vote des élèves oui/non/**autre** à main levée
 Préparation par écrit individuel

P reformule et structure le lexique
 P s'assure que la formulation correspond à l'idée de l'élève

Respect et partage des idées des élèves

P écrit au tableau les formulations des élèves
 C'est l'élève qui écrit sa formulation
 P utilise le tableau pour retranscrire les échanges

Interactions

P / élève	Elève / élève
Elève / élèves	Elève particulier

Temps accordé aux élèves pour valider une conjecture

Aucun	Trop court	Suffisant
-------	------------	-----------

Recadrage du débat en cas de glissement dans une impasse

P fait des remises au point appropriées
 P arrête le débat pour le recadrer
 P reporte le débat à une autre séance

Laurence :
Mémoire de master MEEF PIF 2022
« Enseigner la preuve à des élèves
d'école primaire au sein d'un projet
LéA »

Des critères et des indicateurs portant sur la pratique du débat scientifique et la validation

**Organisation de la
présentation
des productions**

**Nombre d'élèves
impliqués**

**Engagement dans
la validation**

Vote des élèves oui/non à main levée
Vote des élèves oui/non/autre à main levée
Préparation par écrit individuel

**Respect et partage
des idées des
élèves**

Interactions

**Temps accordé
aux élèves pour
valider une
conjecture**

Aucun Trop court Suffisant

**Recadrage du
débat en cas de
glissement dans
une impasse**

La parole à François

François

Se questionner autour de la gestion des débats

Préparer les débats

Nombres pairs-impairs

Prénoms : Kael Gabin

les conjectures	Nous sommes d'accord.	Nous ne sommes pas d'accord.	arguments, explications
<p>Quand on additionne 2 nombres impairs, on obtient toujours un nombre impair</p>		✓	<p>C'est impossible d'obtenir ^{toujours} un nombre impair à partir de 2 nombres impairs. Par exemple : $7 + 9 = 16$. 16 est un nombre pair.</p>
<p>Quand on ^{additionne} additionne 2 nombres impairs cela fait toujours un nombre pair</p>	✓		<p> $1+1=2$ $1+3=4$ $1+5=6$ $1+7=8$ $1+9=10$ $3+1=4$ $3+3=6$ $3+5=8$ $3+7=10$ $3+9=12$ $5+1=6$ $5+3=8$ 10 12 14 16 $7+1=8$ $7+3=10$ $9+1=10$ $9+3=12$ 14 16 18 </p> <p>Résultats : Quand on additionne 2 nombres impairs = nombre pair</p>

François

Se questionner autour de la gestion des débats

Nombres pairs-impairs

Voter

conjectures	d'accord	pas d'accord	explications, arguments																									
Quand on additionne 2 nombres impairs cela fait toujours un nombre pair.	8 groupes	2 groupes	A) C'est vrai, car $5 + 3 = 8$. B) Ça fera forcément un nombre pair. ex : $3 + 3 = 6$ C) <table><tr><td>1+1=2</td><td>1+3=4</td><td>1+5=6</td><td>1+7=8</td><td>1+9=10</td></tr><tr><td>3+1=4</td><td>3+3=6</td><td>3+5=8</td><td>3+7=10</td><td>3+9=12</td></tr><tr><td>5+1=6</td><td>5+3=8</td><td>10</td><td>12</td><td>14</td></tr><tr><td>7+1=8</td><td>7+3=10</td><td>12</td><td>14</td><td>16</td></tr><tr><td>9+1=10</td><td>9+3=12</td><td>14</td><td>16</td><td>18</td></tr></table> Résultat : quand on additionne 2 nombres impairs cela fera un nombre pair.	1+1=2	1+3=4	1+5=6	1+7=8	1+9=10	3+1=4	3+3=6	3+5=8	3+7=10	3+9=12	5+1=6	5+3=8	10	12	14	7+1=8	7+3=10	12	14	16	9+1=10	9+3=12	14	16	18
1+1=2	1+3=4	1+5=6	1+7=8	1+9=10																								
3+1=4	3+3=6	3+5=8	3+7=10	3+9=12																								
5+1=6	5+3=8	10	12	14																								
7+1=8	7+3=10	12	14	16																								
9+1=10	9+3=12	14	16	18																								

Débat

A et B : Il faut que ça marche avec n'importe quel nombre → un exemple ne permet pas de montrer qu'une hypothèse est vraie.

C : On étudie tous les cas possibles aux unités en nous organisant.

Votes : convaincus 21/21

Voter en
laissant
la place
au doute

On descend le nombre de billets de 20 €.

