



# Analyser un savoir mathématique

*La démarche d'étude par la recherche de l'école primaire au lycée*

12 janvier 2016

# Dans quels contextes ?

Analyser des propositions d'enseignement contenues dans

- les programmes et leurs documents d'accompagnement,
- des manuels, des revues...

Analyser des mathématiques qui ont été effectivement enseignées dans telle classe.

*Il y a l'intention d'enseigner.*



# Plan

I. Que signifie « connaître telle notion mathématique » ?

Cas de la division euclidienne

II. Le processus de *transposition didactique*

III. Le modèle des *organisations mathématiques*

IV. Analyse d'un extrait d'un document officiel

V. Conclusion et enjeux

VI. Références bibliographiques



# I- Que signifie « connaître la division euclidienne » ?

*Classe n°1*

$$24 + 24 = 48$$

$$48 + 24 = 72$$

...

$$120 + 24 = 144$$

$$144 + 24 = 168$$

$$162 - 144 = 18$$

*Chaque enfant recevra 6 bonbons et il en restera 18.*



# I- Que signifie « connaître la division euclidienne » ?

## *Classe n°2*

Nombre de parts de chaque élève	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de bonbons distribués	24	48	72	96	120	144	168

$$162 - 144 = 18$$

*Chaque enfant recevra 6 bonbons et il en restera 18.*



# I- Que signifie « connaître la division euclidienne » ?

*Classe n°3*

$$\begin{array}{r|l} 162 & 24 \\ -144 & 6 \\ \hline 18 & \end{array}$$

$$162 = 6 \times 24 + 18$$

*Chaque enfant recevra 6 bonbons et il en restera 18.*



# I- Que signifie « connaître la division euclidienne » ?

*Classe n°4*

Les élèves sont devant un gros tas de bonbons. La maîtresse dit qu'il y en a 162.

Ils doivent dire combien les 24 enfants de la classe auront au plus de bonbons, si on en donne la même chose à chacun, et combien il en restera pour la maîtresse.



# I- Que signifie « connaître la division euclidienne » ?

Des savoirs - faire différents

Des pratiques dans lesquelles on étudie la division euclidienne en mettant en jeu d'autres connaissances :

*Classe n° 1* : l'addition, la soustraction...

*Classe n° 2* : la multiplication, les calculs sont écrits dans un tableau

*Classe n° 3* : on pose une division avec une technique qui est reconnue comme experte par les programmes.

*Classe n° 4* : on dénombre en distribuant les objets un par un

Quelles définitions mathématiques de *la division euclidienne* ?





# I- Que signifie « connaître la division euclidienne » ?

## *Une définition*

Étant donnés deux entiers naturels  $a$  et  $b$ , avec  $b \neq 0$ , il existe un entier naturel  $q$  et un seul tel que :  
 $b \times q \leq a < b \times (q + 1)$ .

Tout entier naturel  $a$  peut être encadré par deux multiples consécutifs d'un entier naturel  $b \neq 0$ .

## *Une autre définition équivalente*

Étant donnés deux entiers naturels  $a$  et  $b$ , avec  $b \neq 0$ , il existe de manière unique deux entiers, un quotient  $q$  et un reste  $r$  tels que :  $a = b \times q + r$  avec  $r < b$ .

## II- Le processus de transposition didactique

Choisir l'une des pratiques liées à la division euclidienne et les *objets* que fait intervenir cette pratique pour organiser la rencontre, puis l'étude, de ce que l'on nomme « la division euclidienne ».

C'est un choix de « transposition d'un savoir ».

*Une transposition **didactique** car motivée par l'intention d'enseigner dans une institution donnée.*



## II- Le processus de transposition didactique



Le savoir à enseigner et le savoir enseigné doivent être suffisamment proche du savoir savant pour que sa légitimité ne soit pas mise en doute et suffisamment éloigné du savoir des parents.



## II- Le processus de transposition didactique

### *Relativité institutionnelle des savoirs*

L'ensemble de savoirs et de savoir-faire en étroite articulation se spécifient de manière différente selon les lieux où on les trouve.

Dans quelle institution ? Sous quelles conditions ? En tenant de quelles contraintes ?

Quelles tâches sont à accomplir ? Avec quelles techniques ?

Pourquoi ?

