Questions génératrices
Questions cruciales

Démarche d'étude par la recherche de l'école primaire au lycée

11 au 14 janvier 2016

Karine Drousset (IFE-ENSL) ; Yves Matheron (IFE-ENSL) ; Farida Méjani (IFE-ENSL) ; Serge Quilio (ESPE de l'Université de Nice) ; Sébastien Velon (IFE-ENSL)

La didactique comme savoir théorique sur la pratique enseignante, entre autres…

La théorie didactique, notamment celle des mathématiques, peut fondamentalement remplir la fonction de savoir théorique sur la pratique enseignante :

- Elle fournit des outils permettant l’observation, l’analyse, l’évaluation et le développement de situations d’enseignement des mathématiques
- Elle fournit au professeur de nombreux outils pour penser son métier et agir de façon raisonnée pour son exercice

Le constat : ce que l'on retrouve souvent aujourd'hui

- Un enseignement des mathématiques globalement immotivé dans le second degré…
- Des activités introductrives trop souvent faites de problèmes dérisoires ou de simples échauffements mettant en scène des pré-requis pour le cours à venir.
- Comme le dit Y. Chevallard l'enseignement "tend à prendre la forme d'une visite guidée de savoirs qu'on visite à la hâte, à l'instar de vestiges monumentaux autrefois vivants mais dont les raisons d'être, les fonctions vitales ont cessées d'être comprises"

Construire le savoir comme réponse à une question

Extraits de Gaston Bachelard, *La formation de l'esprit scientifique,* 1938 :

« Avant tout, il faut savoir poser des problèmes. Et quoi qu'on dise, dans la vie scientifique, les problèmes ne se posent pas d'eux-mêmes. C'est précisément ce sens du problème qui donne la marque du véritable esprit scientifique. ***Pour un esprit scientifique, toute connaissance est réponse à une question.*** S'il n'y a pas eu de question, il ne peut y avoir connaissance scientifique. Rien ne va de soi. Rien n'est donné. ***Tout est construit*****.** »

Gaston Bachelard, *La formation de l'esprit scientifique,* 1938

Situation fondamentale (correspondant à un savoir)

C'est un schéma de situation capable d'engendrer par le jeu des variables didactiques qui la déterminent, l'ensemble des situations correspondant à un savoir déterminé. Une telle situation, lorsqu'on peut l'identifier, offre des possibilités d'enseignement mais surtout une représentation du savoir par les problèmes où il intervient permettant de restituer le sens du savoir à enseigner.

Glossaire de quelques concepts de TSD(1998)

Guy Brousseau

Enseigner : faire rencontrer une question et (faire) construire une réponse

- Soumettre à l'étude un point du programme de mathématiques consiste pour l'enseignant à proposer une situation problématique : il s'agit de recréer, pour l'élève et ses pairs et sous la responsabilité d'un maître, une réponse à une question vue comme problématique pour les élèves lorsqu'ils la rencontrent pour la première fois.
- La levée de la problématicité constitue la connaissance du savoir dont on vise l'enseignement et qui apparaît ainsi, pour les élèves, comme une ***réponse à une question*** dont ils ont vécu l'aspect problématique.

Conséquences didactiques : l'existant et le possible vers lequel aller

Ostension directe (cours magistral) ou déguisée (activités des manuels)

⇓

*La responsabilité de produire la réponse incombe au professeur, **qu'est devenue la question ?***

Un enseignement par la recherche, l'investigation

⇓

*La responsabilité de **faire rencontrer la question** par les élèves et de leur **faire produire la réponse** incombe au professeur*

INSTITUT FRANÇAIS DE L'ÉDUCATION

Pour changer de paradigme

- Restaurer des raisons d'être de l'étude d'objets mathématiques.
- Partir de questions problématiques et n'introduire l'étude d'objets que parce que celle-ci peut contribuer à l'élaboration de réponses, éventuellement partielles, aux questions posées.
- Construire des propositions pour un enseignement des mathématiques basé sur une dynamique de questionnement:
- l'étude d'une question en appelle d'autres -> parcours d'études et de recherches.

Vers un autre type de processus d'étude et d'enseignement

Principe:

- Développer une genèse artificielle du savoir pour que les élèves rencontrent et éprouvent sa nécessité et sa fonctionnalité.
- Disposer d'une question qui engendrera l'étude des mathématiques par la recherche de réponses ; donc ***une question génératrice***, assez large, que puissent investir (et investiguer !) les élèves.

En amont de la démarche d'investigation: que souhaite-t-on enseigner?

- Déterminer une question génératrice : quelles sont les raisons d'être de la trigonométrie, les nombres, l'algèbre, l'étude des fonctions, la statistique, le triangle, les vecteurs, etc. ?
- Exemples:

✓ Comment déterminer la distance entre deux points dont l'un au moins est inaccessible ?

✓ Comment déterminer l'aire d'une surface ?

puis ***plusieurs questions du même type***

✓ Comment déterminer la distance entre ***ces*** deux points-ci, ***ces*** deux points-là, l'aire de ***ces*** surfaces ?

Un exemple: le théorème de Thalès au collège

- Ce qu'en dit le programme:

3.1 Figures planes Triangle : milieux et parallèles.	- Connaître et utiliser les théorèmes relatifs aux milieux de deux côtés d'un triangle.	Ces théorèmes sont démontrés en utilisant la symétrie centrale et les propriétés caractéristiques du parallélogramme ou les aires. Dans le cadre du socle commun, seules les propriétés directes de la droite des milieux sont exigibles.
** Triangles déterminés par deux parallèles coupant deux demi-droites de même origine.*	- **Connaître et utiliser la proportionnalité des longueurs pour les côtés des deux triangles déterminés par deux parallèles coupant deux demi-droites de même origine.*	*Le théorème de Thalès dans toute sa généralité et sa réciproque seront étudiés en classe de troisième.*

3.3 Agrandissement et réduction	- ** Agrandir ou réduire une figure en utilisant la conservation des angles et la proportionnalité entre les longueurs de la figure initiale et de celles de la figure à obtenir.*	** Des activités de construction (avec éventuellement l'utilisation de logiciels de construction géométrique) permettent aux élèves de mettre en évidence et d'utiliser quelques propriétés : conservation des angles (et donc de la perpendicularité) et du parallélisme, multiplication des longueurs par le facteur k d'agrandissement ou de réduction…* ** Certains procédés de construction peuvent être analysés en utilisant le théorème de Thalès dans le triangle.*

Un exemple: le théorème de Thalès au collège

- Et en classe de troisième:

Configuration de Thalès.	- *Connaître et utiliser la proportionnalité des longueurs pour les côtés des deux triangles déterminés par deux parallèles coupant deux droites sécantes.*	Il s'agit de prolonger l'étude commencée en classe de quatrième qui, seule, est exigible dans le cadre du socle commun.
	- *Connaître et utiliser un énoncé réciproque.*	La réciproque est formulée en tenant compte de l'ordre relatif des points sur chaque droite mais, dans le cadre du socle commun, les élèves n'ont pas à distinguer formellement le théorème direct et sa réciproque. L'utilisation d'un logiciel de construction géométrique permet de créer des situations d'approche ou d'étude du théorème et de sa réciproque.
Agrandissement et réduction. **[Reprise du programme de 4^e]**	- Agrandir ou réduire une figure en utilisant la conservation des angles et la proportionnalité entre les longueurs de la figure initiale et celles de la figure à obtenir.	Dans le cadre du socle commun, il est attendu des élèves qu'ils sachent, dans des situations d'agrandissement ou de réduction, retrouver des éléments (longueurs ou angles) de l'une des deux figures connaissant l'autre. En ce qui concerne les longueurs, ce travail se fait en relation avec la proportionnalité.

Un exemple: le théorème de Thalès au collège

- Et dans les nouveaux programmes du cycle 4:

Dans le thème

d'un cylindre, d'un cône ou d'une boule.	
Comprendre l'effet de quelques transformations sur des grandeurs géométriques	
Comprendre l'effet d'un déplacement, d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs, les aires, les volumes ou les angles. ➢ Notion de dimension et rapport avec les unités de mesure (m, m^2, m^3).	Utiliser un rapport de réduction ou d'agrandissement (architecture, maquettes), l'échelle d'une carte. Utiliser un système d'information géographique (cadastre, géoportail, etc.) pour déterminer une mesure de longueur ou d'aire ; comparer à une mesure faite directement à l'écran.
Repères de progressivité : Le travail sur les grandeurs mesurables et les unités de mesure, déjà entamé au cycle 3, est poursuivi tout au long du cycle 4, en prenant appui sur des contextes issus d'autres disciplines ou de la vie quotidienne. Les grandeurs produits et les grandeurs quotients sont introduites dès la $4^{ème}$. L'effet d'un déplacement, d'un agrandissement ou d'une réduction sur les grandeurs géométriques est travaillé en $3^{ème}$, en lien avec la proportionnalité, les fonctions linéaires et le théorème de Thalès.	

-

Un exemple: le théorème de Thalès au collège

- Et dans le thème D: espace et géométrie :

Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer	
Mettre en œuvre ou écrire un protocole de construction d'une figure géométrique. Coder une figure. Comprendre l'effet d'une translation, d'une symétrie (axiale et centrale), d'une rotation, d'une homothétie sur une figure.	Construire des frises, des pavages, des rosaces. Utiliser un logiciel de géométrie dynamique, notamment pour transformer une figure par translation, symétrie, rotation, homothétie. Faire le lien entre parallélisme et translation, cercle et rotation.
Résoudre des problèmes de géométrie plane, prouver un résultat général, valider ou réfuter une conjecture. ➢ Position relative de deux droites dans le plan. ➢ Caractérisation angulaire du parallélisme, angles alternes / internes. ➢ Médiatrice d'un segment. ➢ Triangle : somme des angles, inégalité triangulaire, cas d'égalité des triangles, triangles semblables, hauteurs, rapports trigonométriques dans le triangle rectangle (sinus, cosinus, tangente). ➢ Parallélogramme : propriétés relatives aux côtés et aux diagonales. ➢ Théorème de Thalès et réciproque. ➢ Théorème de Pythagore et réciproque.	Distinguer un résultat de portée générale d'un cas particulier observé sur une figure. Faire le lien entre théorème de Thalès, homothétie et proportionnalité. Utiliser la trigonométrie du triangle rectangle pour calculer des longueurs ou des angles. Démontrer, par exemple, que des droites sont parallèles ou perpendiculaires, qu'un point est le milieu d'un segment, qu'une droite est la médiatrice d'un segment, qu'un quadrilatère est un parallélogramme, un rectangle, un losange ou un carré. Etudier comment les notions de la géométrie plane ont permis de déterminer des distances astronomiques (estimation du rayon de la Terre par Eratosthène, distance de la Terre à la Lune par Lalande et La Caille, etc.).

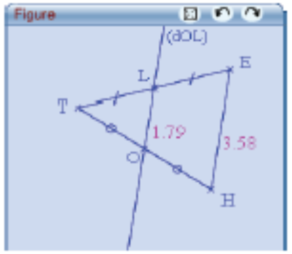
-

Un exemple dans un manuel de 4°

Activité 1 : Un triangle et deux milieux

1. Conjecture avec TracenPoche

a. Construis un triangle THE.
En utilisant le bouton , place le point O milieu de [TH] et le point L milieu de [TE].
Trace la droite (OL).
À l'aide du bouton , fais apparaître les longueurs des segments [OL] et [HE].

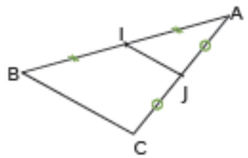


b. Déplace les sommets du triangle et note, sur ton cahier, les longueurs OL et HE pour quatre triangles différents. Que remarques-tu ?

c. Déplace les sommets du triangle. Comment semblent être les droites (OL) et (HE) ? Dans la fenêtre *Analyse*, saisis : « position(OL,HE) = » puis appuie sur la touche F9. Déplace à nouveau les sommets du triangle. Qu'indique Tracenpoche ?

2. Démonstration

a. Trace un triangle ABC, place I le milieu de [AB] et J le milieu de [AC].
On souhaite montrer que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles et que la longueur du segment [IJ] est égale à la moitié de celle du segment [BC].



b. Construis le point K symétrique de I par rapport à J. Montre que le quadrilatère AKCI est un parallélogramme. Que peux-tu en déduire pour les droites (KC) et (AI) ? Pour les segments [KC] et [AI] ?

c. Que peux-tu dire des segments [AI] et [IB] ? En utilisant le fait que les points A, I et B sont alignés et la question **b.**, que peux-tu dire des segments [IB] et [KC] ? Montre que le quadrilatère IKCB est un parallélogramme.