10 billets de 20 €

9 billets de 20 € et 4 billets de 5 €

8 billets de 20 € et 8 billets de 5 €

7 billets de 20 € et 12 billets de 5 €

~~6 billets de 20 € et ... billets de 5 €~~

On remplace le billet de 20 € par 4 billets de 5 €. $4 \times 5 = 20$

Il faudrait 16 billets de 5 €, mais nous n'en avons que 12. Pour la suite, nous n'aurons pas assez de billets de 5€.

Il y a donc 4 solutions.

13 élèves sont convaincus par cette preuve.

5 élèves sont incertains.

1 élève n'est pas d'accord.

13 élèves sont convaincus par cette preuve.

5 élèves sont incertains.

1 élève n'est pas d'accord.

Laurence :
Mémoire de master MEEF PIF 2022
« Enseigner la preuve à des élèves
d'école primaire au sein d'un projet
LéA »

Des critères et des indicateurs portant sur la pratique du débat scientifique et la validation

Organisation de la présentation des productions

Engagement dans la validation

Interactions

Temps accordé aux élèves pour valider une conjecture

Vote des élèves oui/non à main levée
Vote des élèves oui/non/autre à main levée
Préparation par écrit individuel

P / élève	Elève / élève
Elève / élèves	Elève particulier

Nombre d'élèves impliqués

Respect et partage des idées des élèves

Recadrage du débat en cas de glissement dans une impasse

Quelques élèves, toujours les mêmes

L'ensemble de la classe
Une petite partie de la classe

P reformule et structure le lexique

P s'assure que la formulation
correspond à l'idée de l'élève

P écrit au tableau les formulations
des élèves

C'est l'élève qui écrit sa formulation

P utilise le tableau pour retranscrire
les échanges

La parole à Valérie

Valérie

Chercher-prouver, communiquer au cycle 1

Les Tours

Les Billets

Nombres
impairs / pairs

Logikville

P chef d'orchestre :

- favorise l'argumentation,
- structure le lexique.



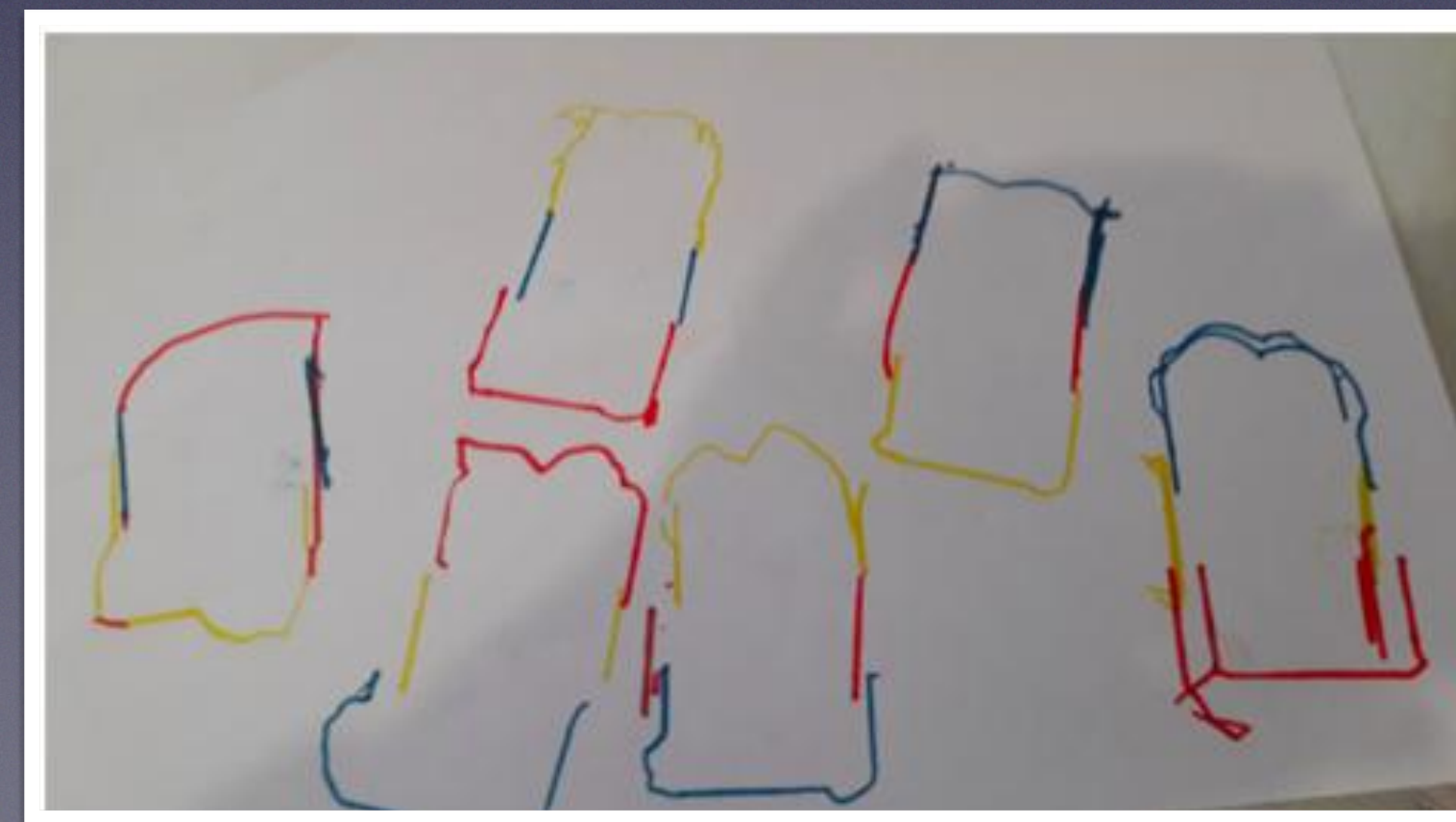
Les actions des élèves :

