Redynamiser l'enseignement des mathématiques
L'exemple du produit scalaire

Yves Matheron

Institut Français de l'Éducation (IFÉ-ÉNS de Lyon)

21 janvier 2015

Plan

I. Quelques éléments d'un constat dressé sur l'enseignement des mathématiques

II. Références épistémologiques et didactiques

III. (Concevoir et Diffuser) des Activités Mathématiques et des Parcours d'Etude et de Recherche dans l'Enseignement Secondaire (CD)AMPERES

I. Exemple : programme de 1re S

INSTITUT FRANÇAIS DE L'ÉDUCATION

Intéressant en quoi ?

Produit scalaire dans le plan Définition, propriétés.	● Calculer le produit scalaire de deux vecteurs par différentes méthodes : - projection orthogonale ; - analytiquement ; - à l'aide des normes et d'un angle ; - à l'aide des normes. ● Choisir la méthode la plus adaptée en vue de la résolution d'un problème.	▣ Il est intéressant de démontrer l'égalité des expressions attachées à chacune de ces méthodes. ▣ La démonstration du théorème de la médiane fournit l'occasion de travailler le calcul vectoriel en lien avec le produit scalaire.
Vecteur normal à une droite.	● Déterminer une équation cartésienne de droite connaissant un point et un vecteur normal. ● Déterminer un vecteur normal à une droite définie par une équation cartésienne.	
Applications du produit scalaire : calculs d'angles et de longueurs ; formules d'addition et de duplication des cosinus et sinus.	▣ Déterminer une équation de cercle défini par son centre et son rayon ou par son diamètre. ▣ Démontrer que : $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$	La relation de Chasles pour les angles orientés est admise.

Pour faire … quoi ?

Une liste de contenus et de capacités sans réelles finalités

I. Une activité d'un manuel

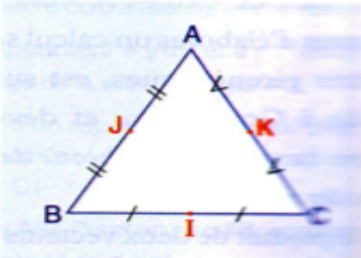
ACTIVITÉ

LES QUATRE EXPRESSIONS DU PRODUIT SCALAIRE

Le but de cette activité est de montrer sur un exemple les différentes faç de calculer un produit scalaire.

ABC est un triangle équilatéral, et dans l'unité de longueur choisie, AB =
On note I le milieu de [BC], K celui de [AC], J celui de [AB].

On pose $\vec{u} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, $\widehat{ABC} = \theta$.



1. Calculez $\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$.

INDICATION : $\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}) = \overrightarrow{BK}$.

2. Calculez $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta$.

3. Calculez AB x BI.

4. $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormal quelconque. On note $(x\,;y)$ les coo nées de $\vec{u}$ dans ce repère, et $(x'\,;y')$ celles de $\vec{v}$. Montrez que :

$$xx' + yy' = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) = \frac{9}{2}.$$

Rappel
Si le vecteur $\vec{n}$ a pour coordonnées $(a\,;b)$ dans un repère orthonormal, alors :
$\|\vec{n}\|^2 = a^2 + b^2$.

5. Calculez $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AC}$.
Reliez le résultat au fait que les vecteurs $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

Conclusion $\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta = AB \times BI = xx' +$

Chacun de ces nombres est appelé **produit scalaire** *de* $\overrightarrow{BA}$ *par* $\overrightarrow{BC}$.
On le note $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.

