Brouillon pour une partie de la géométrie en 5^e (symétrie centrale)

Idée générale

On sait que toute rotation affine se décompose d'une infinité de manières en produits de deux symétries orthogonales ; l'un des axes pouvant être choisi arbitrairement parmi les droites qui passent par le centre de la rotation. L'angle de la rotation est le double de l'angle des droites axes des symétries.
Cas particulier : une symétrie centrale étant une rotation d'angle π, toute symétrie centrale se décompose d'une infinité de manières en produit de deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires sécants en le centre de symétrie.

On se fonde sur les « connaissances antérieures des élèves » venant de 6^e, et essentiellement sur celles portant sur la symétrie orthogonale, afin de rencontrer la symétrie centrale et de construire ses propriétés. Il s'agit bien entendu, lorsque sont évoquées les « connaissances antérieures des élèves », des connaissances antérieures telles qu'on peut les trouver exposées dans le programme de 6^e et telles qu'elles sont supposées disponibles dans une classe de 5^e qui a suivi un enseignement de la symétrie orthogonale en 6^e. Il resterait à connaître et pour cela à faire une étude sérieuse des points d'appui effectifs dont disposent les élèves et des manques qui vont constituer des difficultés à lever. De ces connaissances antérieures, et selon la linéarité du temps didactique, on en tire des applications possibles pour étudier les parties du programme de géométrie qui s'y prêtent.

La première idée directrice, qui constitue « un petit parcours d'étude et de recherche », est de faire rechercher la raison pour laquelle le point d'intersection des axes est milieu du segment des points homologues. Une fois ce résultat établi, on peut parler de symétrie centrale, car l'étude de cette notion est alors elle-même fondée en raison. Quand on fait successivement deux symétries d'axes perpendiculaires, on a une nouvelle transformation qu'on a commencé d'étudier et à qui on a donné un nom : « symétrie centrale ». Cette transformation « ne tombe plus du ciel », comme c'est encore trop souvent le cas dans les manuels du commerce distribués aux élèves ; et aussi dans les manuels de mathématiques de niveau plus élevé. Il devrait en être de même pour la venue des rotations et des translations, si tant est qu'elles soient revenues dans le programme du Collège.

Les raisons didactiques s'appuient sur les raisons mathématiques : les isométries planes sont engendrées par les symétries orthogonales. Il devient alors possible et simple de montrer que les propriétés d'isométries des symétries orthogonales sont « transportées » vers les symétries centrales : conservation des longueurs et des angles, donc des aires, droite transformée en droite, cercle en cercle, figures en figures « superposables », c'est-à-dire isométriques, que cette isométrie soit un déplacement ou un antidéplacement (retournement de la feuille du calque). D'autres propriétés spécifiques des symétries axiales sont à étudier qui les différencient des symétries orthogonales : points invariants (c'est la suite du problème de la recherche du milieu : les axes sont invariants point par point dans une symétrie orthogonale, donc lorsqu'on compose deux symétries orthogonales d'axes non parallèles, les seuls points invariants sont ceux qui appartiennent aux deux axes, donc leur unique point d'intersection), et image d'une droite qui est une droite parallèle ou confondue dans une symétrie centrale.

Première séquence

La première partie est l'étude « directe » d'une configuration : on affirme que deux figures données (deux triangles) sont superposables à partir de la composition de deux symétries orthogonales. On cherche quelles sont ces symétries (il y en a une infinité) et on en exhibe quelques-unes. On observe certaines propriétés observées qui ont valeur de conjectures : par exemple le fait que tous les axes sont deux à deux perpendiculaires, qu'ils sont concourants en *un point qui semble être le milieu* des segments d'extrémités les points deux à deux homologues des figures données. On se demande pourquoi il en est ainsi ; la recherche de la « réponse mathématique » est renvoyée à plus tard même si d'ores et déjà des idées et propositions sont susceptibles d'être données par des élèves.

La deuxième partie est une étude « réciproque ». On se donne une figure (un triangle) et on lui applique successivement deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires : obtient-on ainsi une figure « semblable » à celle donnée dans la première partie (les côtés du triangle obtenu semblent « inversés ») ? A-t-on de nouveaux les mêmes propriétés : « superposabilité » (ce qui veut dire conservation des longueurs et des angles), point d'intersection des axes milieu des segments des points homologues ? Si on change les axes, tout en veillant à ce qu'ils soient perpendiculaires en le point d'intersection des deux précédents, obtient-on la même figure finale ou bien une autre ? *A-t-on toujours cette curieuse « propriété du milieu » ?*

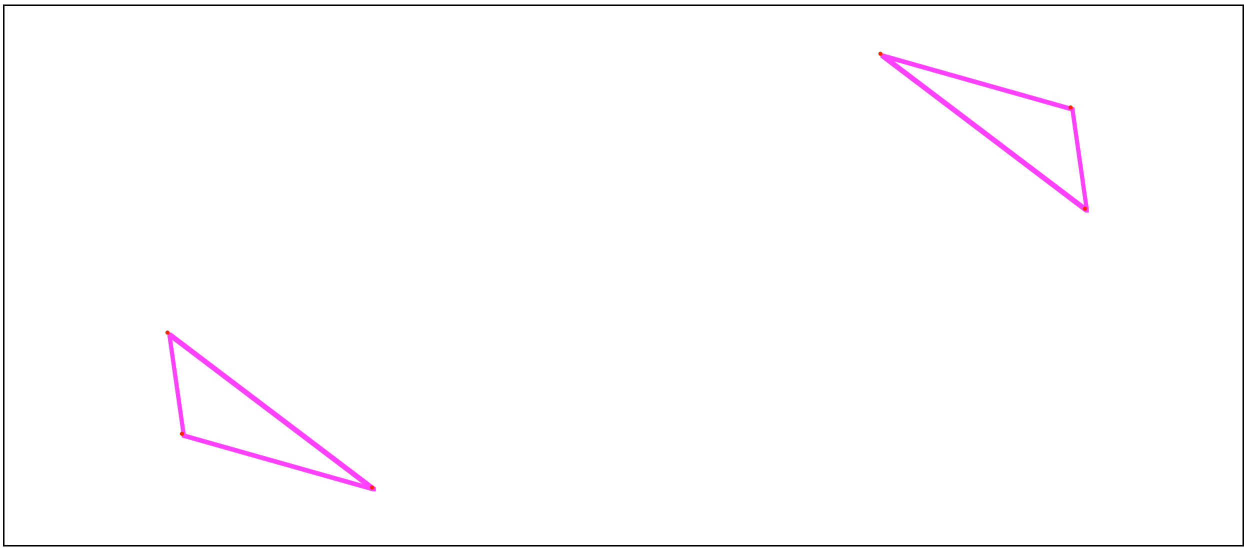
La troisième partie est une étude de l'application de deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires à d'autres figures qu'au triangle : quadrilatère quelconque, cercle. On observe l'effet produit quant à la manière dont les figures sont disposées. On recherche des techniques pour construire directement les images, sans passer par la figure obtenue lors de la « première » symétrie (conservation des angles droits, du rayon du cercle, des longueurs). On change les axes tout en veillant à ce qu'ils restent perpendiculaires en le point d'intersection des deux premiers : obtient-on les mêmes figures finales ? A-t-on toujours la curieuse « propriété du milieu » ?