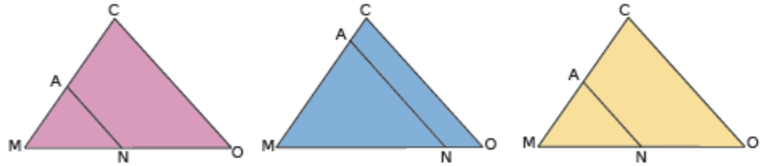
d. Déduis-en que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles. Montre que IJ = $\frac{1}{2}$ BC.

e. Écris les deux propriétés que tu viens de démontrer.

Activité 2 : Dans l'autre sens

1. Écris le théorème réciproque du théorème suivant : "Si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés alors elle est parallèle au troisième côté.".

2. Observe les figures suivantes, pour chacune d'elles (AN) et (CO) sont parallèles. Le théorème réciproque écrit à la question **1.** semble-t-il vérifié ?



3. Peux-tu faire une figure sur laquelle A est le milieu de [MC], les droites (AN) et (CO) sont parallèles mais N n'est pas le milieu de [MO] ?

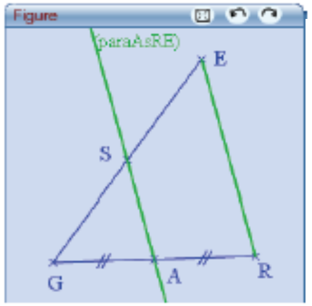
4. Quelle donnée faut-il ajouter pour que ce théorème soit vrai ?

Un exemple dans un manuel de 4°

Activité 3 : Un triangle, un milieu et des parallèles

1. Conjecture avec TracenPoche

a. Construis un triangle GRE et A milieu de [GR]. En utilisant le bouton construis la droite parallèle au segment [RE] passant par le point A.
À l'aide du bouton , nomme S le point d'intersection de cette droite avec [GE].
À l'aide du bouton , fais apparaître les longueurs des segments [GS] et [SE].



b. Déplace les sommets du triangle et observe la position du point S. Que constates-tu ?

2. Démonstration

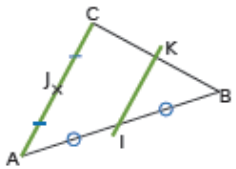
a. Trace un triangle ABC, place le point I milieu du côté [AB] et le point J milieu du côté [AC]. La parallèle au côté [AC] passant par I coupe le côté [BC] en K.
Le but est de montrer que le point K est le milieu du côté [BC].

b. Montre que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles et IJ = $\frac{BC}{2}$.

c. Montre que IJCK est un parallélogramme.

d. Déduis-en que IJ = KC puis que K est le milieu de [BC].

e. Écris la propriété que tu viens de démontrer.



Activité 6 : Le même dessin... à un détail près !

1. On considère un triangle POT tel que $\widehat{POT} = 47°$, $\widehat{PTO} = 33°$ et $\widehat{TPO} = 100°$.

a. Ce triangle est-il constructible ? Justifie ta réponse.

b. Construis-le et compare ton dessin avec celui de ton voisin. Sont-ils identiques ?

c. Avec ton voisin, complète le tableau suivant :

	PO	OT	TP
Longueur des côtés de ton triangle			
Longueur des côtés du triangle de ton voisin			

d. Est-ce un tableau de proportionnalité ?

2. Que dois-tu vérifier pour dire qu'une figure est un agrandissement ou une réduction d'une autre figure ?

La transposition didactique : un exemple dans un manuel de 1964

INSTITUT FRANÇAIS DE L'ÉDUCATION

CHAPITRE II

Le théorème de Thalès. Application au trapèze et au triangle.

THÉORÈME DE THALÈS

Segments déterminés par trois parallèles sur deux droites.

106. Considérons deux droites $x'x$ et $y'y$, et sur $x'x$ trois points A, B, C. Su posons que les segments AB et BC soient commensurables; ils admette alors pour partie aliquote commune un segment AU. Choisissons ce se ment pour unité de longueur, puis orientons-le de A vers U; nous avo alors orienté la droite $x'x$, et sur l'axe $\overrightarrow{x'x}$ ainsi défini, nous avons déte miné un vecteur unitaire $\overrightarrow{AU}$. Puisque le segment AU est une partie a quote commune aux segments AB et BC, il existe deux entiers relatifs et b qui vérifient les deux égalités vectorielles :

$$\overrightarrow{AB} = a.\overrightarrow{AU}$$

et

$$\overrightarrow{BC} = b.\overrightarrow{AU}. \qquad (1)$$

Le rapport des deux vecteurs colinéaires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ est donc égal à $\frac{a}{b}$; nous avons :

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{a}{b}. \qquad (2)$$

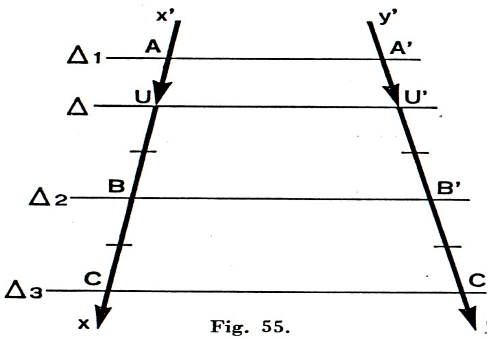


Fig. 55.

Sur la figure 55, nous avons : $a = +3$, $b = +2$, et $\frac{a}{b} = +\frac{3}{2}$.

107. On démontre et nous admettons que ces égalités restent vraies si le rapport des vecteurs colinéaires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ est irrationnel, c'est-à-dire si les segments AB et BC n'ont pas de partie aliquote commune.

Nous énonçons :

108. **Théorème de Thalès * : Si trois droites parallèles coupent deux droites, la première aux points A, B, C, la deuxième aux points A′, B′, C′, les vecteurs colinéaires ainsi déterminés vérifient l'égalité :**

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{B'C'}}.$$

109. Remarque importante : L'égalité : $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{B'C'}}$ n'a pas les propriétés d'une proportion entre nombres réels; en effet, ses deux membres n'ont de signification que si les vecteurs qui figurent dans un même membre sont colinéaires; on ne peut permuter les vecteurs qui occupent la place des extrêmes, ni les vecteurs qui occupent la place des moyens; le « produit des extrêmes » et le « produit des moyens » ne sont pas définis.

Réciproque du théorème de Thalès.

110. Soient deux droites $x'x$ et $y'y$; deux parallèles Δ_1 et Δ_2 coupent $x'x$ et $y'y$ respectivement aux points A et A′, B et B′ (fig. 56).

Une droite Δ_3 coupe $x'x$ et $y'y$ aux points C et C′, et nous supposons que les vecteurs colinéaires déterminés vérifient l'égalité :

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{B'C'}}.$$

Nous allons montrer que cette hypothèse implique le parallélisme de la droite Δ_3 et des deux parallèles Δ_1 et Δ_2.