INSTITUT FRANÇAIS DE L'ÉDUCATION

I. Une autre activité de manuel

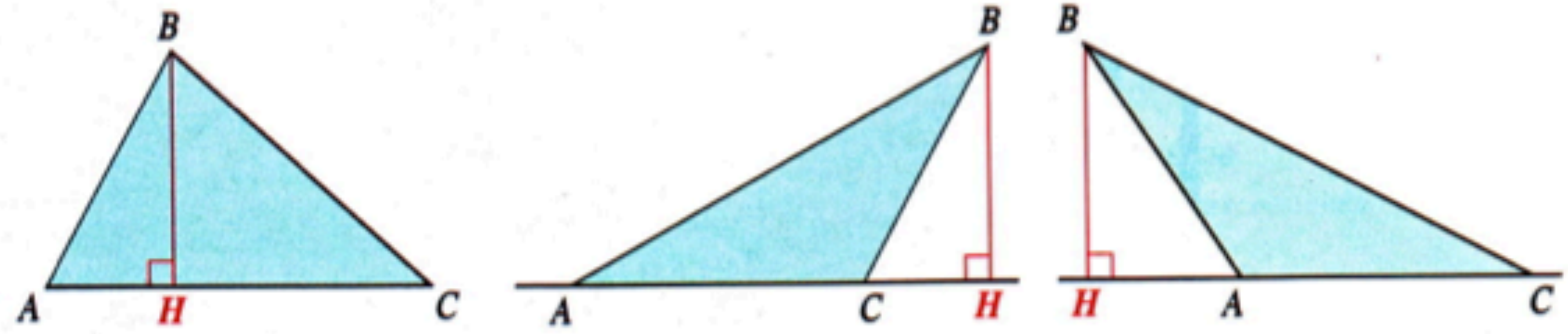
2. POSONS D'ABORD LE PROBLÈME

Le théorème de Pythagore permet de caractériser les triangles rectangles :
« *le triangle ABC est rectangle en A* » équivaut à « $AB^2 + BC^2 = BC^2$ »
ou encore « $\boldsymbol{AB^2 + AC^2 - BC^2 = 0}$ ».

Que se passe-t-il lorsque le triangle ABC n'est plus rectangle en A ? Nous voulons dire d'une façon plus précise :

- quelles interprétations peut-on faire de la différence $\Delta = AB^2 + AC^2 - BC^2$?
- ce nombre a-t-il une signification **géométrique ? analytique ? au niveau des vecteurs ?** etc.

C'est à l'étude de ces questions que nous allons nous consacrer. Pour cela, nous considérons un triangle ABC, H le projeté orthogonal de A sur $[BC]$ et distinguerons trois cas de figures, selon la position respective des points A, C et H.



cas I **cas II** **cas III**

III. Que faire ? Une production du groupe de Clermont-Ferrand (1)

Partir de questions

A quoi sert le produit scalaire en 1re S (c-à-d quels types de tâches permet-il de résoudre) ?

Il sert à :

* Démontrer que deux droites ou deux directions sont orthogonales.
* Déterminer un angle géométrique (via son cosinus).
* Etablir le théorème d'Al Kashi (Pythagore généralisé), qui sert à calculer des longueurs, à « résoudre » des triangles.

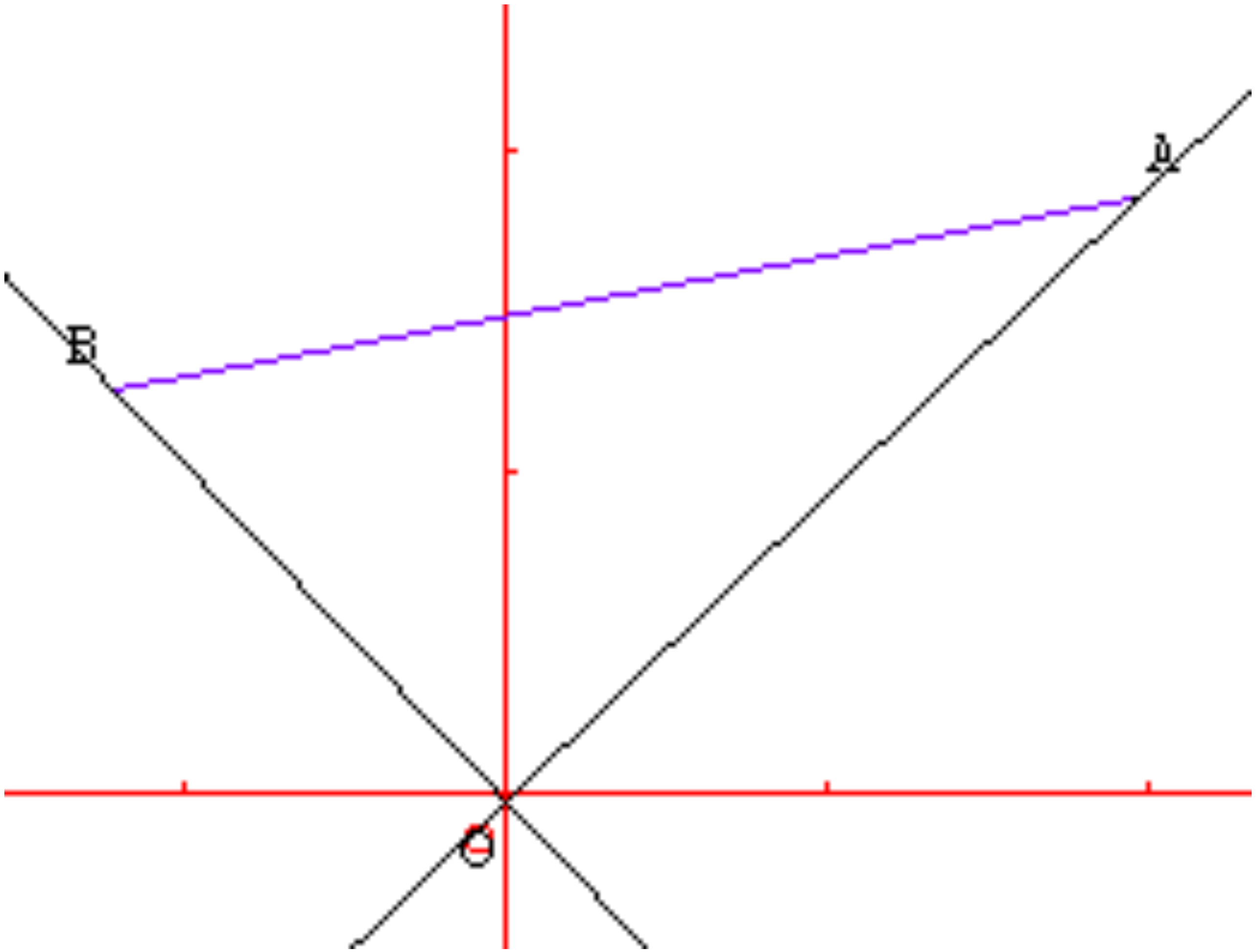
III. Que faire ? Une production du groupe de Clermont-Ferrand (2)