Comme la réponse semble affirmative et qu'elle apparaît continuellement (quelles que soient les figures et les axes), on va s'engager, au cours d'***une quatrième partie***, dans l'étude de cette question et essayer de répondre au pourquoi de cette curieuse propriété. Pour cela, on va simplifier les figures en se limitant à un seul point et essayer de comprendre ce qui se passe lorsqu'on lui applique successivement deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires.

Enfin, ayant obtenu la conviction que chaque fois qu'on effectue successivement deux symétries d'axes perpendiculaires, alors le point d'intersection des axes est le milieu des points homologues, on peut se demander dans ***une cinquième partie*** si, réciproquement, lorsque des points sont obtenus de manière à ce qu'un point unique soit toujours le milieu des points homologues, alors on peut retrouver qu'ils sont obtenus à l'aide de deux symétries orthogonales successives d'axes perpendiculaires.

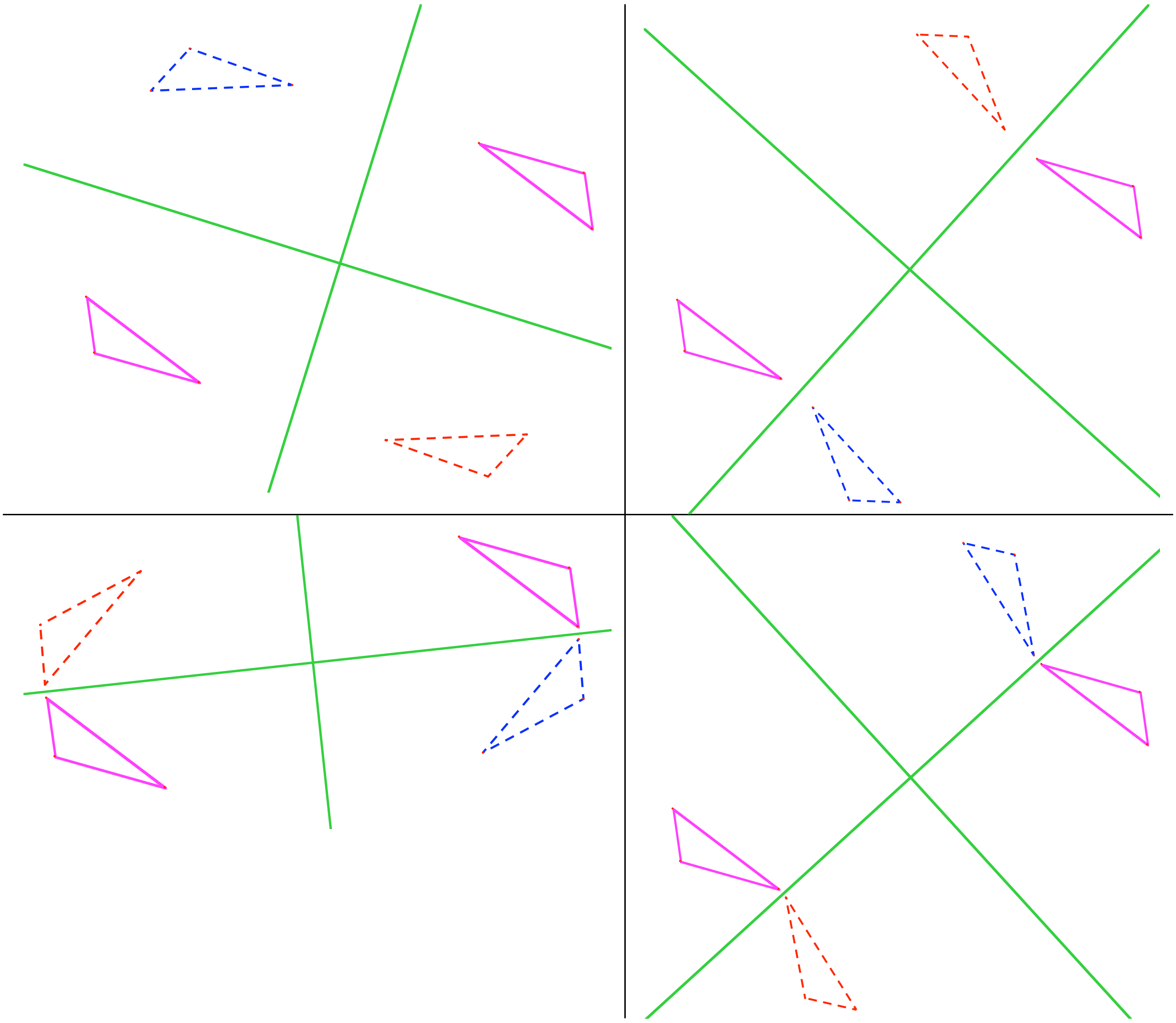
1re partie
Comment faire pour superposer une figure à une autre en utilisant deux symétries orthogonales, ou encore à l'aide de deux pliages ? La question se traite en deux épisodes distincts et successifs.

1. Chaque élève dispose d'une feuille sur laquelle ont été dessinés deux triangles. Question : peut-on faire en sorte que les deux triangles viennent se superposer l'un sur l'autre à l'aide d'un pliage (ou d'une symétrie orthogonale) ?
2. Comme au bout de plusieurs essais les élèves constatent qu'ils n'y parviennent pas – ou encore, pour certains qui ont des souvenirs sur la symétrie orthogonale, que c'est impossible compte tenu de la configuration –, le professeur reprend la question en demandant si cela est possible en utilisant deux pliages successifs (deux symétries orthogonales consécutives).
   Version 1 : On distribue de nouveau la même feuille. Les élèves travaillent tout d'abord individuellement (5 à 10 min), puis par groupes de quatre pour confronter leurs tentatives et résultats éventuels et se mettre d'accord. Enfin un rapporteur vient exposer les résultats de son groupe.
   Version 2 : On distribue de nouveau la même feuille. Les élèves ont à rechercher chez eux si l'on peut trouver deux pliages successifs. De retour en classe, les élèves sont mis par groupes de quatre pour confronter leurs tentatives et résultats éventuels et se mettre d'accord. Enfin un rapporteur vient exposer les résultats de son groupe. Je penche personnellement pour la version 2.



