Étudier un savoir. Un modèle pour les organisations didactiques.

La démarche d'étude par la recherche de l'école primaire au lycée

13 janvier 2016

INSTITUT FRANÇAIS DE L'ÉDUCATION
UNIVERSITÉ DE LYON
ENS DE LYON

Un problème de l'enseignant

Sous quelles conditions les élèves étudieront-ils telle organisation mathématique ?

Comment décrire ces conditions ? Comment mettre en place telle organisation mathématique ?

PLAN

I. Le modèle des organisations didactiques : les moments de l'étude

II. Un exemple d' Activité d'Étude et de Recherche (AER)

III. Conclusion : quelques jalons pour concevoir une AER

I. Le modèle des organisations didactiques : les moments de l'étude

Un postulat

« **Quel que soit le cheminement de l'étude**, certains types de situations didactiques sont nécessairement présents **dans toute forme d'étude**. C'est ce que l'on appellera les moments de l'étude ou encore moments didactiques; l'ensemble de ces moments et la manière dont ils sont réalisés constitue **l'organisation didactique** ».(Chevallard, 1998)

I. Le modèle des organisations didactiques : les moments de l'étude

La TAD fournit un modèle permettant de donner une description des conditions d'étude mises en oeuvre en termes de ***six moments de l'étude***.

Le modèle des moments de l'étude est lié à la structure des **organisations mathématiques** : (T, τ, θ, Θ) avec T un type de tâches, τ une technique qui permet de l'accomplir, θ un discours technologique associé à la technique, Θ un discours théorique associé à θ.

I. Le modèle des organisations didactiques : les moments de l'étude

Pour l'enseignant, la question de trouver une situation didactique permettant la rencontre effective des élèves avec une ou des tâches génératrices de l'organisation mathématique à enseigner est centrale : c'est d'elle que découle en grande partie la qualité de l'enseignement et de l'apprentissage.

Tout savoir est réponse à une question.

Une question porteuse d'au moins *une raison d'être* du savoir à enseigner.

I.1) Le moment de première rencontre avec l'étude du type de tâches *T*

Exemple *t* : « Partager 162 bonbons en 13 enfants ».

Il s'agit d'une tâche *t* relevant d'un type de tâches plus général *T* : « Partager de façon équitable *n* objets parmi *m* personnes ».

La technique varie tout au long du cursus, des toutes petites classes à la connaissance de la technique de la division posée.

I. 1) Le moment de première rencontre avec l'étude du type de tâches *T*

Quels que soient les choix didactiques faits, il y a toujours *un moment où* les élèves vont rencontrer *pour la première fois* un type de tâches problématique dont la résolution est, précisément, l'organisation mathématique enjeu de l'étude et que le professeur a pour mission d'enseigner. Ce moment est appelé **le *moment de la première rencontre*** avec le type de tâches associé à cette organisation mathématique.

I. 2) Le moment d'exploration du type de tâches et de constitution d'un embryon de techniques

Classe n°4

Chez les tout petits, *t* : « partager équitablement parmi 13 enfants des bonbons et chercher combien il restera »

Manipuler et tâtonner : faire 13 tas différents en déposant un bonbon dans chaque tas dans un ordre donné jusqu'à ce que cela ne soit plus possible, puis dénombrer les tas et les bonbons restants.

C'est **un moment *d'exploration de la tâche et d'élaboration de la technique***. Mais d'autres tâches du même type seront nécessaires pour percevoir certains aspects de la technique : l'importance de l'organisation spatiale des 13 tas pour assurer un partage effectivement équitable.

I. 2) Le moment d'exploration du type de tâches et de constitution d'un embryon de techniques

Faire explorer le type de tâches et élaborer une technique

L'étude d'un problème particulier, spécimen du type étudié, apparaît non comme une fin en soi, mais comme un moyen pour qu'une technique de résolution se constitue.

I. 3) Le moment de constitution d'un environnement technologico-théorique

Le moment de sa constitution est **en interrelation étroite avec chacun des autres moments**.

Dès la première rencontre, il y a recours à un univers technologique voire théorique antérieurement élaboré, qui se précisera au cours de l'élaboration de la technique.

Exemple: partager 1 973 pièces d'or entre 26 guerriers et trouver combien il en reste.

$26 \times 75 \leq 1\,973 < 26 \times (75 + 1)$ avec $R = 1973 - 26 \times 75$

I. 3) Le moment de constitution d'un environnement technologico-théorique

Faire construire l'environnement technologico-théorique

La technique que l'on élabore sera produite en s'appuyant sur des éléments technologiques, justifiés par une théorie reconnue dans l'institution, (mathématique) ; ceux-ci justifient, contrôlent, et permettent de comprendre la pertinence de la technique.