Exemple de tâche t : trouver la valeur de chaque part et ce qu'il reste dans un partage équitable de 162 bonbons en 24 parts.



# III. Le modèle des organisations mathématiques

*Une organisation mathématique comme quadruplet :*

- Un type de tâches,

Type de tâches dont relève  $t$  : trouver la valeur de chaque part et ce qu'il reste dans un partage équitable d'une quantité donnée en un nombre donné de parts.

- Une technique pour l'accomplir,
- Une technologie qui permet de justifier, produire et rendre compréhensible la technique,
- Une théorie qui permet de justifier, produire et rendre compréhensible la technologie.



# III. Le modèle des organisations mathématiques

**Cas de la division euclidienne - *Le bloc pratico-technique***  
*( type de tâches et technique qui permet de l'accomplir)*

- *Classe n°1* : technique avec des additions successives
- *Classe n°2* : technique avec des multiplications successives
- *Classe n°3* : technique utilisant la puissance
- *Classe n°4* : distribution effective du tas de bonbons.



# III. Le modèle des organisations mathématiques

**Cas de la division euclidienne - *Le bloc technologico-théorique( éléments technologiques relatifs au bloc pratique et éléments théoriques associés )***

***Classes n°1, n°2 et n°3***

- Deux définitions de la division euclidienne
- $Z$  est un anneau ordonné : compatibilité de l'ordre avec l'addition.
- $Z$  est discret :  $n$  et  $m$  étant deux entiers,  $n < m$  équivaut à  $n+1 \leq m$ .
- $Z$  est un groupe archimédien :  $a$  et  $b$  étant deux entiers,  $b$  différent de  $0$ , il existe  $k$  un entier tel que  $bk > a$ .
- Toute partie non vide de  $N$  possède un plus petit élément.

# III. Le modèle des organisations mathématiques

**Cas de la division euclidienne - *Le bloc technologico-théorique***

***Classe n°4***

- Pour savoir si dans une quantité d'objets on a plus d'objets que dans une autre, on compare le nombre respectifs d'objets.
- Importance de l'organisation spatiale.





# III. Le modèle des organisations mathématiques

## Cas de la division euclidienne - *Un autre élément technologique*

$a$  et  $b$  étant deux nombres entiers positifs,  $b$  différent de zéro. Si  $b = b' b''$  et  $q'$  est le quotient de  $a$  par  $b'$ ,  $q''$  est le quotient de  $q'$  par  $b''$ , alors  $q''$  est le quotient de  $a$  par  $b$ .

### *Une nouvelle technique*

$24 = 6 \times 4$ .  $162 = 4 \times 40 + 2$  puis  $40 = 6 \times 6 + 4$  ; le quotient est 6 et le reste est  $162 - 6 \times 24 = 18$ .



# III. Le modèle des organisations mathématiques

Le quadruplet  $(T, \tau, \theta, \Theta)$  s'appelle une *organisation mathématique* ; on précise dans ce cas *ponctuelle* car elle est relative à un seul type de tâches.

## Remarques

1. Une tâche ou un type de tâches sont *définis par un verbe d'action à l'infinitif* : « Calculer la somme des carrés des  $n$  premiers entiers naturels », « démontrer qu'un triangle est rectangle », etc.
2. « Calculer », « Démontrer » ne sont pas des types de tâches ; ce sont des *genres de tâches* sur lesquels on ne peut pas dire grand-chose (Y a-t-il des techniques pour calculer, démontrer sans qu'on sache quoi ?)

## IV. Analyse d'un extrait d'un document officiel

Extrait du document d'accompagnement, *Du numérique au littéral*, pp.4-5

Considérons les deux situations suivantes :

1. *Je pense un nombre, je le multiplie par 3. Au résultat obtenu je retranche 12, j'obtiens alors 7,5. Quel est le nombre pensé ?*

2. *Alice et Bertrand disposent chacun d'une calculatrice. Ils affichent un même nombre sur leur calculatrice.*

*Alice multiplie le nombre affiché par 3, puis ajoute 4 au résultat obtenu. Bertrand, lui, multiplie le nombre affiché par 2, puis ajoute 7 au résultat obtenu. Quand ils ont terminé, ils s'aperçoivent que leurs calculatrices affichent exactement le même résultat. Quel nombre ont-ils affiché au départ ?*