L'étude d'une question doit engendrer une dynamique de sous-questions qui se poseront « en raison »

Une question initiale Q_1 permet de poser Q_2 dont l'étude conduit à Q_3 etc.

Q_1 : « comment étudier des propriétés géométriques grâce au calcul ? » engendre des sous-questions, dont Q_n : « ayant étudié comment on peut démontrer que deux droites sont ou non parallèles, ***peut-on montrer par le calcul si deux droites sont perpendiculaires ?*** »

III. Que faire ? Une production du groupe de Clermont-Ferrand (3)



III. Que faire ? Une production du groupe de Clermont-Ferrand (4)

Diriger l'étude

1. Des élèves ont choisi $A(1,1)$ et $B(-1,1)$ (cas des bissectrices) trouvent « $1 \times (-1) + 1 \times 1 = 0$ » et ne savent que faire !

P : examiner ce qui se passe en translatant les deux bissectrices, ou si d'autres points sur les bissectrices.

$\Rightarrow$ rejeter les coordonnées de points au profit de celles de vecteurs.

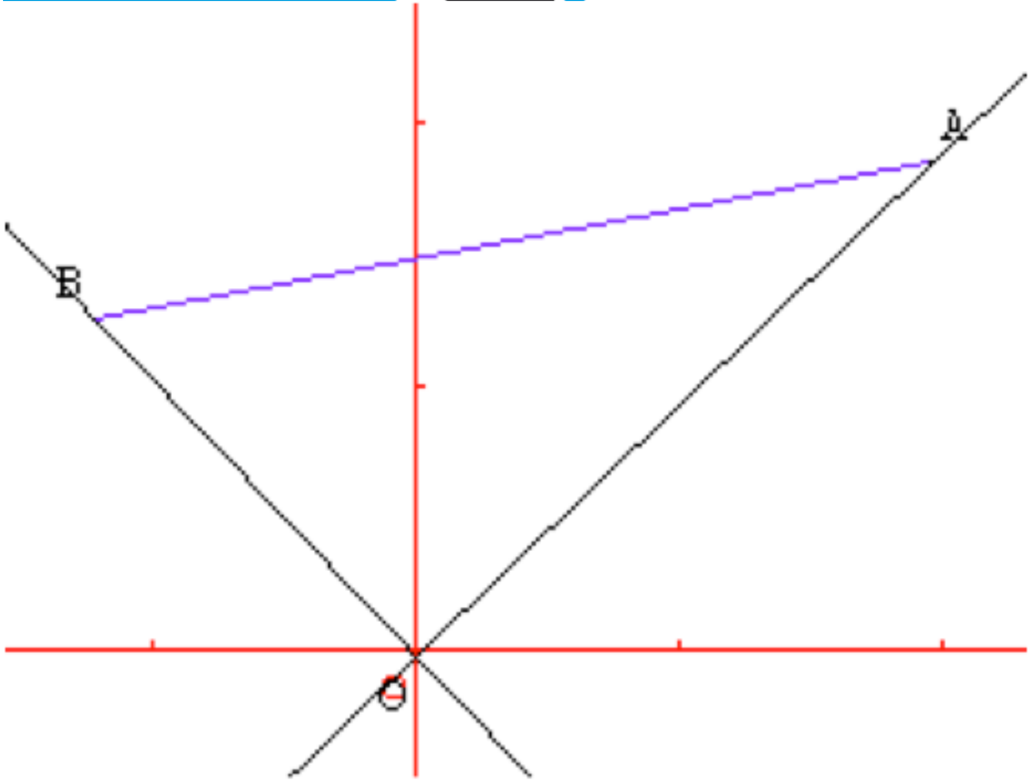
2. Des élèves travaillent à partir de $aa' = -1$