Feuille distribuée aux élèves

Quelques types de productions attendues, obtenues par « tâtonnement » ; les triangles « intermédiaires » (en pointillés) n'étant pas forcément dessinés :



Premières constatations :

- Il y a plusieurs types de pliages possibles (une infinité)
- Les pliages sont des symétries orthogonales (si cela n'a pas été dit par le professeur ou remémoré par les élèves) ; on fait repasser au crayon les plis afin de figurer les axes des symétries
- Les plis (axes) sont perpendiculaires
- Il n'est pas possible de faire se superposer les deux triangles en pliant à l'extérieur de la partie de la feuille qui les contient tous deux

Deuxièmes constations :

- Les axes se coupent tous en le même point, quelle que soit leur orientation (on peut demander de superposer les différentes feuilles obtenues en faisant coïncider les triangles initiaux)
- Une position « simple » des axes est celle où ils sont parallèles aux bords de la feuille
- Il existe plusieurs « chemins » possibles pour les pliages (figurés par les « triangles intermédiaires » en pointillés) : on peut indifféremment commencer par l'une ou l'autre des symétries
- Le point d'intersection des axes semble être « au milieu » ; la question à travailler est « au milieu de quoi ? », ou plutôt « le milieu de quoi ? »

Toutes ces constatations peuvent être consignées à titre d'institutionnalisation du programme de recherche que l'on ouvre. Parmi elles, les questions suivantes :

- Peut-on être certain que le point d'intersection des axes est le milieu ?
- Est-on certain que tous « les chemins » sont possibles ?

Remarque : il est possible que, si les élèves sont parvenus à décider que le point d'intersection des axes est le milieu des points symétriques, ils utilisent ensuite cela pour la construction de l'image d'une figure par symétrie centrale ; ce qui est évidemment plus économique qu'une construction faisant intervenir deux symétries orthogonales. On peut leur accorder le droit de le faire, tout en précisant néanmoins plusieurs choses :

- on n'a pas encore la preuve absolue que ce point est toujours le milieu lorsqu'on fait deux symétries,
- on vérifie que l'on obtient ainsi ce que l'on aurait obtenu en appliquant deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires (par exemple, en vérifiant avec le travail du voisin de table),
- et surtout, on ne sait pas pourquoi il en est ainsi.

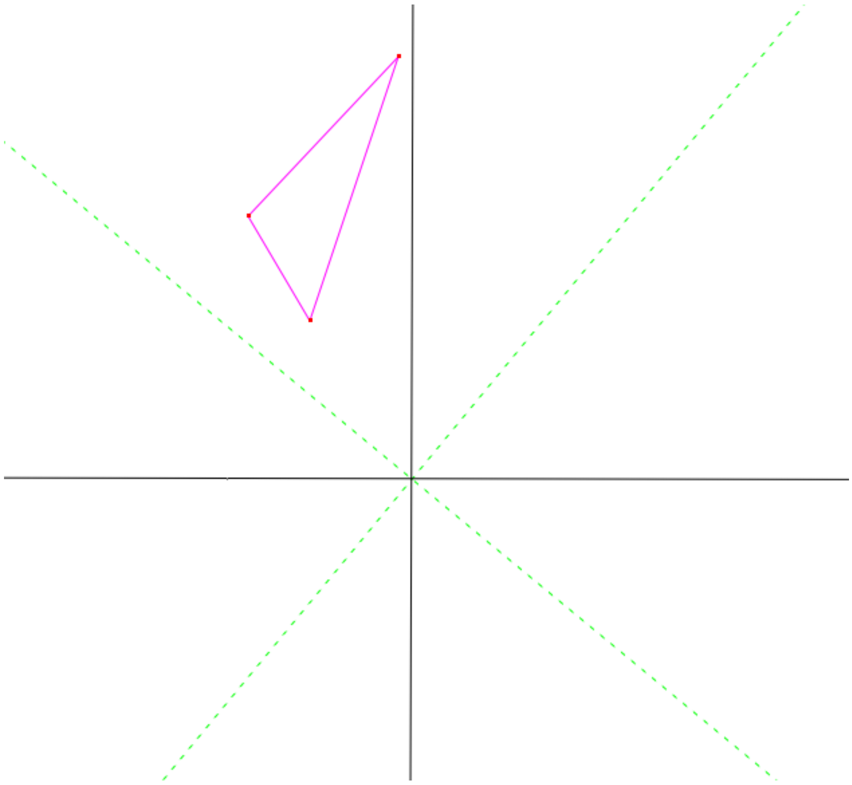
2e partie

La question qui se pose maintenant est celle de savoir si, quand on applique successivement à un triangle deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires, on obtient toujours un deuxième triangle qui ressemble à celui dessiné dans le cas précédent (sa position « inversée », la possibilité que les deux soient superposables ou non, etc.) Que faut-il faire pour cela ?
Il faut donc construire le triangle obtenu en appliquant successivement deux symétries orthogonales par rapport :

- tout d'abord aux deux axes dessinés en traits pleins,
- puis ensuite par rapport aux deux axes dessinés en pointillés,
- et enfin par rapport à deux axes que l'on choisira soi-même.

Cette construction se fait en classe en binômes. Chaque élève du binôme s'engage dans une seule construction (ils choisissent entre eux les axes par rapport auxquels chacun tracera les symétriques : soit les pleins, soit les pointillés). La construction est faite sans le calque, soit à la règle-équerre, soit au compas : c'est un moyen de retravailler le symétrique d'un segment par symétrie orthogonale (une révision « déguisée »). Puis la vérification du fait que l'on obtient le même triangle se fait soit par transparence (on superpose les feuilles, quitte à épaissir les traits pour « voir » le triangle-image), soit avec un papier-calque qui ne doit alors être utilisé que pour la vérification, et non pour la construction (au professeur d'organiser cela).

On distribue la feuille suivante à chaque élève, ainsi qu'un papier pelure. Ce dernier sert à décalquer le triangle et les deux axes orthogonaux par rapport auxquels les élèves effectueront les symétries. Chacun construit les symétriques successifs du triangle par rapport aux axes dont ils disposent. Ils comparent ensuite les triangles obtenus en superposant leurs deux feuilles de papier pelure. Puis ils recherchent, chacun de son côté, deux axes par rapport auxquelles ils construisent les symétriques successifs du triangle. Ils comparent de nouveau.
Ce travail permet de retravailler la définition de la symétrie orthogonale (définition du symétrique d'un point), de la médiatrice d'un segment (définition et propriété caractéristique), des constructions et de leur économie (les symétriques des sommets du triangle suffisent). Enfin, ce travail permet de mettre l'accent sur l'importance de la place du point d'intersection des axes et de leur orthogonalité.