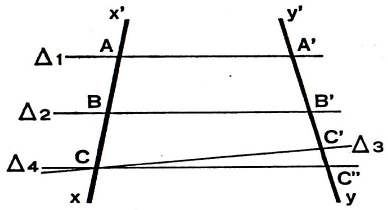


Fig. 56.

* Thalès, philosophe grec, né probablement à Milet (640-548 av. J.-C.).

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

La transposition didactique : un exemple dans un manuel de 1971

En lisant sur le dessin, complétez les égalités.

$g(\mathrm{C}) = \quad 3$	$g'\big(p(\mathrm{C})\big) = \ldots$
$g(\mathrm{D}) = -1$	$g'\big(p(\mathrm{D})\big) = \ldots$
$g(\mathrm{E}) = +3{,}5$	$g'\big(p(\mathrm{E})\big) = \ldots$
$g(\mathrm{F}) = \ldots$	$g'\big(p(\mathrm{F})\big) = -1{,}5$

Quelle remarque peut-on faire sur les deux nombres $g(\mathrm{M})$ et $g'\big(p(\mathrm{M})\big)$?

Nous appellerons plan réel le modèle mathématique de cette situation physique, plus précisément :

DÉFINITION

Un plan mathématique est appelé plan réel, s'il vérifie les deux axiomes suivants :
P_1) Toute droite de ce plan est une droite réelle.
P_2) (Axiome de THALÈS). Pour trois droites quelconques, Δ, Δ' et Δ'' de ce plan telles que la troisième ait une direction distincte de celles des deux premières, si p désigne la projection sur Δ' parallèlement à Δ''.
Pour toute graduation g de Δ, (A, B) étant le repère de cette graduation :
L'abscisse dans la graduation g d'un point quelconque de Δ, est égale à l'abscisse de sa projection $p(\mathrm{M})$ dans la graduation g' de repère $(p(\mathrm{A}), p(\mathrm{B}))$.

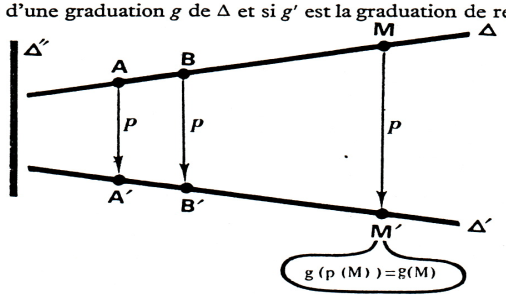
L'axiome de Thalès se traduit par :
Pour tout point M de la droite Δ

$$g'\big(p(\mathrm{M})\big) = g(\mathrm{M})$$

Dans toute la suite de ce livre quand nous parlerons de plan mathématique ou tout simplement de plan, il s'agira chaque fois, sauf précision du contraire, de plan réel.

Réciproquement : Étant donnée une droite Δ'' de direction distincte de celles des droites Δ' et Δ, si (A, B) est le repère d'une graduation g de Δ et si g' est la graduation de repère $\big(p(\mathrm{A}), p(\mathrm{B})\big)$ sur Δ' :

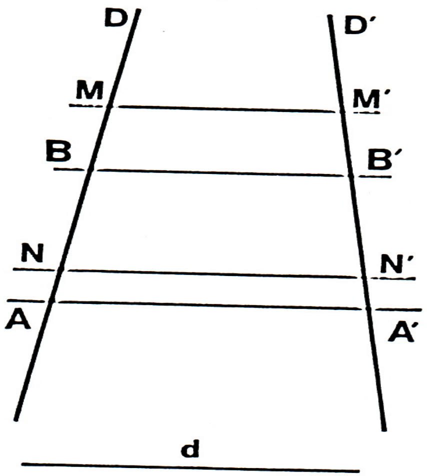
fig. 2



La transposition didactique : un exemple dans un manuel de 1980

INSTITUT FRANÇAIS DE L'ÉDUCATION

11.2. théorème de Thalès



Soit une direction d et deux droites graduées D et D′ n'appartenant pas à d. Quatre points A, B, M et N de la droite D se projettent en A′, B′, M′ et N′ sur la droite D′, selon d.

Si le quotient de $\overline{MN}$ par $\overline{AB}$ est égal au réel k alors le quotient de $\overline{M'N'}$ par $\overline{A'B'}$ est aussi égal à k.

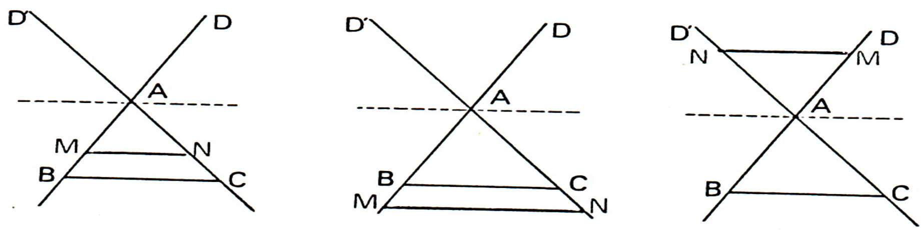
Cela se traduit,

*soit par : **si*** $\overline{MN} = k\,\overline{AB}$ ***alors*** $\overline{M'N'} = k\,\overline{A'B'}$,

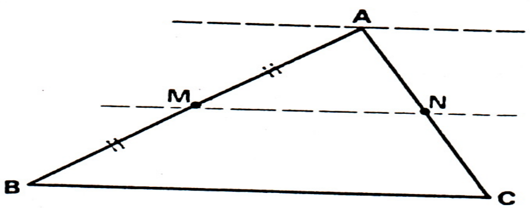
soit par : $\dfrac{\overline{MN}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{M'N'}}{\overline{A'B'}}$ **[Le quotient des mesures algébriques de deux bipoints quelconques de D est égal au quotient des mesures algébriques de leurs projections sur D′.]**

Cas particuliers.

- $k = 1$: si $\overline{MN} = \overline{AB}$ alors $\overline{M'N'} = \overline{A'B'}$.
- M confondu avec A : si $\overline{AN} = k\,\overline{AB}$ alors $\overline{A'N'} = k\,\overline{A'B'}$.
- Application au triangle.



Dans la projection de la droite D sur la droite D′ selon d, la direction de la droite BC, on a p (A) = A, p (B) = C et p (M) = N.