## IV. Analyse d'un extrait d'un document officiel

« Dans la seconde situation, ce cheminement n'est plus possible. L'élève va devoir expliciter le calcul effectué par chaque enfant à partir du nombre affiché au départ sur la calculatrice. Pour cela, il va lui falloir désigner ce nombre ; en mathématiques il est d'usage de recourir à une lettre. L'élève produit ainsi une équation :  $3x + 4 = 2x + 7$ . Pour en trouver la solution, il va soit **procéder par essais successifs** car la solution est ici facilement accessible, soit **remplacer l'équation par une équation équivalente plus simple à résoudre en utilisant les règles institutionnalisées liant égalité et opérations et en opérant sur des expressions désignant des « quantités » inconnues**. Sur ces deux points, il s'agit d'une rupture avec sa pratique antérieure qu'il ne faut pas minimiser ».

## IV. Analyse d'un extrait d'un document officiel

« Pour aider les élèves à accepter une autre approche qu'arithmétique de la résolution de problèmes, il est nécessaire de les confronter à des difficultés qui révèlent les limites des procédures dont ils disposent. Ainsi, proposer un problème où l'inconnue apparaît dans les deux membres de l'équation, comme dans l'exemple d'« Alice et Bertrand » qui conduit à une équation de la forme  $ax + b = cx + d$ , permet dans un premier temps, de **mettre en œuvre des procédures par essais et ajustements**. En faisant varier les nombres  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$ , l'obtention de la solution par cette démarche devient de plus en plus difficile voire impossible ».

« Pour  $a = 26$ ,  $b = 22$ ,  $c = 6$  et  $d = 149$ , la recherche « à la main » de la **solution (6,35)**, par **essais et ajustements**, devient problématique. Elle est possible **à l'aide d'un tableur** à condition toutefois de bien gérer les essais ».

## IV. Analyse d'un extrait d'un document officiel

$T$  : résoudre une équation du type  $ax + b = cx + d$ .

*Avec quelle techniques et quels éléments technologiques ?*

$\tau_1$  : « procéder par essais successifs », « mettre en œuvre des procédures par essais et ajustements »

$\tau_2$  : « remplacer l'équation par une équation équivalente plus simple à résoudre en utilisant les règles institutionnalisées liant égalité et opérations et en opérant sur des expressions désignant des « quantités » inconnues »

$\tau_3$  : « à l'aide d'un tableur à condition toutefois de bien gérer les essais »

**Des techniques incomplètes reposant sur des éléments technologiques implicites**



## V. Conclusion et enjeux

*Que souhaite-t-on mettre en place pour enseigner telle notion mathématique ?*

Dans le cadre de la *théorie anthropologique du didactique*, on définira *quel type de tâches* on veut que les élèves apprennent à accomplir, *avec quelle(s) technique(s)*, *sur quels arguments technologiques* on s'appuiera et éventuellement *quelle théorie* légitime l'ensemble.

*En fait, il s'agit de praxéologies.*



# V. Conclusion et enjeux

Rendre *objectifs* les faits d'enseignement afin de pouvoir les *observer*, les *analyser*, les *évaluer* et les *développer*.

- De quel type de tâches, qui est l'enjeu de l'étude, relève la tâche à accomplir ?
- La technique envisagée est-elle adaptée à la tâche à accomplir ?
- Les arguments pour élaborer et justifier la technique sont-ils accessibles aux élèves ?
- Ce travail est-il conforme à ce qui est attendu au niveau concerné ?





# VI. Références bibliographiques

Les processus de transposition didactique et leur théorisation,  
*1994, Chevallard*

[http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Les\\_processus\\_de\\_transposition.pdf](http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Les_processus_de_transposition.pdf)

Pourquoi la transposition didactique ?,  
*1996, Chevallard*

[http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/  
Pourquoi\\_la\\_transposition\\_didactique.pdf](http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Pourquoi_la_transposition_didactique.pdf)

Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques  
*1999, Chevallard*

[http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/  
Analyse\\_des\\_pratiques\\_enseignantes.pdf](http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Analyse_des_pratiques_enseignantes.pdf)

Enseigner les mathématiques à l'école élémentaire, Les quatre opérations  
sur les nombres entiers,  
*2009, Noirfalise A. & Matheron Y*