Les questions ci-dessous sont à faire émerger en classe. Le professeur consigne celles qui ont été formulées par les élèves et qui ont fait consensus, et évidemment rajoutera par lui-même celles qui n'ont pas été proposées par les élèves mais qui sont cruciales pour faire avancer la recherche. Ce sont ces questions qui nourrissent l'avancée temporelle à travers une recherche de réponses ; certaines de ces réponses devant être consignées comme savoir à apprendre au fur et à mesure qu'elles sont établies. Au professeur de gérer sur les cahiers adéquats les places de ces différentes questions et réponses : cahier d'activités, cahier de cours, autre ?...

- Pourrait-on expliquer pourquoi on obtient les propriétés observées, notamment le fait que les deux triangles soient toujours superposables et que le point d'intersection des axes semble être toujours le milieu ?
- Est-ce qu'il se pourrait qu'on obtienne « un triangle d'arrivée » qui soit ailleurs que là où l'on obtient toujours ?
- Qu'est-ce qu'il faudrait changer pour qu'il en soit ainsi ?
- Est-ce que « le phénomène » se produit avec d'autres figures que des triangles, par exemple ?...

Le professeur sélectionne parmi les réponses des élèves pour cette dernière question, les cas du cercle et du quadrilatère quelconque dans lequel figurera néanmoins un angle droit en disant qu'on va rechercher cela en « travail à la maison » (devoir-maison, exercice selon son choix).

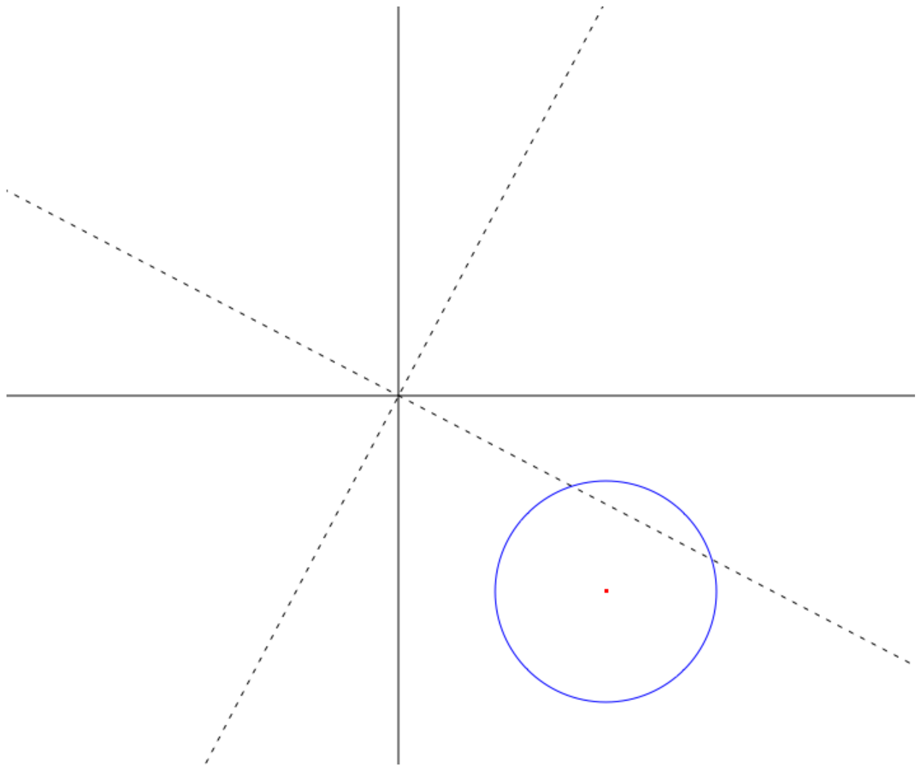
3^{e} partie

Le but assigné à cette 3^{e} partie consiste à se remémorer les propriétés de conservation de la symétrie orthogonale, notamment dans ce cas, de la conservation des longueurs et des angles, qu'un segment a pour image un segment. On aboutit alors à la mise en place d'une technique plus économe et à la découverte de certaines des propriétés de la symétrie centrale, même si le mot n'a pas été prononcé, obtenues « par transport » de celles connues sur la symétrie orthogonale.

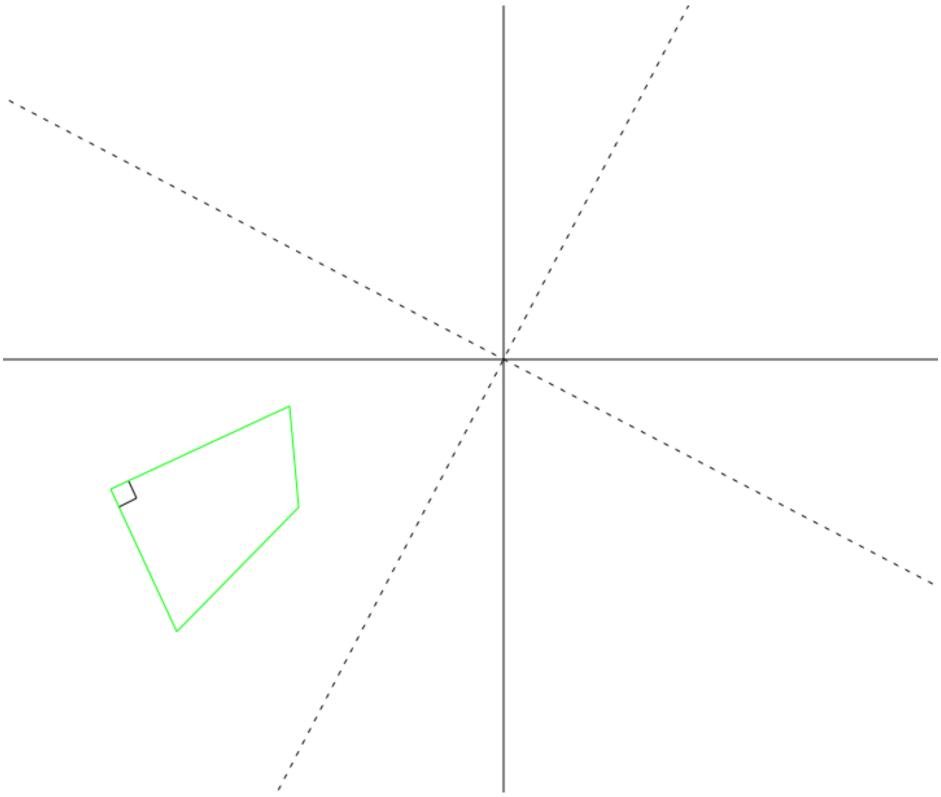
Le travail de construction, qui est relativement long, est demandé à faire en « travail à la maison », par exemple en DM corrigé par le professeur. Ce qui suppose que les figures distribuées soient toutes les mêmes (afin d'utiliser un calque pour une correction rapide) ; donc de distribuer des feuilles polycopiées avec les figures de départ, telles que ci-dessous, sur lesquelles travailleront les élèves et qu'ils auront à rendre. On ne demande pas de démonstration, uniquement des constructions.
Ce travail se prolonge en classe par la recherche de la question suivante : « pourrait-on gagner du temps pour la construction de la « figure-image » ? Et pour cela, sur quelles propriétés connues pourrait-on s'appuyer ? » Cette question peut suivre, dans un deuxième temps, lorsque les idées ont commencé à émerger.
L'idée est de faire advenir les propriétés :