***Etant donné un triangle** ABC, **un point** M **de la droite** AB **et sa projection** N **sur la droite** AC **parallèlement à la droite** BC,*

on a : $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AN}}{\overline{AC}}$ ou ***si*** $\overline{AM} = k\,\overline{AB}$ ***alors*** $\overline{AN} = k\,\overline{AC}$.

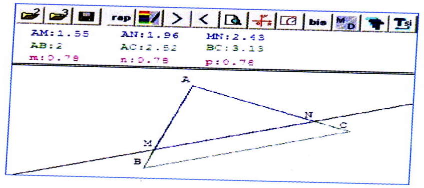
Si $k = \dfrac{1}{2}$ alors M est le milieu de [AB] et on retrouve le théorème : dans un triangle la droite passant par le milieu d'un côté et parallèle à un autre côté, coupe le troisième côté en son milieu.

La transposition didactique : un exemple dans un manuel de 2007

Activité 3 **Deux triangles : deux parallèles et deux sécantes**

A Conjecturer avec un logiciel de géométrie

1 **a.** Créer un **triangle** ABC.
b. Créer un **point** M libre sur le segment [AB].
c. Créer la **droite parallèle** à la droite (BC) passant par M, puis créer le **point d'intersection** N de cette droite et du segment [AC].
d. Créer le **segment** [MN].

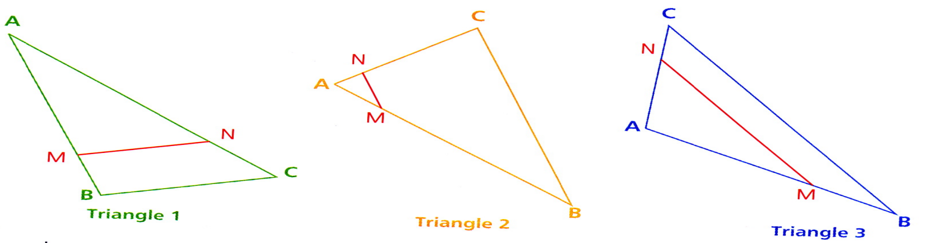


2 **a.** Afficher les **longueurs** des segments [AM], [AN], [MN], [AB], [AC] et [BC], arrondies au centième.
b. À l'aide de la **fonction calculatrice** du logiciel, afficher la valeur des quotients $\frac{AM}{AB}$, $\frac{AN}{AC}$ et $\frac{MN}{BC}$, nommés respectivement m, n et p.

3 **a.** **Déplacer** le point M sur le segment [AB]. Que remarque-t-on ?
b. **Déplacer** le point A, puis **déplacer** de nouveau le point M sur [AB]. Que remarque-t-on ?
c. Observe-t-on le même résultat lorsque l'on déplace le point B ou le point C ?

B Conjecturer avec une règle graduée

Dans chacun des trois cas suivants, ABC est un triangle, M et N sont deux points appartenant respectivement aux côtés [AB] et [AC] tels que : (MN) // (BC).



1 Pour chacun de ces trois triangles, mesurer avec une règle graduée les longueurs AM, AN, MN, AB, AC, BC, et consigner les résultats dans un tableau identique au tableau ci-contre. On donnera les longueurs en centimètre au millimètre près.

AM = --- cm	AN = --- cm	MN = --- cm
AB = --- cm	AC = --- cm	BC = --- cm
$\frac{AM}{AB}$ = ---	$\frac{AN}{AC}$ = ---	$\frac{MN}{BC}$ = ---

2 Compléter la dernière ligne des trois tableaux. On donnera les arrondis au dixième.

Pour conclure

Voir l'exercice 22, page 208

Lorsque M et N sont deux points appartenant respectivement aux côtés [AB] et [AC] d'un triangle ABC tels que la droite (MN) est parallèle à la droite (BC), que peut-on conjecturer pour les quotients $\frac{AM}{AB}$, $\frac{AN}{AC}$ *et* $\frac{MN}{BC}$?

Conclusion : la démarche d'investigation nécessite de changer de direction

- Faire vivre par les élèves les mathématiques comme ***réponses à des questions au sein d'une enquête*** dont ils partagent la responsabilité de la construction de réponse
- Les réponses, produites par la classe sous la direction du professeur, sont des mathématiques du programme
- Les réponses peuvent être partiellement fournies par le professeur en tant que média pourvu ***que les questions aient été rencontrées par les élèves***

Organisation mathématique autour du théorème de Thalès

Quels sont les types de tâches que l'on peut re[illegible]er?

Type de tâches associés

Eléments technologiques suggérés

3.1 Figures planes Triangle : milieux et parallèles.	- Connaître et utiliser les théorèmes relatifs aux milieux de deux côtés d'un triangle.	Ces théorèmes sont démontrés en utilisant la symétrie centrale et les propriétés caractéristiques du parallélogramme ou les aires. Dans le cadre du socle commun, seules les propriétés directes de la droite des milieux sont exigibles.
** Triangles détermin[illegible]eux parallèles coupan[illegible]emi-droites de mêm[illegible]e.*	*- *Connaître et utiliser la proportionnalité des longueurs pour les côtés des deux triangles déterminés par deux parallèles coupant deux demi-droites de même origine.*	*Le théorème de Thalès dans toute sa généralité et sa réciproque seront étudiés en classe de troisième.*
3.3 Agrandissement et réduction	*- * Agrandir ou réduire une figure en utilisant la conservation des angles et la proportionnalité entre les longueurs de la figure initiale et de celles de la figure à obtenir.*	** Des activités de construction (avec éventuellement l'utilisation de logiciels de construction géométrique) permettent aux élèves de mettre en évidence et d'utiliser quelques propriétés : conservation des angles (et donc de la perpendicularité) et du parallélisme, multiplication des longueurs par le facteur k d'agrandissement ou de réduction…* ** Certains procédés de construction peuvent être analysés en utilisant le théorème de Thalès dans le triangle.*

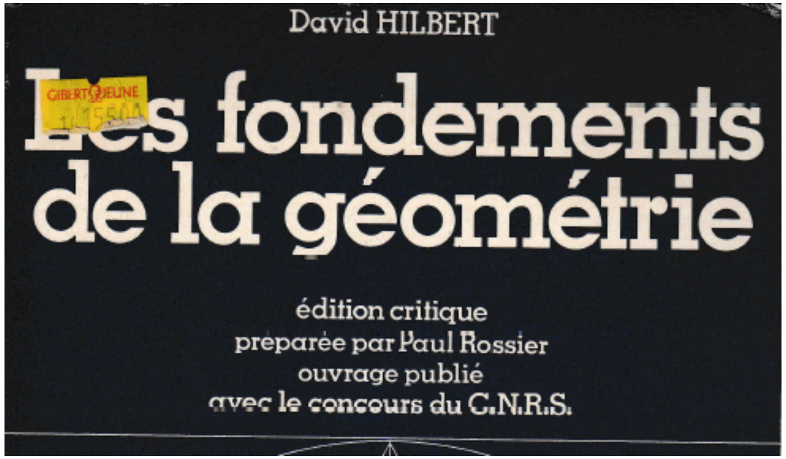
Un exemple: le théorème de Thalès au collège

À quelle(s) questions mathématique(s) l'étude du théorème de Thalès répond-elle ?