Le moment de sa constitution est en interrelation étroite avec chacun des autres moments. Ainsi, dès la première rencontre, il y a recours à un univers technologique voire théorique antérieurement élaboré, qui se précisera au cours de l'élaboration de la technique.

I. 4) Le moment d'institutionnalisation de l'organisation mathématique

On identifie l'organisation mathématique élaborée et dont l'apprentissage est visé. Au cours des moments qui président à la construction de l'organisation mathématique, certains éléments, certaines formulations, ont pu être temporairement utilisés dans la classe.

Le moment de l'institutionnalisation est le moment au cours duquel il faut faire le point, s'accorder sur l'essentiel à retenir, et décider que certains éléments qui avaient vécu lors des moments précédents peuvent être oubliés.

I. 5) Le moment de travail de l'organisation mathématique

Ce moment vise à rendre la technique la plus fiable possible, à acquérir une plus grande maîtrise dans son utilisation.

Ceci suppose un corpus important de problèmes impliquant des tâches du même type permettant de s'exercer à l'utilisation de la technique, à son adaptation en fonction des tâches, variables bien que du même type, et de tester sa portée.

Exemple : *T* « déterminer le quotient et le reste dans la division euclidienne de deux entiers »

I. 6) Le moment de l’évaluation de l’organisation mathématique

La norme ayant été fixée au cours de l’institutionnalisation, on vérifie que le rapport personnel des élèves y est conforme ; c’est-à-dire, le plus souvent, que face à une tâche relevant d’une organisation mathématique enseignée, les élèves utilisent convenablement, afin de pouvoir l’accomplir, la technique qui a été institutionnalisée, et éventuellement en la justifiant.

On évalue aussi l’organisation mathématique : les tâches du type qu’elle permet d’accomplir

I. Les moments de l'étude : récapitulatif

Groupe I (Activités d'étude et de recherche [AER])

1. Moment de la (première) rencontre avec *T*
2. Moment de l'exploration de T et de l'émergence de la technique τ
3. Moment de la construction du bloc technologico-théorique (θ ; Θ)

Groupe II (Synthèses)

4. Moment de l'institutionnalisation de (*T*, τ, θ, Θ)

Groupe III (Exercices & problèmes)

5. Moment du travail de l'OM (*T*, τ, θ, Θ) (et en particulier de la technique τ).

Groupe IV (Contrôles)

6. Moment de l'évaluation.

I. Les moments de l’étude : récapitulatif

Découpage du processus didactique en« six moments de l'étude » ou « moments didactiques »,

Mais l'expression « moment » n'impose pas une représentation temporelle.

Plutôt des "passages obligés" quelque soit le déroulement de l'étude suivi.

Organisation didactique du type:

- Cours magistral : le moment technologique est la première étape de l’étude. Le temps des exercices permet aux élèves de comprendre à quels types de tâches sont associés les éléments technologiques enseignés.
- Activité d’Étude et de Recherche : développement des trois premiers moments.

II. Un exemple d' Activité d'Étude et de Recherche (AER)

On a choisi une tâche relativement familière *a priori*, mais rapidement *problématique* car, soit la mise en œuvre d'une technique connue semblant appropriée à la tâche devient rapidement très coûteuse, soit on ne dispose pas d'une technique permettant de l'accomplir ; dans les deux cas, il faudra « l'inventer » ou l'étudier.

Exemple : Étudier le type de tâches

T : résoudre une équation du premier degré du type

$$\boldsymbol{ax + b = cx + d}$$

II. Un exemple d’ Activité d’Étude et de Recherche (AER)

Problème 1 : Alice et Bertrand jouent avec leur calculatrice. Ils tapent le même nombre sur leur calculatrice. Alice lui ajoute 3, puis multiplie le résultat obtenu par 7. Bertrand multiplie le nombre affiché par 2 puis ajoute 6 au résultat. À leur grand étonnement, ils s’aperçoivent qu’ils obtiennent le même résultat.

Quel nombre Alice et Bertrand ont-ils pu choisir ?

$A(x) = (x + 3) \times 7$ *et* $B(x) = 2x + 6$; $S = \{-3\}$

II. Un exemple d' Activité d'Étude et de Recherche (AER)

Problème 2 : Alice et Bertrand jouent avec leur calculatrice. Ils tapent le même nombre sur leur calculatrice. Alice lui ajoute 2, puis élève le résultat au carré. Bertrand soustrait 2 au nombre affiché, élève le résultat au carré puis ajoute 8 fois le nombre de départ. À leur grand étonnement, ils s'aperçoivent qu'ils obtiennent le même résultat.

Quel nombre Alice et Bertrand ont-ils pu choisir ?