- l'image d'un cercle est un cercle de même rayon et de centre l'image du centre
- l'image d'un segment est un segment de même longueur
- l'image d'un angle est un angle de même mesure
- en particulier, l'image d'un angle droit est un angle droit

Avec un cercle.



Même objectif :
Avec un quadrilatère quelconque qui a un angle droit.



4e partie

On est toujours à la recherche de la preuve que le point d'intersection des axes est effectivement le milieu des points homologues et surtout de l'explication de cela. On vient aussi de découvrir que l'image d'un segment est un segment de même longueur, ce qui n'est pas étonnant puisqu'on a appliqué successivement deux symétries axiales qui conservent les longueurs ; mais, ce qui est plus étonnant, est qu'il semble bien que le segment-image soit parallèle au segment de départ.

Il y a donc deux questions à étudier :

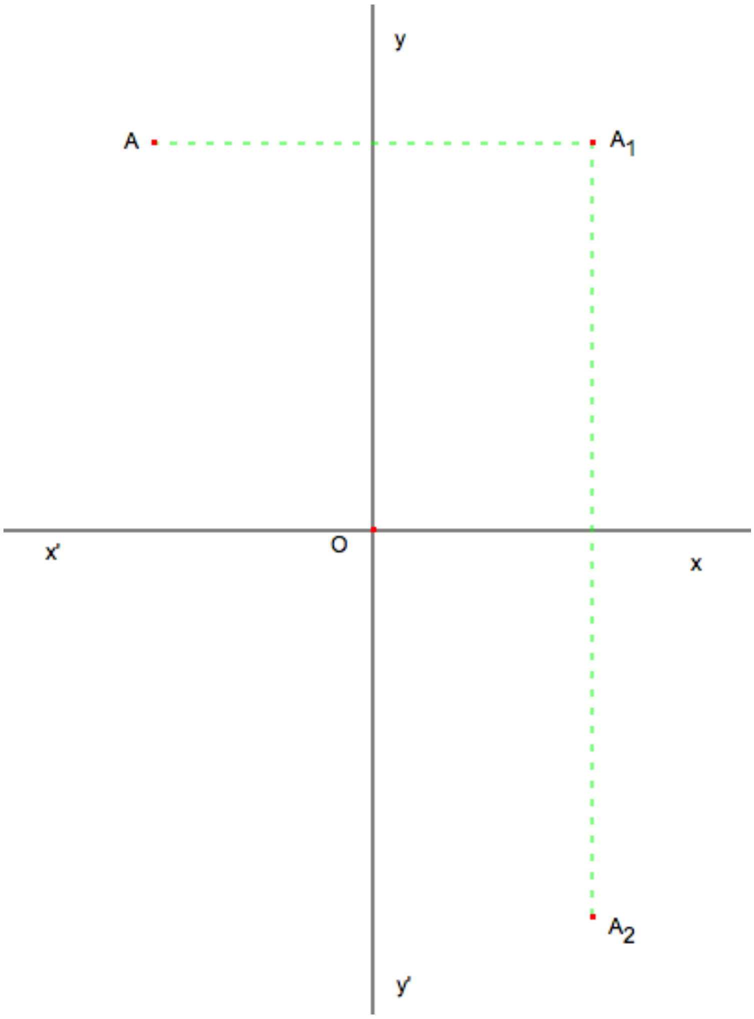
- est-ce que le point d'intersection des axes est effectivement le milieu du segment des points homologues et pourquoi ?
- est-ce que l'image d'un segment est un segment parallèle et pourquoi ?

(Pour le moment, on parle de segment pour se concentrer sur le parallélisme ; on démontrera plus tard que le parallélisme s'applique aux droites images)

On va commencer par essayer de comprendre pourquoi le point intersection des axes est le milieu et on s'occupera du parallélisme plus tard.

Le professeur explique que lorsqu'on a à résoudre un problème complexe en mathématiques, on commence par l'étudier dans des cas simples : pour « la question du milieu », on va étudier ce qui se passe avec ***un seul point***, en prenant des axes parallèles ***aux bords de la feuille***, en suivant ***les diverses images*** d'un point qu'on va appeler par des lettres, et en vérifiant et expliquant pourquoi ***l'ordre*** dans lequel on effectue les symétries ne change pas la position finale du point.

La figure obtenue est de la forme suivante :



On peut commencer par demander aux élèves de coder ce dont ils sont sûrs et qu'ils doivent justifier au moins oralement ((yy') perpendiculaire à $[AA_1]$ en son milieu par exemple). Le codage sera alors complété au fur et à mesure de l'avancée dans la recherche et nécessite toujours d'être mathématiquement justifié.
La question qui se pose est la suivante : ***comment reconnaît-on, ou établit-on, qu'un point, dans ce cas O, est le milieu d'un segment, dans ce cas [AA₂] ?***
Il y a des chances que les élèves répondent en évoquant l'équidistance de O avec A et A_2 ; ce qui se manifeste par des réponses du type « il faut prouver que $OA = OA_2$ ». C'est l'occasion de discuter cette affirmation en faisant établir par la classe que le point se trouve alors sur la médiatrice de $[AA_2]$, mais pas forcément sur $[AA_2]$ et de faire noter
Pour montrer que O est le milieu de $[AA_2]$, nous devons montrer que :
- ***$OA = OA_2$***
- ***que O appartient à $[AA_2]$***

Ces deux conditions sont évidemment suffisantes et c'est ce dont on se sert pour établir que O milieu de $[AA_2]$, mais il n'est pas utile d'évoquer cela et de soulever les difficultés de compréhension qui s'en suivent traditionnellement !…