P : réfléchir à la signification de *a* et *a'* ; lien avec le parallélisme ?

3. $\Rightarrow$ chacun des groupes soupçonne que la réponse à la question étudiée est constituée du théorème de Pythagore.

4. Un bilan d'étape conclut ce premier moment d'étude.

III. Que faire ? Une production du groupe de Clermont-Ferrand (5)



- Nous avons :

$D \perp D'$

$\Leftrightarrow$ OAB triangle rectangle en O

$\Leftrightarrow AB^2 = OA^2 + OB^2$

$\Leftrightarrow 2(x'x + y'y) = 0$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{x'x + y'y = 0}$

Q_{n+1} : « Et si le repère n'est pas orthonormé ? »

Q_{n+2} : « Que vaut $xx' + yy'$ si D et D' ne sont pas perpendiculaires et est-ce que cela pourrait avoir une signification géométrique ? »

III. Que faire ? Une production du groupe de Clermont-Ferrand (6)

Q_{n+2} : « Que vaut $xx' + yy'$ si D et D' ne sont pas perpendiculaires et est-ce que cela pourrait avoir une signification géométrique ? »

Étude de la question

$\Rightarrow$ retour sur le calcul amenant $xx' + yy' = 0$

$\Rightarrow$ remarquer que $AB^2 - OA^2 - OB^2 = -2xx' - 2yy'$

$$\Rightarrow xx' + yy' = \frac{1}{2}(OA^2 + OB^2 - AB^2) = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2)$$

$\Rightarrow xx' + yy'$ ne dépend pas du repère orthonormal choisi

$\Rightarrow$ c'est un invariant géométrique (appelé produit scalaire)

III. Que faire ? Une production du groupe de Clermont-Ferrand (7)

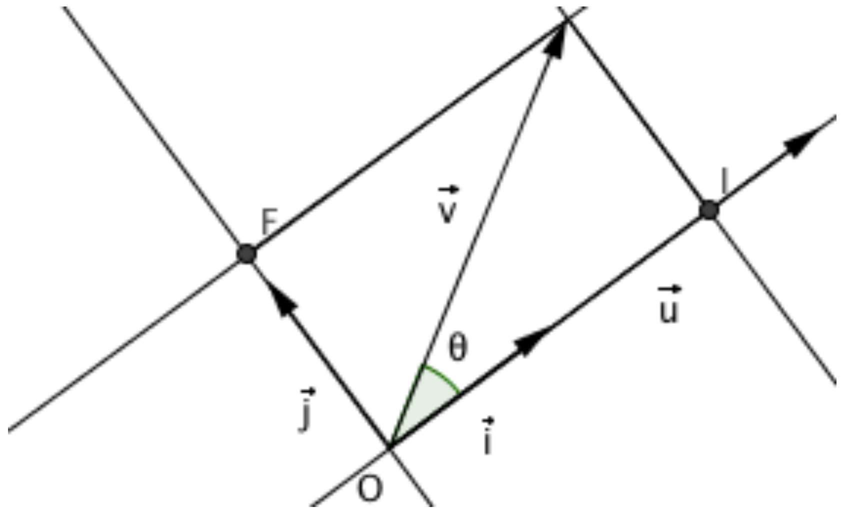
$$Q_{n+3} : « \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = \pm\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = 0,$$

et si $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} \neq 0$, que devient $\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$? »

Etude de la question

Quel repère, choisir pour écrire $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ avec $\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$

$$\overrightarrow{OB} = OB\,(\cos\theta\ \vec{i} + \sin\theta\ \vec{j}\ )$$



D'où :

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos\theta$$

III. Que faire ? Une production du groupe de Clermont-Ferrand (8)

Etude de la compatibilité des expressions trouvées :

$$\Rightarrow \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos\frac{\pi}{2} = OA \times OB \times 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OA} = OA \times OA \times \cos 0 = OA^2$$ Une longueur !