- un élève qui n'est pas d'accord va induire le débat et l'argumentation
- le vote

La preuve :

- à l'oral
- validation par le milieu (Logikville)
- la trace écrite (représentation de la situation, mode iconique)

La parole à Michèle



Michèle

Outil n°3

Quatre critères portant sur la pratique de P (l'enseignant.e) :

- 1) Désignation des connaissances en jeu et explicitation des objectifs visés
- 2) Observation des actions des élèves
- 3) Pratique du débat scientifique - validation
- 4) Conclusion sur le problème et institutionnalisation

La parole à Laurence

Un tableau de progression
qui permet à l'enseignant.e de situer sa pratique

Laurence :
 Mémoire de master MEEF PIF 2022
 « Enseigner la preuve à des élèves
 d'école primaire au sein d'un projet
 LéA »

<p>Conclusion sur le problème et institutionnalisation</p>	<p>Aucune institutionnalisation n'est prévue. P conclut la recherche autour du ressenti des élèves.</p>	<p>P organise la conclusion de la recherche sur les résultats du problème.</p>	<p>P organise la conclusion de la recherche sur les résultats du problème. P organise une institutionnalisation locale : il explicite l'apprentissage visé relatif au chercher-prouver.</p>	<p>P organise une présentation par les élèves des résultats sur le problème. P organise une institutionnalisation locale : il explicite l'apprentissage visé relatif au chercher-prouver. L'institutionnalisation fait l'objet d'une trace écrite. P incite les élèves à être responsables de leurs apprentissages en développant l'autoévaluation.</p>
---	---	--	---	---