$A(x) = (x + 2)^2$ *et* $B(x) =(x - 2)^2 + 8x$; $S = \mathbb{R}$

II. Un exemple d' Activité d'Étude et de Recherche (AER)

Problème 3 : Alice et Bertrand jouent avec leur calculatrice. Ils tapent le même nombre sur leur calculatrice. Alice le multiplie par 11, puis ajoute 5 au résultat obtenu. Bertrand multiplie le nombre affiché par 4 puis ajoute 9 au résultat. À leur grand étonnement, ils s'aperçoivent qu'ils obtiennent le même résultat.

Quel nombre Alice et Bertrand ont-ils pu choisir ?

$A(x) = 11x + 5$ *et* $B(x) = 4x + 9$; $S = \{4 / 7\}$

II. 1. Réalisation conjointe des moments de la (première) rencontre avec le type de tâches et de l'émergence de la ou les techniques

Problème 1

$A(x) = (x + 3) \times 7$ *et* $B(x) = 2x + 6$; $S = \{-3\}$

Les élèves sont mis en groupe de quatre et on demande de noter leurs recherches après une phase d'exploration. Il y a des chances que les élèves commencent à tester des valeurs entières positives.

Comme ils ne trouvent pas de réponse, *il est possible qu'un élève suggère de tester avec des négatifs* ; dans ce cas la réponse est donnée par essais / erreurs. Même si les élèves souhaitent passer à la suite, puisque le problème est résolu, le professeur propose de noter au tableau les résultats trouvés par les élèves ayant testé pour diverses valeurs du nombre choisi.

II. 1. Réalisation conjointe des moments de la (première) rencontre avec le type de tâches et de l'émergence de la ou les techniques

Problème 1

$A(x) = (x + 3) \times 7$ *et* $B(x) = 2x + 6$; $S = \{-3\}$

Si les élèves n'ont pas eu l'idée de tester avec des négatifs, le professeur demande d'organiser les résultats en les rangeant ; par exemple en suivant les valeurs croissantes testées. On note les résultats au tableau et les élèves devraient alors constater que les valeurs trouvées sur les positifs « s'éloignent » de plus en plus.

A l'occasion de résultats différents trouvés par les élèves pour une même valeur, il est intéressant de faire écrire au tableau et sur leurs cahiers les calculs numériques conduisant à ces résultats ; cela permet de faire plus facilement advenir le passage à l'écriture littérale.

II. 2. Moments de l'exploration du type de tâches et de la portée de la technique

Problèmes 2 et 3

2) $A(x) = (x + 2)^2$ et $B(x) = (x - 2)^2 + 8x$; $S = \mathbb{R}$

3) $A(x) = 11x + 5$ et $B(x) = 4x + 9$; $S = \{4 / 7\}$

On leur fait en effet explorer, dans un premier temps, un certain nombre de tâches du type (par exemple, des tâches pour lesquelles il peut y avoir une solution, pas de solution, deux, voire « beaucoup » de solutions pour une équation de ce type…) Ceci les conduit à « inventer » des techniques pour les résoudre, puis à rencontrer la portée limitée des techniques utilisées ; ce qui les oblige à les évaluer et – c'est l'un des buts recherchés – à les améliorer, ou en changer. Une ou des techniques ont alors émergé pour le type de tâches « résoudre une équation du 1er degré à une inconnue », qu'il va falloir continuer d'étudier.

II. 2. Moments de l'exploration du type de tâches et de la portée de la technique

Problèmes 2 et 3

2) $A(x) = (x + 2)^2$ et $B(x) = (x - 2)^2 + 8x$; $S = \mathbb{R}$

Constat : il y a beaucoup de solutions pour le problème 2.

Deux questions devraient émerger :

Comment cela se fait-il ?

Et pour le 1er problème, comment être sûr qu'il n'y a pas d'autres solutions que l'on aurait oubliées ?

II. 3. Moments de l'émergence de la technique et de la construction du bloc technologico-théorique

Problème 3

3) $A(x) = 11x + 5$ et $B(x) = 4x + 9$; $S = \{4 / 7\}$

Les élèves ayant été exercés sur les problèmes précédents, ils devraient parvenir sans trop de difficultés soit à écrire sous forme algébrique $A(x)$ et $B(x)$, soit à utiliser directement un tableau permettant de tester diverses valeurs sans recourir à l'écriture algébrique. Puis à rechercher une solution, par essais et ajustements puisque c'est la seule technique dont ils disposent à ce stade. Cette technique a de fortes chances de ne pas permettre d'aboutir, mais permet de nouveau de faire des calculs, de noter que A et B sont croissantes, que A est inférieure à B pour des valeurs entières négatives ou nulles – entières car il est fort probable que ce soit les seules valeurs que l'on ait l'idée de tester –, et que A est supérieure à B dans le cas contraire, etc.