Nouvelle question :

Q_{n+4} : « Le produit scalaire peut-il servir à autre chose, par exemple des longueurs ? »

Q_{n+5} : « Connaissant OA, OB et l'angle en O dans le triangle OAB, peut-on calculer AB ? »

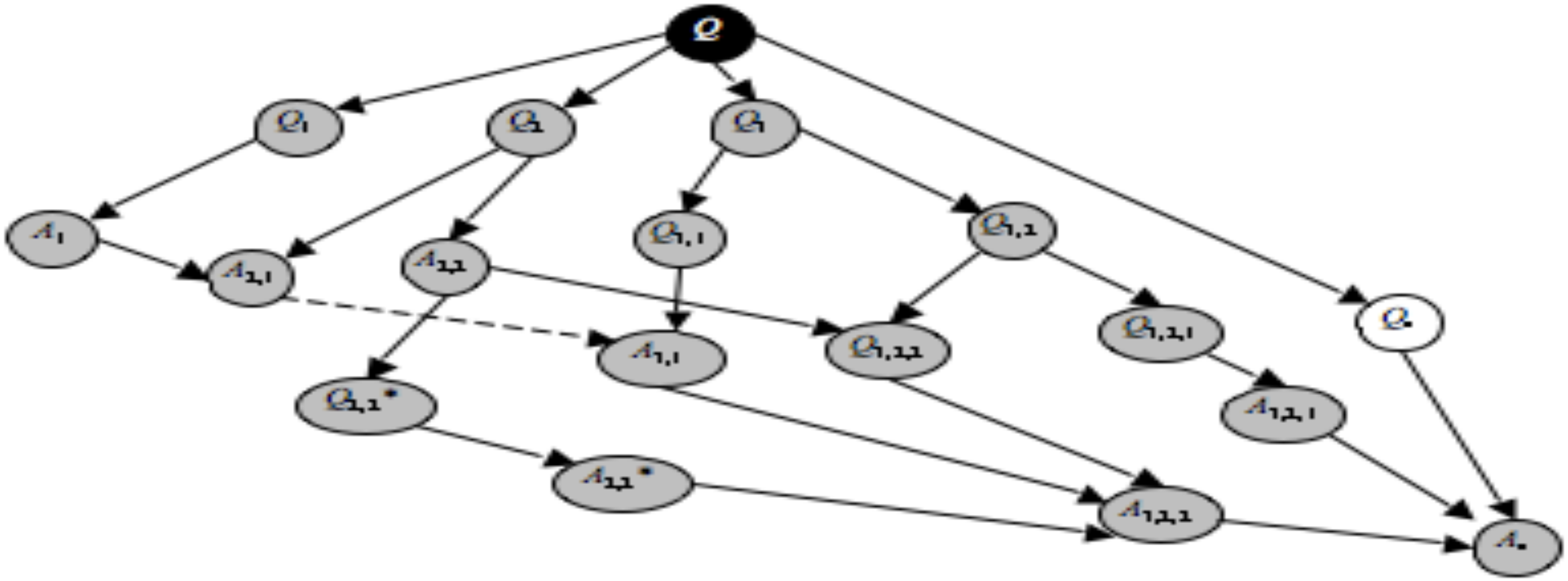
Calcul de $(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}).(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})$

III. Rôle du professeur dans des Activités et Parcours d'Etude et de Recherche

Le professeur devient ***directeur d'étude de la question***. Il a mis en place ***l'organisation des conditions pour la production d'une réponse possible*** à partir d'une question à laquelle la classe cherche à apporter collectivement une réponse qui sera le savoir du programme.

INSTITUT FRANÇAIS DE L'ÉDUCATION

III. D'autres exemples, des PER plus ouverts : Thrane (2009) (Danemark)



Q: Beginning with a video clip showing a three point shot in basketball, how can LoggerPro be used to model the shot and what suggestions can be made for a training program to improve the shot?

Q_1: Find a parametrization f: $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ of the curve captured by LoggerPro, following the ball from when it leaves the hand of the player till it reaches the area near the basket.

