Divers types d'organisations mathématiques

La notion de Parcours d'Etude et de Recherche (PER)

Yves Matheron

Le 14 janvier 2016

Organisations mathématiques : récapitulatif et exemple

Organisation ***ponctuelle*** : $(T, \tau ; \theta ; \Theta)$ ***sujet***

Ex. : longueur d'un côté dans un triangle rectangle, connaissant deux autres

Organisation ***locale*** : $(T_i, \tau_i ; \theta ; \Theta)$ ***thème***

Ex. : chapitre sur le théorème de Pythagore

Organisation ***régionale*** : $(T_{ij} ; \tau_{ij} ; \theta_j ; \Theta)$ ***secteur***

Ex. : la géométrie plane

Organisation ***globale*** : $(T_{ijk} ; \tau_{ijk} ; \theta_{jk} ; \Theta_k)$ ***domaine***

Ex. : la géométrie

Poser une ou des questions qui engendrent « beaucoup » de mathématiques

ELEVES
Dynamique de l'étude de la question et de recherche entraîne vers sous-questions

PROFESSEUR
Chercher des sujets, en suivant le découpage du savoir

Domaines

$(T_{ijk}\,;\,\tau_{ijk}\,;\,\theta_{jk}\,;\,\Theta_k)$

$\downarrow\uparrow$

Secteurs

$(T_{ij}\,;\,\tau_{ij}\,;\,\theta_j\,;\,\Theta)$

$\downarrow\uparrow$

Thèmes

$(T_i,\,\tau_i\,;\,\theta\,;\,\Theta)$

$\downarrow\uparrow$

Sujets

$(T,\,\tau\,;\,\theta\,;\,\Theta)$

PROFESSEUR
Rechercher des questions génératrices en remontant aux niveaux secteurs et domaines

ELEVES
Remonter dans les niveaux et trouver une question donnant du sens à ce qu'ils ont appris

Comment faire ?... L'organisation mathématique dans le cas général

- Mener une enquête de nature épistémologique

- Peut-on didactiquement transposer au moins une des questions à l'origine du savoir à enseigner ?

- Vers quelles sous-questions la recherche amènera-t-elle ?

- Quelles réponses (savoir) ont-elles des chances d'être produites, quelle organisation mathématique possible ?

Comment faire ?... L'organisation didactique dans le cas général

- Quel milieu de connaissances disponibles chez les élèves pour l'attaque de la question (quelle question), quels medias éventuels à mettre à disposition ?

- Quel rôle attribuer aux élèves et au professeur dans la responsabilité de la recherche, dans celle de l'institutionnalisation ?

- Quelles difficultés potentiellement rencontrées par les élèves, quelle possibilité de les transformer en sous-questions ?

- Quel type d'avancée dans la recherche et dans la construction de la réponse ?

- Quel temps consacrer à la maîtrise des mathématiques ainsi construites ?

Comment faire ?...
L'organisation mathématique sur l'exemple d'un PER « relatifs » (extraits) (1)

- La construction mathématique classique de (**Z**, +, ×) permet d'engendrer les types de tâches suivants :

T_1 : définir les entiers relatifs

T_2 : définir une addition qui soit associative, commutative, possède un élément neutre, où tout élément admet un symétrique, qui étende celle dans **N**

T_3 : définir un ordre total sur **Z**, qui étende celui de **N**

T_4 : définir une multiplication interne qui soit associative, commutative, possède un élément neutre, soit distributive par rapport à +, sans diviseur de zéro, qui étende celle dans **N**

Construire, après symétrisation de **N**, un anneau, commutatif, unitaire et intègre ; une OM régionale, partie d'un secteur

Comment faire ?... L'organisation mathématique sur l'exemple d'un PER « relatifs » (extraits) (2)

Une OM transposée possible pour « construire » **Z**

• On appelle opérateur dans **N** la fonction de **N** dans **N** notée O (a, b) définie de la manière suivante :

- si $a \leq b$ alors $O(a, b)(x) = x + (b - a)$,

- si $a > b$ alors $O(a, b)(x) = x - (a - b)$.

Si $a \leq b$ on dit que O (a, b) ajoute $b - a$, et si $a > b$, on dit que O (a, b) soustrait $a - b$.

• Soit ***R*** définie par $O(a, b)$ ***R*** $O(c, d) \Leftrightarrow$ quel que soit l'entier naturel x : $O(a, b)(x) = O(c, d)(x)$, c'est-à-dire quel que soit x entier naturel pour lequel les calculs sont possibles dans **N** : $x + b - a = x + d - c$.