- Problèmes « d'agrandissements et réductions »

- Notion de similitude

La transposition didactique : un exemple chez Hilbert



et OBD, cette définition du produit est en accord avec celle donnée plus haut. D'après une remarque précédente, l'équation $ab = ba$ démontre le cas particulier du théorème de Pascal ; de celui-ci, on déduit comme ci-dessus la propriété associative. »

Al. 15, 3e-6e éd : Absence de l'expression : « ... pour les côtés d'un angle droit. »

4. *Proportions et similitude.*

1 Le calcul segmentaire permet d'établir rigoureusement la théorie euclidienne des proportions et cela sans recours à l'axiome d'Archimède.

2 **Définition.** Soient a, b, a', b' quatre segments quelconques ; on les dit liés par la proportion $a : b = a' : b'$ si l'équation $ab' = ba'$ est satisfaite.

3 **Définition.** Deux triangles sont dits *semblables* si leurs angles homologues sont congruents.

4 **Théorème 41.** Si a, b et a', b' sont des côtés homologues de deux triangles semblables, la proportion $a : b = a' : b'$ est satisfaite.

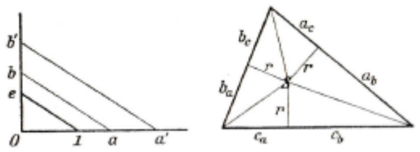
5 *Démonstration.* Examinons tout d'abord le cas où l'angle compris entre les côtés a et b (et aussi a' et b') est droit ; supposons les deux triangles reportés sur le même angle droit. A partir du sommet, sur l'un des côtés, portons le segment 1 et, par son extrémité, menons la parallèle aux deux hypoténuses ; sur le second côté, cette parallèle coupe le segment e. D'après notre définition du produit segmentaire.

$$b = ea \quad \text{et} \quad b' = ea' ;$$

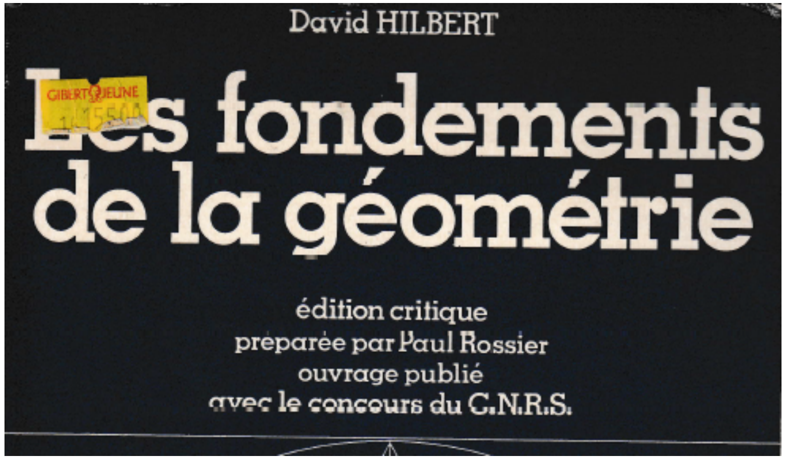
nous avons donc bien

$$ab' = ba' \quad \text{ou} \quad a : b = a' : b' .$$

6 Passons au cas général. Dans les deux triangles donnés, construisons les points de concours S et S' des bissectrices des angles ; l'existence de ces points résulte du théorème 25 ; de ces points, abaissons les perpendiculaires r et r' sur les côtés. Appelons a_b, a_c, b_c, b_a, c_a et c_b les segments obtenus sur les côtés a, b et c du premier triangle et a'_b, a'_c, b'_c, b'_a, c'_a et c'_b les segments homologues du second.



La transposition didactique : un exemple chez Hilbert



7 Le cas particulier démontré ci-dessus donne les proportions suivantes :

$$a_b : r = a'_b : r' ; \quad b_c : r = b'_c : r' ;$$
$$a_c : r = a'_c : r' ; \quad b_a : r = b'_a : r' .$$

8 La propriété distributive implique

$$a : r = a' : r' \quad \text{et} \quad b : r = b' : r' .$$

9 Appliquons la propriété commutative de la multiplication ; il vient

$$a : b = a' : b' .$$

10 Le théorème 41 conduit au théorème fondamental de la similitude :

11 **Théorème 42.** Si deux parallèles coupent sur les côtés d'un angle quelconque les segments a, b et a', b', la proportion $a : b = a' : b'$ est satisfaite. Réciproquement, si quatre segments a, b, a', b' satisfont à la proportion ci-dessus et sont reportés sur les côtés d'un angle, les droites qui joignent les extrémités de a et de b à celles de a' et de b' sont parallèles.

4.1 *Variantes.*

Al. 2, 1re éd. : Explication.
Al. 3, 1re éd. : Définition.
Al. 6, 1re éd. : Absence de la phrase relative à l'existence du point de concours des bissectrices.
Al. 6, 2e-6e éd. : La troisième phrase relative au théorème 25 est :
« ... L'existence du point de concours des bissectrices résulte des propriétés des triangles isocèles ; ... »

5. *Equations de la droite et du plan.*

1 Au système de segments précédent, adjoignons un système analogue. En s'appuyant sur les axiomes d'ordre, il est facile de distinguer sur une droite un sens « *positif* » et un sens « *négatif* ». Un segment AB qui jusqu'alors était désigné par a le sera encore par a si B appartient à la demi-droite positive, relativement à A ; dans le cas contraire, nous le désignons par $-a$. Un point constitue un segment 0. Le segment a est dit « *positif* », supérieur à 0 : $a > 0$; le segment $-a$ est « *négatif* », inférieur à 0 : $-a < 0$.

2 Dans le calcul segmentaire étendu à cet ensemble de segments, toutes les règles de calcul 1 à 16 (cf. III, § 1) sont valables. Insistons sur les faits suivants :

3 On a toujours : $a\,1 = 1\,a = a$ et $a\,0 = 0\,a = 0$.

Un exemple: le théorème de Thalès au collège

Partie 1 : Etude des triangles en fonction de leurs angles

Q 1 :

Qu'obtient-on quand on construit des triangles vérifiant des conditions sur leurs angles ?