A_1: Fixing the origin at the point where the ball leaves the players hand at $t = 0$, and tagging a sufficient number of points through which the ball passes, Logger Pro produces a model of type $f(t) = (ct, -at^2 + bt)$ for $t \in [0, d]$, where a, b, c and d are positive decimal numbers, and $f(d)$ is the position of the ball as it hits the plate.

Q_2: How can the velocity of the ball at a point along the curve be found?

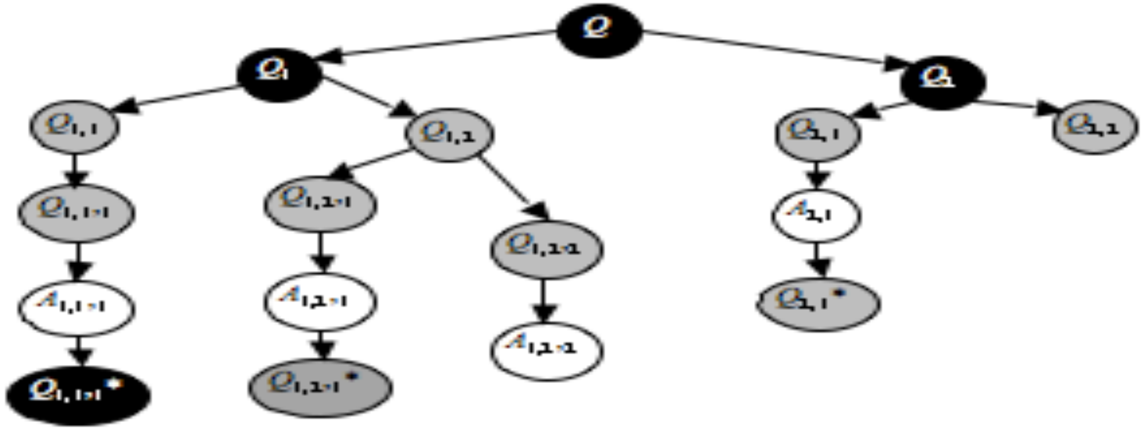
$A_{2,1}$: By differentiating the result in $A_{1,1}$ to get $f'(t) = (c, -2at + b)$

$A_{2,2}$: Using the same procedure as in $A_{1,1}$ but plotting instead the direction of the ball at a point, we get in principle $f'(t)$; however it appears that we get a small negative first order term in $f_1'(t)$, corresponding to a small horizontal deceleration ("backspin"). [The difference from $A_{2,1}$ can be explained by technical assets of Logger Pro.]

$Q_{2,2}$*: How does the shot depend on the "backspin" of the ball, which seems to cause the ball to "brake" in the vertical direction?

$A_{2,2}$*: With unchanged vertical acceleration (gravitation) $f_2''(t)$, it results in a smaller value of $f_1'(t) / f_2'(t)$.

III. D'autres exemples, des PER plus ouverts : Barquero (2007) (Espagne)



Q: You are given data showing the development of the size of a population of goose on an island, over a period of time. How can we predict its size at a later time?

Q_1: … discrete models, population size x_n given at times $t = nt_0$ where t_0 is fixed ("generation")

$Q_{1,1}$: … assuming that a generation depends only on the previous one : $x_{n+1} = f(x_n)$)

$Q_{1,1-1}$: … assuming constant relative growth: $x_{n+1} = (1+k)x_n$

$A_{1,1-1}$: Malthusian model, $x_n = (1+k)^n x_0$

$Q_{1,1-1}$*: The answer $A_{1,1,1}$ is unrealistic as growth is unlimited. How can assumptions be modified – what about other models of type $x_{n+1} = f(x_n)$, where f is a C^1-function?

$Q_{1,2}$: … assuming that the nth generation x_n depends on the d previous ones : $X_{n+1} = f(X_n)$, where

$X_n = (x_{nd}, x_{nd+1}, \ldots, x_{nd+d-1}) \in \mathbb{R}^d$

$Q_{1,2-1}$: …assuming linear model $X_{n+1} = AX_n$ where A is a $d \times d$ -matrix