Comment faire ?... Question génératrice ou situation fondamentale

- T : Comment simplifier ***un programme de calcul*** mental du type : « à un nombre, on ajoute un second puis on soustrait un troisième » sur des tâches t_i : 2016 + 478 – 479 ou 2016 + 478 – 477 ? Et qu'est-ce qui justifie mathématiquement cette simplification ?
- τ : calculer la différence des deux derniers termes et l'ajouter ou la soustraire au premier
- θ : associativité de +, décomposition additive d'un nombre. Par exemple :

2016 + 478 – 479 = 2015 + (1 + 478) – 479 = 2015

- Conclusion : « ajouter 478 à un nombre puis lui soustraire 479 revient à soustraire 1 », codé -1

Comment faire ?...
Economie de l'écriture, exploration des types de tâches possibles

… + 7 – 10 = … – 3 ;

… + 8 – 6 = … + 2 ; etc.

Que se passe-t-il si on compose des opérateurs ?

Par exemple : - 3 + 2 qui revient à soustraire 3 à un nombre puis lui ajouter 2 ? - 5 + 5 – 1= ; + 7 – 4 – 3 = ; Etc.

- Question cruciale : « **Si ces entités étaient effectivement des nombres, qu'est-ce qu'on pourrait faire avec ? Pour cela, recherchons ce que c'est qu'un nombre, à quoi ça sert, ce qui se fait avec des nombres.** »

- Tâches problématiques : comment inventer une addition et une soustraction pour calculer 7 + (-2) ; 7 – (-2) ; 7 + (+2) ; 7 – (+2) ; -7 + (+2) ; -7 + (-2) ; etc. ?

Avancée du temps de l'étude par la recherche de nouvelles questions cruciales

Tâches problématiques : comment inventer une addition et une soustraction pour calculer 7 + (-2) ; 7 – (-2) ; 7 + (+2) ; 7 – (+2) ; -7 + (+2) ; -7 + (-2) ; etc. ?

• Questions cruciales engendrées par la recherche :

- « comment justifier que 7 + (-2) doit être égal à 5 ou que -7 + (-2) doit être égal à -9 ? »

7 + (-2) = 5 + 2 + (-2). Est-ce que 2 + (-2) = 0, et pourquoi ?

- « Est-ce que 7 – (-2) devra être égal à 5, 9, -9 ?... Et pourquoi ? »

- « On sait ordonner les positifs ; comment ordonner les négatifs ? »

- « Qu'est-ce qui justifie que -9 < -7 ? Comment mathématiquement le prouver ? »

Un parcours « algébrique » engendré par des questions portant sur le même objet « programmes de calcul »

- Comment modéliser des programmes de calcul ?
- Comment calculer sur des programmes de calcul ? Les rendre plus simples ?
- Comment savoir si deux programmes de calcul sont équivalents ?
- Si des programmes de calcul ne sont pas équivalents, peut-on trouver des valeurs pour lesquelles ils donnent le même résultat ? Un résultat du premier supérieur (inférieur) à celui du second ?
- Comment varient deux programmes de calcul l'un par rapport à l'autre ?

Des PER codisciplinaires non finalisés (M1 & M2 de Julia Marietti) (1)

Question : Un *milliard* (de dollars), c'est *mille* millions (de dollars) ; mais qu'est-ce qu'un *trillion* (de dollars) ?

Recherche (investigation ?) :

Un dictionnaire en ligne fournit cette première réponse : un trillion, ce serait *un milliard de milliards.* Mais un autre dictionnaire définit le trillion comme égal à *un million de billions.* Qu'est-ce alors qu'un *billion* ? Le même dictionnaire précise qu'un billion vaut *un million de millions.* En s'aidant du «comptage des zéros», l'atelier conclut finalement que les deux définitions s'accordent.

Mais une page du site Web du quotidien *Les Échos* propose : « Un trillion = mille milliards de dollars » !

Des PER codisciplinaires non finalisés (M1 & M2 de Julia Marietti) (2)

L'atelier examine alors un document *en anglais* "Where does one billion = 1,000,000,000?" : on y lit que ce serait le cas notamment aux États-Unis mais aussi en France, "before *3 May 1961*".

Cette précision répond à la question "Where does one billion = 1,000,000,000,000?". Dans la liste des pays, on trouve la France, dont la mention est assortie de cette précision : "By decree 61-501 of *3 May 1961,* modified by decree 75-1200 of *4 December 1975* and 82-203 of *26 February 1982.*"