Première question : ***comment démontrer que $OA = OA_2$?***
Il est nécessaire de laisser 5 min de recherche aux élèves, soit individuellement, soit par petits groupes, puis de laisser un temps de mise en commun des propositions des élèves. Il est possible que l'évocation de la médiatrice lors de la discussion sur la condition nécessaire

d'appartenance de O à $[AA_2]$ soit utilisée. Mais cette réflexion conduit évidemment à l'égalité des distances d'un point de la médiatrice aux extrémités ; or la médiatrice de $[AA_2]$ n'a pas été tracée et n'est évoquée ni par la figure, ni par la discussion qui a précédé. La difficulté vient donc du fait qu'il faut utiliser la transitivité de l'égalité et procéder en 3 étapes pour établir que $OA = OA_2$.
L'expérience de la passation en classe nous dira si les élèves ont ou non une maîtrise suffisante de ce type de raisonnement pour parvenir à établir : $OA = OA_2$.
Si ce n'est pas le cas, une nouvelle question peut être posée à la classe qui prend en partie en charge, mais sans trop en dévoiler, la technique par disjonction à mettre en œuvre dans ce cas : ***que sait-on à propos de la longueur OA et pourquoi, et que sait-on à propos de la longueur OA_2 et pourquoi ?***
Si cela n'a pas été déjà fait, on fait tracer le segment $[OA]$. Les élèves peuvent alors soit utiliser la médiatrice de $[AA_1]$, ce qui est fort probable car le segment $[AA_1]$ a été tracé, soit la conservation des longueurs par symétrie orthogonale. C'est l'expérience en classe qui parlera !
On a donc $OA = OA_1$ (car O est un point de médiatrice de $[AA_1]$, ou car le symétrique de $[OA]$ par rapport à $(y'y)$ est $[OA_1]$ et que la symétrie orthogonale conserve les longueurs).
On code alors les longueurs égales OA et OA_1 sur la figure. La démarche est la même pour le segment $[OA_2]$, mais il y a des chances qu'alors les élèves disent tout de suite qu'il y a l'égalité $OA_1 = OA_2$ à partir d'une « lecture » sur la figure qui vient d'être codée. On écrit alors : $OA_1 = OA_2$ (car O est un point de médiatrice de $[A_1A_2]$, ou car le symétrique de $[OA_1]$ par rapport à $(x'x)$ est $[OA_2]$ et que la symétrie orthogonale conserve les longueurs).
Comme $OA = OA_1 = OA_2$, on a bien établi que $OA = OA_2$.

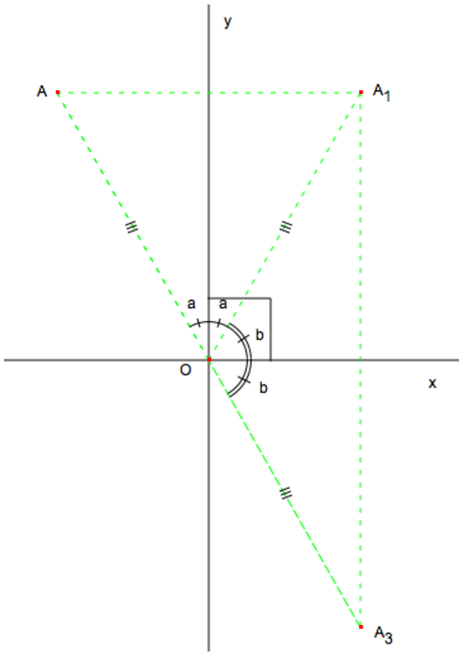
Deuxième question : ***il reste à montrer que O appartient à $[AA_2]$; comment faire ?***
C'est l'occasion d'une discussion en classe, car la question est difficile à ce niveau, afin d'établir collectivement un recensement des connaissances disponibles sur le sujet. Un rapide tour d'horizon montre qu'elles sont en nombre très réduit et, pour celles imaginables en début de 5^e^, sans doute en grande partie non disponibles. En voici deux :

- O appartient à $[AA_2]$ si et seulement si $OA + OA_2 = AA_2$ (la partie directe est facile à faire constater en 6^e^, la réciproque est une autre histoire)
- O appartient à $[AA_2]$ si et seulement si l'angle $\sphericalangle AOA_2$ est plat

D'autres démonstrations (droites confondues parce deux points communs, axiome d'Euclide, axiome de la perpendiculaire, etc.) semblent peu disponibles. Il y a seulement une très faible chance l'idée de l'angle plat apparaisse en classe. Dans ce cas, le mieux est que le professeur indique cette possibilité, seulement après que les élèves auront recherché comment faire sans aboutir à une réponse satisfaisante. Il s'agit seulement que le professeur joue le rôle d'un média, un peu comme Google que l'on consulte pour chercher une réponse à une question que l'on se pose et dont on ne trouve pas, par soi-même, la réponse.
Le professeur fournit donc la réponse : démontrer que l'angle $\sphericalangle AOA_2$ est plat.

La démonstration présente plusieurs intérêts : travailler sur les angles égaux - axe de symétrie – bissectrices ; angles complémentaires et supplémentaires ; associer angle plat et alignement ; entrer dans un calcul algébrique sur des angles (ce qui suppose peut-être la rencontre ou la connaissance préalable de la distributivité).
On s'engage ainsi dans un authentique parcours permettant de rencontrer davantage de notions du programme au fur et à mesure que se posent de nouvelles questions à propos de ce que nous savons être la symétrie centrale. Dans ce cas, il faut prévoir que la traduction sous forme de cours noté dans la partie adéquate des phases d'institutionnalisation qui s'y prêtent

soit complétée au fur et à mesure de l'avancement dans l'étude et la recherche… Ce qui correspond davantage à « l'esprit PER » !
Dans ce cas, le PER prend une autre direction et se dirige vers l'étude de certaines des figures planes du programme :



Il est nécessaire de faire coder les angles de sommet O de la figure, en justifiant l'égalité de certains angles et sans oublier de coder l'angle droit formé par les axes de symétrie.
Une fois le codage effectué, la figure « parle d'elle-même ». Il reste à écrire la démonstration ; ce qui ne peut se faire que :

- soit en classe, dans une interaction entre les propositions des élèves et leur nécessaire mise en forme par le professeur avant de noter le raisonnement
- soit dans un mixte : on a établi « oralement », en classe et collectivement, les grandes lignes de la démonstration, les élèves ont à la rédiger en travail « maison », puis on corrige en classe, collectivement, afin de noter la démonstration