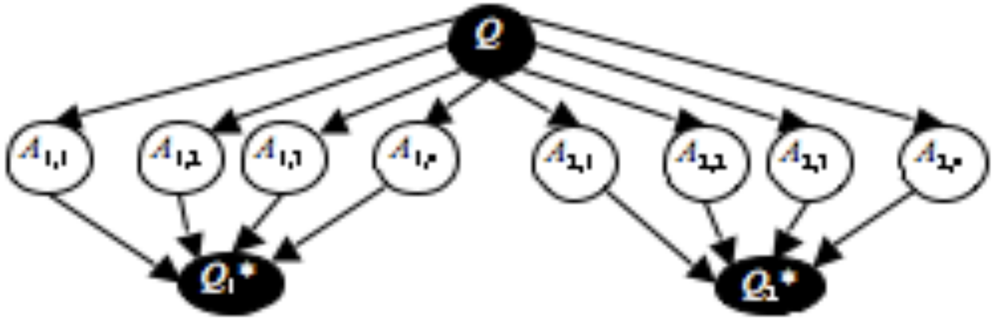
$A_{1,2-1}$: After n periods: $X_n = A^n X_0$

$Q_{1,2-1}$*: How does A^n behave? Stability as $n \to \infty$?

$Q_{1,2-2}$: ….assuming affine model $X_{n+1} = AX_n + b$ where A is a $d \times d$ -matrix and $b \in \mathbb{R}^d$, what happens?

$A_{1,2-2}$: After n periods: $X_n = A^n X_0 + \sum_{k=0}^{n-1} A^k b$ (stable as $n \to \infty$ under some conditions)

III. D'autres exemples, des PER plus ouverts : Miyakawa & Winsløw (2009) (Japon)



Q: Consider two rectangles, one measuring 3cm×5cm and another measuring 5cm×7cm. Are they of the same form or not – and why?

$A_{1,1}$: Yes, because they have the same angles.

$A_{1,2}$: Yes, because the difference between breadth and height is the same for the two triangles ($b_1 - h_1 = b_2 - h_2$)

$A_{1,3}$: Yes, because the breadths and heights differ by the same ($b_1 - h_1 = b_2 - h_2$).

$A_{1,*}$: Yes, because the larger rectangle is obtained by adding the same length to both sides of the smaller rectangle

$A_{2,1}$: No, because the angle between the diagonal and the base is different for the two rectangles.

$A_{2,2}$: No, because the ratio between height and breadth is different for the two triangles ($b_1/h_1 \neq b_2/h_2$).

$A_{2,3}$: No, because the ratio between the heights is different from the ratio of the breadths ($b_1/b_2 \neq h_1/h_2$).

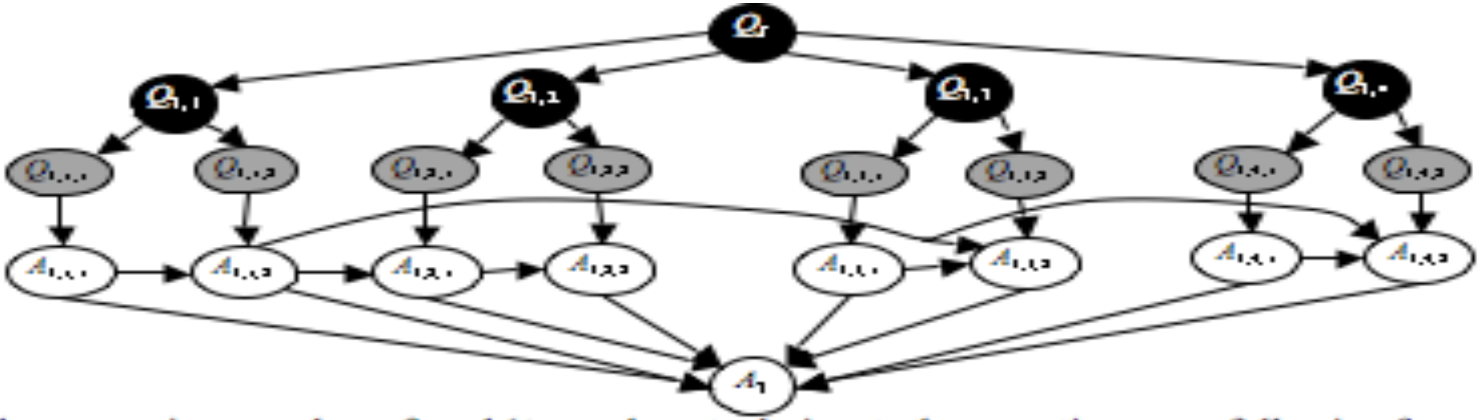
$A_{2,*}$: No, because if we magnify the small rectangle to have height 5cm, the breadth becomes 5cm*5/3 = 25cm/3 which is larger than 7cm.