II. 3. Moments de l'émergence de la technique et de la construction du bloc technologico-théorique

Question : Comment faire pour se rapprocher de la solution ?

Moment d'institutionnalisation locale

On n'a pas trouvé la réponse exacte mais on sait que son écriture décimale débute par 0,57. Il est possible que ce soit un nombre qui n'est pas décimal.

Questions cruciales : On constate que l'écart (la différence) diminue ; jusqu'à combien va-t-il diminuer ? À quoi sera égale la différence lorsqu'on aura trouvé la solution ? [Quand deux nombres sont égaux, à quoi est égale leur différence ? Et à quelle condition sur la différence sait-on quand deux nombres sont égaux ?]

Moment d'institutionnalisation locale : Si $a - b = 0$, alors $a = b$

Si $a = b$, alors $a - b = 0$

II.3 Moments de l'émergence de la technique et de la construction du bloc technologico-théorique

Dans le cas où les écritures algébriques n'ont pas été utilisées au cours de la recherche des trois problèmes, alors le professeur propose aux élèves de se substituer au tableur en examinant les formules qu'on a dû lui fournir…On parvient ainsi à $11x + 5$ et $4x + 9$…

Question cruciale : Il faut donc trouver la valeur de x que l'on ne connaît pas encore, mais qui est comprise entre 0,57 et 0,58, et pour laquelle on aura : $11x + 5 = 4x + 9$, c'est-à-dire une différence $11x + 5 – (4x + 9)$ nulle.

Question cruciale : Peut-on trouver la valeur qui rend la différence nulle ?

Question cruciale : Peut-on être sûr que la valeur trouvée est la bonne ? Que c'est la seule ?

II.3 Moments de l'émergence de la technique et de la construction du bloc technologico-théorique

Moment d'institutionnalisation

Trouver la valeur de x qui rend l'égalité $11x + 5 = 4x + 9$ vraie (on dit que l'on résout l'équation), revient à trouver la valeur de x pour laquelle la différence $11x + 5 – (4x + 9)$ est nulle, soit $7x – 4 = 0$.

$$11x + 5 = 4x + 9$$

$$11x + 5 – (4x + 9) = 0$$

$$11x + 5 – 4x – 9 = 0$$

$$7x – 4 = 0$$

$$7x = 4$$

$$x = 4 / 7$$

II.4 Quelle organisation mathématique est visée ?

T : résoudre une équation du type $ax + b = cx + d$.

τ :

Remplacer l'équation $ax + b = cx + d$ par

$(ax + b) - (cx + d) = 0$

Réduire $(ax + b) - (cx + d)$. On obtient: $(a - c)\, x + b - d = 0$

Écrire $(a - c)\, x + b - d$ sous la forme $e\, x - f = 0$

Remplacer $e\, x - f = 0$ par $e\, x = f$

Écrire que : $x = e / f$

θ :

Si $a - b = 0$, alors $a = b$. Si $a = b$, alors $a - b = 0$.

Définition du quotient.

Propriété de distributivité.

III. Conclusion : quelques jalons pour concevoir une AER

Les élèves rencontreront-ils par leur travail l'organisation mathématique comme réponse à une question qu'ils auront explorée, c'est-à-dire comme étude et réponse à une tâche problématique ? Comment l'organisation de cette rencontre est assumée par l'enseignement ?

La réalisation de chacun des moments permet-elle de remplir la fonction de celui-ci ?

- Quel dispositif d'étude est prévu pour chacune des phases ?
- Quel est le travail respectif de l'enseignant et des élèves dans la réalisation de tel ou tel moment ?

III. Conclusion : quelques jalons pour concevoir une AER

« Le modèle des moments de l'étude a, pour le professeur, deux grands types d'emplois. Tout d'abord, il constitue une grille pour l'*analyse* des processus didactiques. Ensuite, il permet de poser clairement le problème de la *réalisation* des différents moments de l'étude. Comment conduire l'étude exploratoire d'un type de tâches donné ? Comment mener à bien l'institutionnalisation Comment réaliser le moment de l'évaluation ? Autant de questions qui se posent au professeur et auxquelles on répondra provisoirement par une formule générique : *en créant des situations didactiques adéquates*. Cette exigence, que l'on ne fera ici que repérer, est en fait d'autant plus complexe que le professeur est tout à la fois le *metteur en scène* et l'*acteur* de situations didactiques dont, le plus souvent, il est en outre le *concepteur*. » (Chevallard, 1999, p. 113)

VI. Références

Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, *1999, Chevallard*

http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Analyse_des_pratiques_enseignantes.pdf

http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/

http://guy-brousseau.com/

http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/documents/cdamperes

UNIVERSITÉ DE LYON

ifé INSTITUT FRANÇAIS DE L'ÉDUCATION

ENS DE LYON