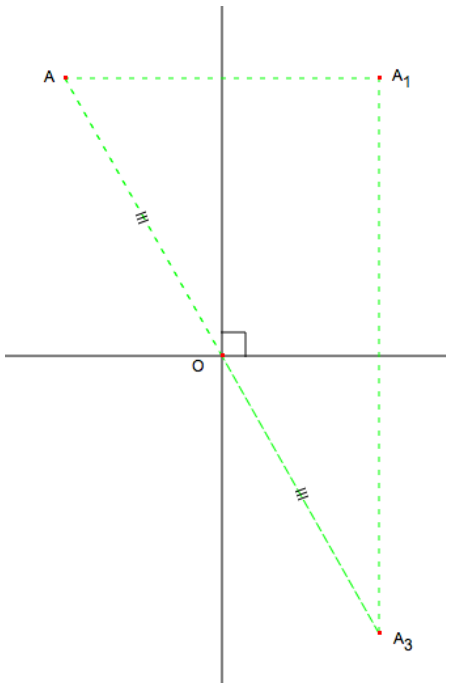
Comme les symétries orthogonales conservent les angles, ou encore que OAA_1 est isocèle et que la médiatrice $[Oy)$ de sa base est bissectrice de son angle au sommet O, alors $\sphericalangle AOy = \sphericalangle A_1Oy = a$. Le même raisonnement avec le triangle A_1OA_3 conduit à écrire : $\sphericalangle A_1Ox = \sphericalangle A_3Ox = b$. On a donc $\sphericalangle AOA_3 = a + a + b + b = 2a + 2b = 2(a + b)$.
Or $a + b = \sphericalangle A_1Oy + \sphericalangle A_1Ox = \sphericalangle yOx = 90°$
Donc : $\sphericalangle AOA_3 = 2 \times 90° = 180°$. On en déduit que les points A, O et A_3 sont alignés et par conséquent, comme $OA = OA_3$, que O est le milieu de $[AA_3]$.

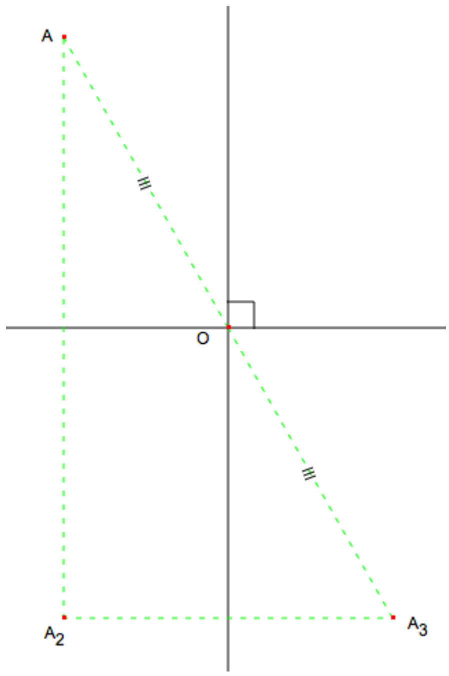
Si l'on décide de ne pas s'engager dans la voie de la démonstration de l'alignement des points, et donc de ne pas poursuivre plus loin dans le déroulement du PER, il me semble raisonnable de mentionner auprès des élèves l'insuffisance de la dernière égalité pour prouver que O est effectivement le milieu de [AA₂] en expliquant qu'il faudrait prouver aussi que O, A et A₂ sont alignés, ou encore que O ∈ [AA₂] (ceci permet de parler de nouveau de la médiatrice en tant que lieu des points équidistants des extrémités d'un segment, ici du segment [AA₂]). On décide alors de l'admettre car la démonstration, qui existe, est difficile.

Une dernière question peut peut-être apparaître : ***Et si on change l'ordre selon lequel on effectue les symétries, est-on sûr que l'on obtient le même point A_2, et que O reste le milieu du segment ?***
On a décidé que la démonstration de la commutativité de la composée de deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires est trop délicate à être comprise à ce niveau (cf. la démonstration dans une annexe spécifique), peut-être même la question puisque les élèves ont pu constater par eux-mêmes, lors des constructions précédentes, que cette commutativité était vérifiée en acte… On décide donc de l'admettre, voire même de ne pas aborder la question de la commutativité si l'on pense qu'elle ne serait elle-même pas comprise de la classe. Dans ce cas, il est évident que l'image de A en changeant l'ordre des symétries ne peut être que A_2 !

Démontrer que O est le milieu de $[AA_2]$ lorsqu'on effectue tout d'abord la symétrie d'axe $(x'x)$, puis celle d'axe $(y'y)$ étant identique à la précédente, peut constituer un bon exercice à faire « à la maison ».
Il est temps de récapituler ce que l'on a étudié et découvert en l'illustrant des figures correspondantes !

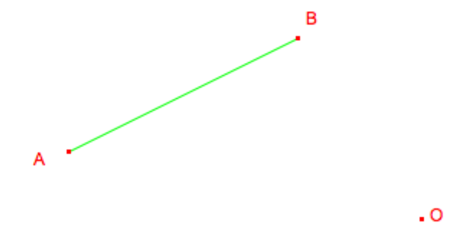
Lorsqu'on effectue successivement deux symétries d'axes perpendiculaires, alors le point d'intersection des axes est le milieu du segment dont les extrémités sont les points de départ et d'arrivée.

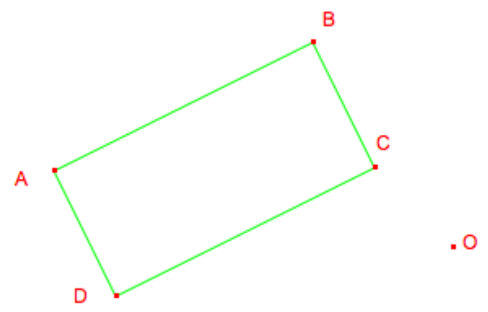


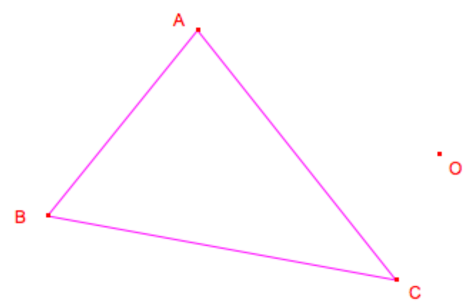


5^e^ partie

On vient donc de voir qu'ayant appliqué successivement, à un ou plusieurs points, deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires, on peut utiliser une technique plus économique pour trouver le point d'arrivée : utiliser le milieu.
Question : ***Est-ce qu'on obtient bien ainsi ce que l'on avait obtenu au préalable sur différentes figures (segment, triangle, rectangle, etc.) en appliquant successivement les symétries orthogonales d'axes perpendiculaires ?***