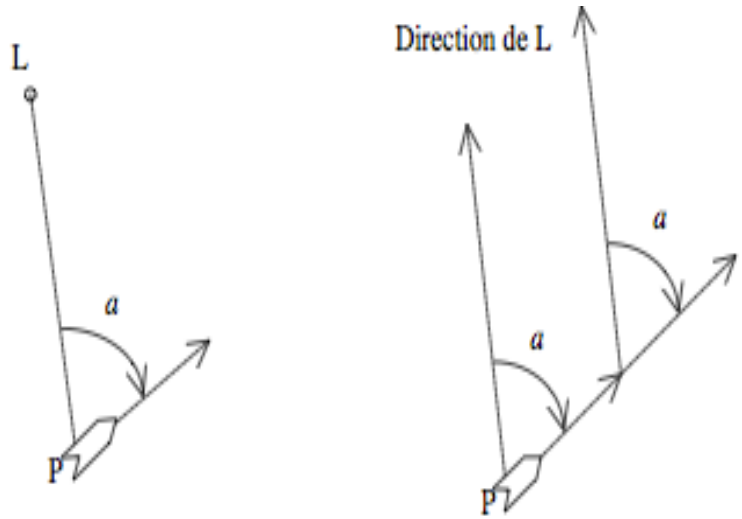
Le décret du 3 mai 1961, publié au *Journal officiel* du 20 mai 1961, précise dans son annexe : « Pour énoncer les puissances de 10 à partir de 10^{12}, on applique la règle exprimée par la formule : 16^{6N} = (N) illion. Exemples : 10^{12} = billion, 10^{18} = trillion, 10^{24} = quatrillion, 10^{30} = quintillion, 10^{36} = sextillion, etc. »

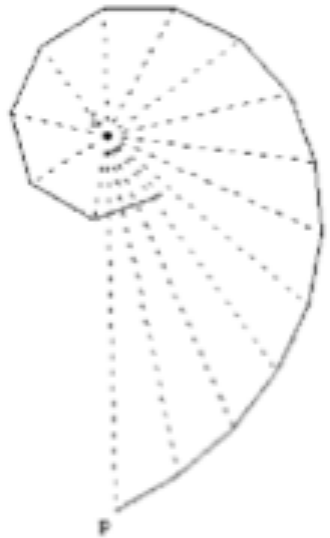
Au lieu de 16^{6N}, on devrait avoir 10^{6N} et, en conséquence, un correctif sera ultérieurement publié (dans le *Journal officiel* du 11 août 1961).

Des PER codisciplinaires non finalisés (M1 & M2 de Julia Marietti) (3)

Question. Pourquoi les insectes de nuit se précipitent-ils sur les sources de lumière ?

1re réponse : La première théorie est la « théorie de la Lune ». Son hypothèse de départ est qu'un insecte de nuit se guide, pour voler, sur une source de lumière L, selon le principe suivant : le papillon P vole en faisant un angle *a constant* avec la direction de la lumière.





Des PER codisciplinaires non finalisés (M1 & M2 de Julia Marietti) (4)

- Quelles sont les connaissances mathématiques antérieures des élèves sur lesquelles s'appuyer ?
- Quelles mathématiques du Collège enseigner ainsi ?
- Comment les faire étudier (construire, apprendre)

à partir de cette DI

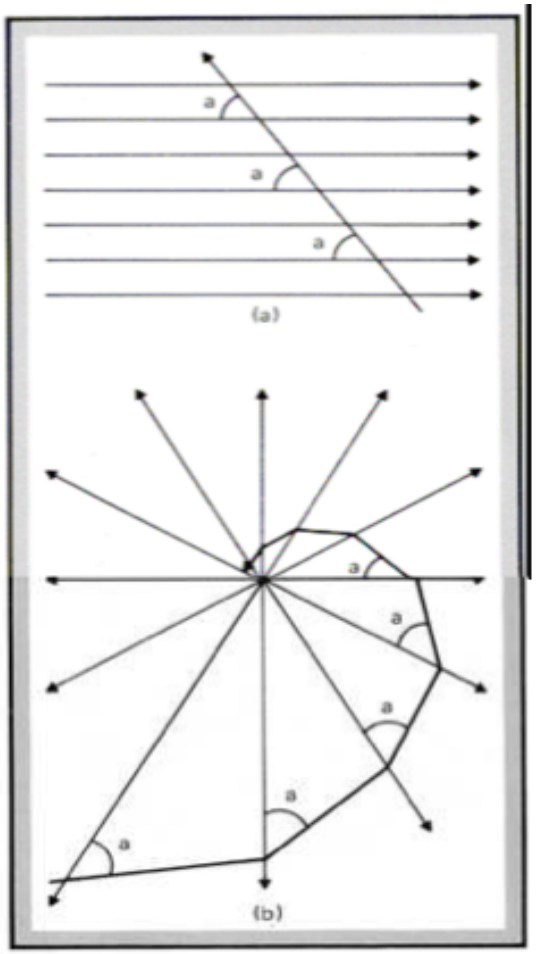


Figure 7–7
(a) A moth maintains a straight line when navigation is via rays of light that are from a distant source and thus essentially parallel. (b) But when the source is close by, maintenance of a constant angle with the light rays causes the moth to circle toward the source.