Q 1 ' : Quand on fixe un angle.

Sur la feuille de papier calque distribuée, chacun de vous trace un triangle dont un angle mesure 43°.

Comparez votre triangle avec ceux de vos voisins de groupe.

Un exemple: le théorème de Thalès au collège

Q 1 " : Quand on fixe deux angles

Sur la même feuille de papier calque, construisez chacun un triangle ABC tel que $\hat{A}$ = 43° et $\hat{B}$ = 115

Comparez votre triangle avec ceux de vos voisins de groupe.

Un exemple: le théorème de Thalès au collège

Des mathématiques travaillées:

Propriété : la somme des angles d'un triangle est 180°.

Propriété : Si on connaît deux angles dans un triangle le troisième est déterminé.

Définition : Deux triangles qui ont les mêmes angles sont appelés triangles semblables

Conjecture : Lorsque des triangles sont semblables, il semble que si on les superpose en faisant coïncider un angle (sommet et support des côtés, quitte à retourner le calque), les troisièmes côtés des triangles sont parallèles.

Un exemple: le théorème de Thalès au collège

Conjecture :

Lorsque des triangles sont semblables, il semble que si on les superpose en faisant coïncider un angle (sommet et support des côtés, quitte à retourner le calque), les troisièmes côtés des triangles sont parallèles.

Devoir donné à la maison:

Tracer un triangle *ABC* de ton choix et construis un triangle *AEF*, semblable au triangle *ABC* et tel que les côtés [*AE*] et [*AB*] aient pour support la même demi-droite, ainsi que les côtés [*AF*] et [*AC*].

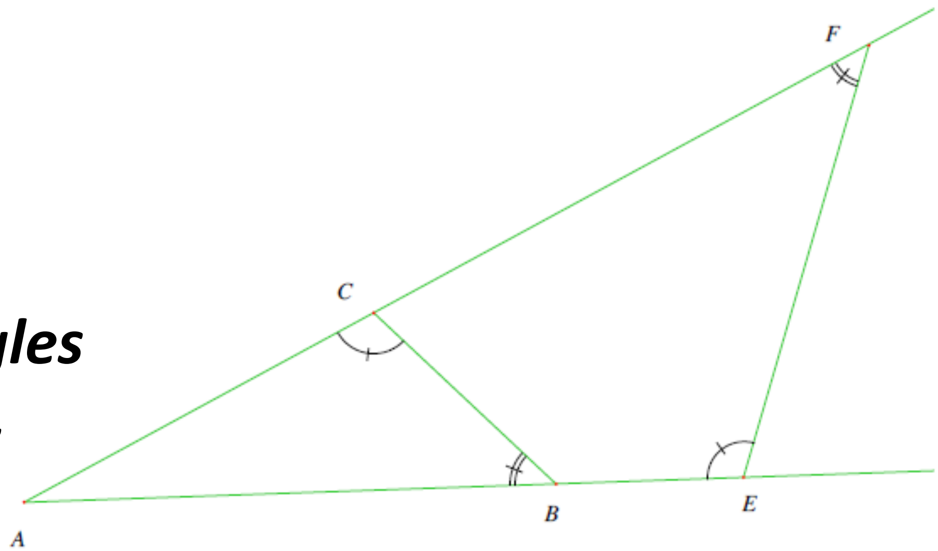
Démontrer que les droites (*BC*) et (*EF*) sont parallèles.

Un exemple: le théorème de Thalès au collège

Devoir donné à la maison:

Tracer un triangle *ABC* de ton choix et construis un triangle *AEF*, semblable au triangle *ABC* et tel que les côtés [*AE*] et [*AB*] aient pour support la même demi-droite, ainsi que les côtés [*AF*] et [*AC*].

Démontrer que les droites (*BC*) et (*EF*) sont parallèles.



Propriété :

ABC et AEF étant deux triangles semblables avec E ∈ [AB] et Ê = B^, F ∈ [AC] et F̂ = Ĉ ,

alors les droites (BC) et (EF) sont parallèles.

Partie 2 : Etude de la réciproque de la propriété qui vient d'être énoncée.

Q 2 : Soient un triangle *EFG* et une droite parallèle à (*FG*) qui coupe [*EF*] en *P*, et [*EG*] en *R*.

Peut-on affirmer que les triangles *EFG* et *EPR* sont semblables ? Prouvez votre réponse.

Q 3 : Vous avez trouvé beaucoup de triangles semblables. Je vous mets au ***défi*** de construire un triangle semblable aux autres, le plus grand possible, sur un calque de la même dimension.

Partie 3 : Utiliser le modèle « triangles semblables » pour prédire un résultat.

Propriété :

Si dans un triangle EFG, une droite parallèle à (FG) coupe les côtés [EF] et [EG] respectivement en P et R, alors les triangles EFG et EPR sont semblables.

Q 4 : « J'ai fabriqué moi aussi un triangle qui suit les mêmes contraintes que vous avez eues lors de la séance précédente (question 2) : triangle *ABC* tel que $\hat{A}$ = 43° et $\hat{B}$ = 115°. » J'ai choisi un côté [*AC*] de longueur 60 cm : pouvez-vous trouver la longueur des deux autres côtés ? »

Un exemple: le théorème de Thalès au collège

Conjecture :

Si deux triangles sont semblables, les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles. En particulier, pour des triangles ABC et AEF dans cette configuration (dessiner la configuration de Thalès), les longueurs, les longueurs AB, AC et BC d'une part et AE, AF et EF d'autre part, sont proportionnelles.

Partie 4: Etude du théorème de Thalès

Nous venons de vérifier sur plusieurs cas que

Dans un triangle ABC,

- *Si E appartient au segment [AB] et F appartient au segment [AC]*
- *Et si les droites (EF) et (BC) sont parallèles, alors on peut écrire :*

$$\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AF}=\frac{BC}{EF}\ \textbf{\textit{ou}}\ \frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$$

C'est ce que nous appelons le « théorème de Thalès dans les triangles », théorème admis que nous démontrerons dans certains cas particuliers

Cette configuration géométrique est appelée « configuration de Thalès »

Q 5 : à quoi sert de théorème?

Partie 5: Recherche d'une preuve du théorème de Thalès dans quelques cas particuliers.

Q 6 : Démontrer le théorème dans un cas particulier (cas ½).

Q 7 : Comment prouver qu'un point est le milieu d'un segment?