Q_1*: Draw a rectangle with a different form from the smaller rectangle (3cm×5cm).

Q_2*: Draw a rectangle with the same form as the smaller rectangle (3cm×5cm).

Fig. 5: SRC diagram to analyse a Japanese "open approach" lesson.

III. D’autres exemples, PER relatifs en 5^e et 4^e (CD)AMPERES Marseille



Q_1: The expressions you have found ($+m$ and $-n$, to designate the operations on a following from calculations of type $a\ + b - c$, where a, b, c are "ordinary decimal numbers") can they be considered as numbers? Can you do wit them what you do with ordinary numbers – if so how?
$Q_{1,1}$: … can you add them ?
$Q_{1,1,1}$: if so, what would be the sum of +7 and +2?
$A_{1,1,1}$: In fact, as adding 7 and then adding 2 (or in fact, adding 2 then 7) corresponds to add 9, we can add these types as we add the corresponding numbers. We may thus identify $+m$ with m.
$Q_{1,1,2}$: Then how about the other ones, like the sum of +7 and –2, or the sum of –7 and –2 ?
$A_{1,1,2}$: As $+7 = 5+2$, and as adding 2 and then subtracting 2 is the same as adding 0, the sum of +7 and –2 is the sun $5+0 = 5 = 7–2$; so adding –2 is just subtracting 2; by a similar reasoning we get that the sum of –7 and –2 is –9.
$Q_{1,2}$: … can you subtract them ?
$Q_{1,2,1}$: if so, what would be the difference of +7 and +2 ?
$A_{1,2,1}$: Identifying $+m$ with m we get $7–2 = 5$.
$Q_{1,2,2}$: Then how about the other ones, like the difference of +7 and –2, or the difference of –7 and –2 ?
$A_{1,2,2}$: We get (for instance) $–7–(–2) = –7+2+(–2)–(–2) = –7+2 = –5$ by $A_{1,1,2}$.
$Q_{1,3}$: …can you compare (order) them?
$Q_{1,3,1}$: How about comparing numbers of type $+m$, like +7 and +2?
$A_{1,3,1}$: As we identify $+m$ with the ordinary number m, we order them as usual: $7 > 2$.
$Q_{1,3,2}$: How about comparing numbers like –7 and +2, or –7 and –2?
$A_{1,3,2}$: Extending the additive property of order, as $–7+8 = 1 < 6 = –2+8$ (using here $A_{1,1,2}$), we get $–7 < –2$, etc.
$Q_{1,4}$: …can you multiply them?

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

III. Les contraintes structurelles à dépasser pour une démarche d'Étude et de Recherche (1)

La tyrannie de l'heure…

Un problème posé en classe « devrait » être résolu dans les minutes qui suivent…

… et ce qui en résulte !

- les problèmes sont clos (questions enchaînées)
- le travail des élèves est étroitement balisé
- l'enseignement ne peut guère aller plus loin que celui du thème (le chapitre) réalisé par l'agrégation de quelques sujets traités en autant d'heures de classe
- les thèmes sont enseignés par blocs plutôt étanches

III. Les contraintes structurelles à dépasser pour une démarche d'Étude et de Recherche (2)

Le poids d'un certain « constructivisme » : les élèves « aux mains nues »…

Un problème étant posé, les élèves « doivent » tenter de le résoudre seuls et uniquement avec leurs connaissances antérieures.

… et ce qui en résulte !

- limitation forte des moyens d'étude
- des problèmes posés sans grande ouverture

III. Les contraintes structurelles à dépasser pour une démarche d'Étude et de Recherche (3)

Conséquences des pratiques enseignantes dominantes

- Du point de vue de l'élève, peu d'autonomie didactique

Car :

- pas de véritable dynamique d'étude de questions
- les mathématiques apparaissent comme des activités « gratuites »
- des formes d'étude très contraintes

III. Les obstacles à surmonter dans la gestion enseignante de la forme didactique propre aux AER et PER

Culturel **:** les organisations de savoir apparaissent généralement toutes faites dans la société, et non comme des réponses à des questions

Professionnel **:** problématiser un objet de savoir et non plus le décomposer en éléments simples pour l'enseigner est inhabituel

Conceptuel **:** s'engager dans des gestes enseignants nouveaux, diriger une recherche et se retenir d'enseigner, gérer l'imprévu, etc.

De légitimité **:** didactique et épistémologique

De formation **:** à débattre avec le champ politique !…