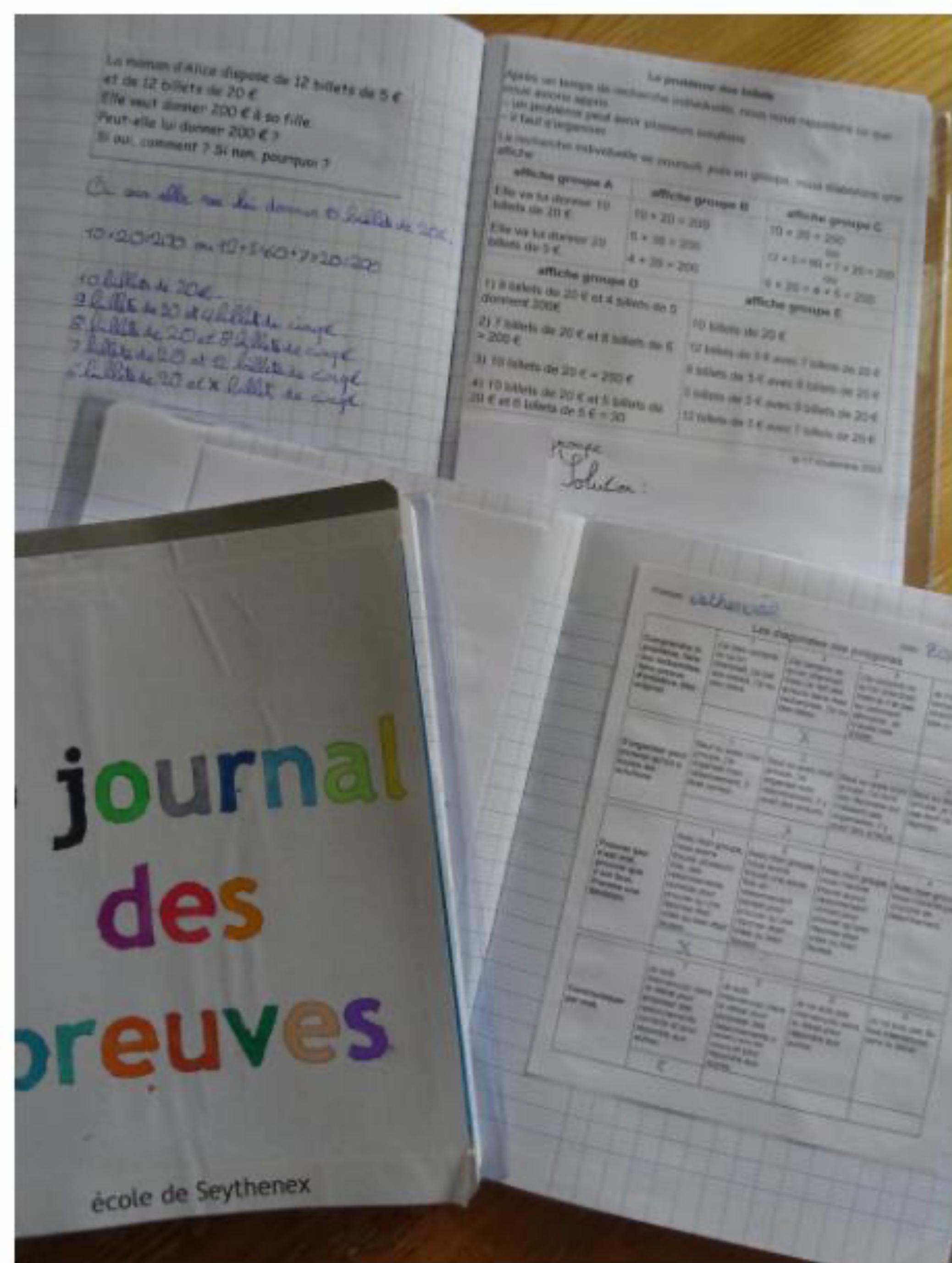
La parole à François

Un extrait du tableau de progression qui permet à l'enseignant.e de situer sa pratique

François

Mettre en place un cahier permettant de recueillir :

- les recherches,
- les traces des débats,
- les institutionnalisations,
- les grilles de positionnement des élèves...



Merci

Black, P. & William, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability*, 21 (5-31). <https://doi.org/10.1007/s11092-008-9068-5>

Gandit, M., Gravier, S & Mossuz, L. (à paraître). L'enseignement et l'apprentissage de la preuve en mathématiques du cycle 1 au cycle 3 : premiers outils et premiers résultats. Dans Wozniak, F. (dir), *Actes du 48ème colloque de la COPIRELEM, Toulouse 2022*

Gandit, M. (2015). L'évaluation au cours de séances d'investigation en mathématiques. *Recherches en éducation*, 25, 67-80. <http://www.recherches-en-education.net/IMG/pdf/REE-no21.pdf> (cons. 27/04/2022).

Gandit, M., Giroud, N., Godot, K. (2011). Les situations de recherche en classe : un modèle pour travailler la démarche scientifique en mathématiques. Dans M. Grangeat (dir.) : *Les démarches d'investigation dans l'enseignement scientifique. Pratiques de classe, travail collectif enseignant, acquisition des élèves* (p. 38-51). Lyon, École normale supérieure.

Gueudet, G., Gandit, M., Grangeat, M., Guillaud, J.-C., Hammoud, R., Jameau, A. Triquet, E. (2012). *Pratiques enseignantes et démarches d'investigation en sciences*. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00720160/> (cons. 27/04/2022).

Lepareur, C., Gandit, M., Grangeat, M. (2018). *Evaluation formative et démarche d'investigation en mathématiques : une étude de cas*. *Education et Didactique*, 11-3. <https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-02021829>

Legrand, M. (1990). Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique. *Recherches en didactique des mathématiques*, n°9/3, 365-406.

Mossuz, L. (à paraître). Enseigner la preuve à des élèves de l'école primaire au sein d'un projet LÉA, Mémoire de master MEEF, mention PIF, Université Grenoble Alpes