Partie 6 : Recherche d'une réciproque du théorème de Thalès dans le cas du rapport

Q 8 : Démontrer la réciproque du théorème dans un cas particulier.

Théorème (dit de la droite des milieux dans un triangle) :

La droite qui passe par les milieux de deux des côtés d'un triangle est parallèle au troisième.

Un exemple: le théorème de Thalès au collège

- Thème : théorème de Thalès
  - Question génératrice : enseigner la notion de similitude
    - Q1 :Qu'obtient-on quand on construit des triangles vérifiant des conditions sur leurs angles ?
      - Q 1 ' : Quand on fixe un angle.
      - Q 1 '' : Quand on fixe deux angles
    - Q 2 : Soient un triangle EFG et une droite parallèle à (FG) qui coupe [EF] en P, et [EG] en R. Peut-on affirmer que les triangles EFG et EPR sont semblables ? Prouvez votre réponse.
    - Q 3 : Vous avez trouvé beaucoup de triangles semblables. Je vous mets au défi de construire un triangle semblable aux autres, le plus grand possible, sur un calque de la même dimension
    - Q 4 : « J'ai fabriqué moi aussi un triangle qui suit les mêmes contraintes que vous avez eues lors de la séance précédente (question 2) : triangle ABC tel que Â = 43° et B̂ = 115°. » J'ai choisi un côté [AC] de longueur 60 cm : pouvez-vous trouver la longueur des deux autres côtés ? »
    - Q 5 : à quoi sert de théorème?
    - Q 6 : Démontrer le théorème dans un cas particulier (cas ½).
    - Q 7 : Comment prouver qu'un point est le milieu d'un segment?
    - Q 8 : Démontrer la réciproque du théorème dans un cas particulier.

- Pour chaque O. M. (type de tâche, technique, ...) à étudier, il est de la responsabilité de l'enseignant de créer et mettre en place les conditions visant à favoriser l'étude de cette organisation.

- Le problème se pose de ***décrire*** ces conditions.

Contrat didactique

" Dans toutes les situations didactiques, le maître tente de faire savoir à l'élève ce qu'il veut qu'il fasse, mais ne peut pas le dire d'une manière telle que l'élève n'ait qu'à exécuter une série d'ordres. Ce contrat fonctionne, dit-il, comme un système d'obligations réciproques qui détermine ce que chaque partenaire, l'enseignant et l'enseigné, a la responsabilité de gérer, et dont il sera d'une manière ou d'une autre, responsable devant l'autre. "

Guy Brousseau

Contrat didactique paradoxal

Le contrat didactique dans une démarche d'investigation « met le professeur devant une véritable injonction paradoxale : tout ce qu'il entreprend pour faire produire par l'élève les comportements qu'il attend, tend à priver ce dernier des conditions nécessaires à la compréhension et à l'apprentissage de la notion visée : si le maître dit ce qu'il veut, il ne peut plus l'obtenir. Mais l'élève est, lui aussi, devant une injonction paradoxale : s'il accepte que, selon le contrat, le maître lui enseigne les résultats, il ne les établit pas lui-même et donc il n'apprend pas de mathématiques, il ne se les approprie pas. Si, au contraire, il refuse toute information de la part du maître, alors, la relation didactique est rompue. Apprendre, implique, pour lui, qu'il accepte la relation didactique mais qu'il la considère comme provisoire et s'efforce de la rejeter ».

Des difficultés et des contraintes à développer des PER

- **La tyrannie de l'heure**

  Tout problème posé en début d'heure doit être rapidement résolu : problème de faible portée, souvent insignifiant.

  Les élèves ne s'engagent pas dans l'étude, ils attendent la solution que «docilement » ils essaieront d'appliquer dans les exercices proposés…

- **L'apprenant aux mains nues**

  Une question posée doit être telle que l' élève puisse y répondre avec son seul répertoire praxéologique et avec ce qui vient d'être vu en classe.

- **L'organisation des programmes**

  Nécrose des objets d'enseignement et monumentalisation

Conclusion

- Dans une DI, ***l'étude est à faire*** $\Rightarrow$ questionnement $\Rightarrow$ ***recherche de solution*** par les élèves et sous la direction du professeur

- Dans un problème de fin de chapitre, l'étude a ***été rédigée*** (par le professeur) de façon ***lacunaire*** $\Rightarrow$ étude supposée ***déjà faite*** $\Rightarrow$ travail de l'élève = ***combler les lacunes***

- Beaucoup des activités proposées par les manuels et utilisées en classe sont des ***exposés*** lacunaires ***de solutions***

-Pour diriger une DI en mathématiques, il est nécessaire de procéder au préalable à une ***analyse mathématique et didactique*** de laquelle émergent les questions cruciales. Les questions cruciales sont ***l'outil principal de la direction d'une DI en mathématiques***

Comment les savoirs peuvent-ils être enseignés et appris ?

- Par ostension
- Par un dispositif assurant une nouvelle genèse artificielle du savoir

« Si l'on accepte que l'apprentissage est une modification de la connaissance que l'élève doit produire lui-même et que le maître doit seulement provoquer, on est conduit à faire les raisonnements suivants. […] Le travail du professeur consiste donc à proposer à l'élève une situation d'apprentissage afin que l'élève produise ses connaissances comme réponse personnelle à une question et les fasse fonctionner ou les modifie comme réponses aux exigences du milieu et non à un désir du maître. »

Guy Brousseau, *Théorie des situations didactiques*, 1998

INSTITUT FRANÇAIS DE L'ÉDUCATION

Conclusion bis

La pédagogie des AER et, plus encore, celle des PER, exige des professeurs un remaniement profond de leur rapport au savoir et, ici, aux mathématiques. Pour le dire d'un mot : le savoir (mathématique), ce n'est plus quelque chose que l'on sait d'avance, c'est ce que l'on découvre de concert avec les élèves au cours d'enquêtes (« mathématiques ») – et peu importe que ces découvertes et autres trouvailles aient été connues de *y* ou pas, soient à portée de main ou durablement inaccessibles.

Yves Chevallard, 2009

Autres questions et connaissances professionnelles nécessaires

- Comment l'élève est-il censé réaliser le type de tâches problématiques dévolu ?
- Quelle sera la portée de la technique construite ?
- Quelles justifications pour la technique ?
- Quels aspects théoriques ou technologiques laisser questionnés ou non ?
- Pouvoir tenir un discours raisonné, un *logos*, sur les situations d'enseignement des mathématiques : sur-didactiques, didactiques et a-didactiques
- Disposer des outils fournis par la théorie didactique pour les construire