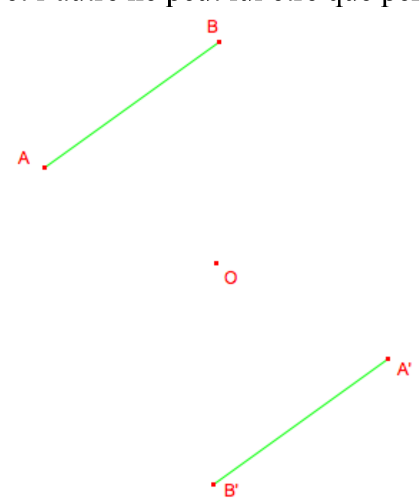




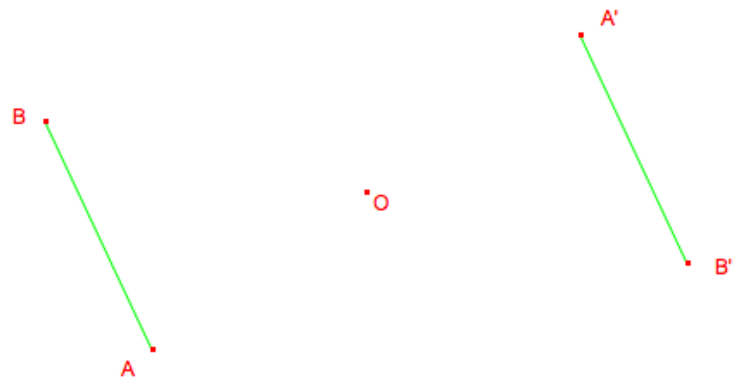
Ayant constaté qu'apparemment, on obtient des propriétés semblables à celles obtenues en effectuant successivement deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires, une nouvelle question se pose : ***Est-il possible de les retrouver ?***
Si c'est le cas, on aura la preuve qu'utiliser le milieu revient bien « à faire » deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires… Ce qui sera très économique et permettra de d'affirmer qu'on a ainsi, dans tous les cas, les propriétés de conservation (longueurs, angles, images d'une droite, aire, etc.) On laisse temporairement en suspens la question de savoir si et pourquoi l'image d'un segment (resp. d'une droite) est un segment (resp. une droite) parallèle.

La recherche des axes de symétrie peut être faite en travail « à la maison », ayant été donnée à tous la même feuille. Il y aura sans doute des réponses obtenues « par tâtonnement » et d'autres pour lesquelles la construction s'appuie sur un raisonnement. La correction en classe permet de fixer une technique en jouant sur les variables de position de la figure.

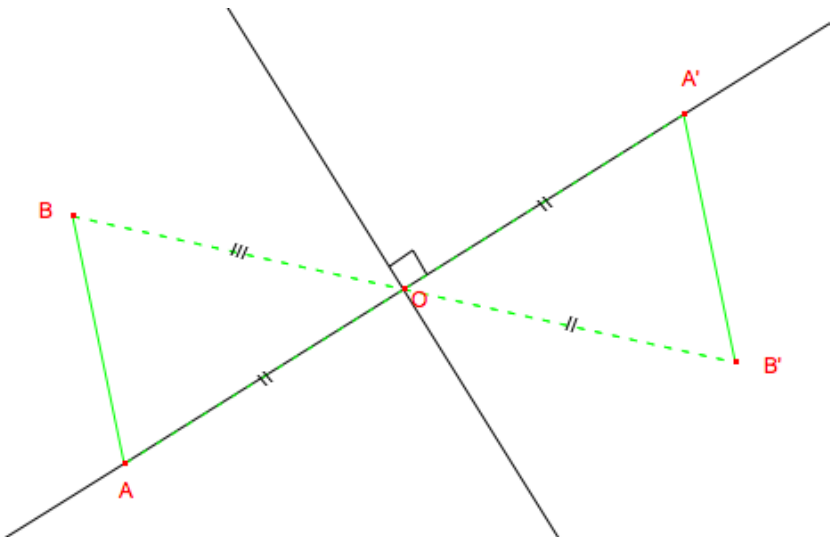
Ainsi la position des points B, O et B' dans la figure ci-dessous suggère-t-elle d'utiliser immédiatement (BB') pour axe et l'autre ne peut lui être que perpendiculaire en O.



Il faudra donc adapter les figures en fonction des difficultés potentielles des élèves estimées dans les classes, pour proposer des figures comme celles-ci :



Conclusion :
Obtenir des points-images en utilisant « la technique du milieu O » revient à appliquer aux points de départ successivement deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires en O.



Conséquences :
Définitions :

- Obtenir des points-images en utilisant « la technique du milieu O » s'appelle faire une symétrie par rapport à O ou encore une symétrie centrale de centre O.
- Etant donnés un point O et un point A distinct de O, le point A' tel que O soit le milieu du segment $[AA']$ s'appelle le symétrique de A par rapport au point O.
- O est son propre symétrique par rapport à O.

Propriétés :
Comme une symétrie centrale résulte de l'application successive de deux symétries orthogonales (qui conservent les longueurs, les angles, l'alignement, etc.), une symétrie centrale conserve les longueurs, les angles, l'alignement, etc.

En ce point, il est nécessaire d'illustrer ces propriétés par les figures correspondantes, de dessiner un assortiment d'images de figures simples par symétrie centrale, de ne plus recourir pour cela à la composée des deux symétries orthogonales, de travailler la recherche de centres de symétrie, etc.

Il reste une question en suspens : « comment se fait-il que l'image d'une droite soit une droite parallèle (le cas de la droite passant par le centre n'étant pas susceptible d'engendrer une question autre que celle du constat : la demi-droite a pour image la demi-droite opposée) ? »

La suite du parcours consiste à apporter une réponse à cette question lors d'une deuxième séquence…

Exercice possible, à donner à rechercher aux élèves, à la suite de la démonstration du fait que toute symétrie centrale est la composée de deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires.

Exercice : Un élève affirme que lorsqu'on a une symétrie centrale, il n'est pas bien difficile de retrouver des axes de deux symétries orthogonales que l'on applique successivement pour obtenir la symétrie centrale. Il dit qu'il suffit de choisir deux droites perpendiculaires passant par le centre O de symétrie, peu importe lesquelles, et qu'il y en a donc une infinité pourvu qu'elles soient deux à deux perpendiculaires en O ! A-t-il raison ou tort, et pourquoi ?

La correction en classe à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique permet de montrer la puissance d'anticipation du raisonnement mathématique. On a démontré que tout couple de droites perpendiculaires en le centre de symétrie convient et on le vérifie expérimentalement en faisant tourner un couple d'axes avec le logiciel : l'image d'un triangle (par exemple) par la première symétrie orthogonale « bouge », tandis que l'image de ce dernier par la deuxième symétrie reste la même.