AGRANDISSEMENT REDUCTION

Type de tâches T : Comment agrandir ou réduire des longueurs dans un rapport k donné, k étant un nombre quelconque ? C'est-à-dire, étant donné un segment [AB], comment obtenir un segment [AB'] tel que $AB' = k \times AB$?

On commence par explorer ce type de tâches et proposer une technique. Plusieurs réactions sont possibles :

- Il y a des chances que les élèves demandent immédiatement quelle est la longueur de [AB] et quelle est la valeur de k. A cela, P répond que longueur et valeur de k sont quelconques car on souhaite trouver une ***méthode générale*** pour ***agrandir*** ou ***réduire*** des longueurs. On dessine donc un segment [AB] de longueur quelconque. Comme k est lui-aussi un nombre quelconque, puisqu'on cherche une méthode générale, on prend ce que l'on veut. Si la question n'est pas posée, c'est à P de la poser et d'y répondre, éventuellement en sollicitant les élèves.
- Les élèves vont donc choisir personnellement une longueur AB, ou tracer [AB] et le mesurer, choisir un nombre k, calculer $k \times AB$ puis placer B' avec la règle graduée en mesurant $AB' = k \times AB$.
- Certains élèves peuvent rester à un niveau strictement additif : ajouter quelques centimètres à AB et placer ainsi B'. Dans ce cas, la question à poser est évidemment de leur demander s'ils ont respecté la consigne qui était d'avoir $AB' = k \times AB$.
- Il y a des chances que la réduction n'apparaisse pas. C'est donc à P de poser la question : « Peut-on obtenir une longueur plus petite que AB en multipliant AB par un nombre k ? Si oui, lequel ? Sinon, pourquoi ? »

Après cette phase de recherche de quelques minutes, on demande aux élèves ce qu'ils ont fait. Sans doute ont-ils pris une longueur AB (2 cm, 3 cm, 5 cm, etc.) et ont-ils choisi un nombre k (2, 3, 4, etc.) pour accomplir une tâche du type. Ils ont répondu à la dernière question, peut-être avec difficulté ou peut-être sans.

A ce stade, les élèves se demandent sans doute ce que l'on attend d'eux en dehors de trivialités : ils n'ont pas encore rencontré la problématicité d'une tâche du type T. C'est ce qui advient avec la tâche t^* suivante :

Tâche t^* : Dessiner un segment [AB] de longueur quelconque. Comment construire un segment [AM] tel que $AM = \sqrt{2}\, AB$ et un segment [AN] tel que $AN = \frac{1}{\sqrt{2}} AB$?

Des questions peuvent apparaître : que veut dire quelconque ? Quel rapport avec ce qui précède ?
Les réponses, apportées par P ou par la discussion dans la classe, conduisent à deux conclusions

- Chacun tracera un segment « quelconque », sans mesurer sa longueur *a priori.*
- On vérifie bien que l'on s'est placé dans le cas $AB' = k \times AB$ en précisant les valeurs prises par k : $\sqrt{2}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Une question est sous-jacente : avec ces valeurs de k, a-t-on obtenu un agrandissement ou bien plutôt une réduction ?

Il y a des chances que les élèves se souviennent d'une valeur approchée de $\sqrt{2}$, ou infèrent un agrandissement (diagonale du carré, hypoténuse d'un triangle rectangle, éventuellement isocèle) ou, plus probablement en cherchent une à la calculatrice.

Ils observent alors que $\sqrt{2} > 1$ et donc que, pour cette valeur, on obtient un agrandissement. Qu'en est-il alors pour $\frac{1}{\sqrt{2}}$? La réponse peut être obtenue à la calculatrice, mais on peut évidemment faire se souvenir par les élèves que si le numérateur d'une fraction est inférieur à son dénominateur, la fraction est inférieure à 1. On a ainsi trouvé par avance quels seront les effets d'une multiplication de AB par ces deux valeurs de k, et donc où il faut s'attendre à placer. On institutionnalise ce qu'on vient de trouver :

Propriété et définitions :

Etant donnés un segment [AB] et un nombre k, le segment [AB'] de longueur $AB' = k \times AB$ a une longueur qui est :

- **plus grande que AB si $k > 1$; dans ce cas, on dit que [AB'] est *un agrandissement* de [AB] de rapport k**
- **plus petite que AB si $0 < k < 1$; dans ce cas, on dit que [AB'] est *une réduction* de [AB] de rapport k**

Remarque :

***k* est nécessairement un nombre *positif*, puisque le nombre $AB' = k \times AB$ mesure une longueur, donc est positif.**

On revient à la tâche t^* qui se décompose en fait en deux tâches. P indique que l'on commence par l'agrandissement de rapport $\sqrt{2}$ (la tâche t^*_1), puis lorsqu'on aura trouvé comment faire, on passera au cas $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (la tâche t^*_2). Sans doute des élèves vont-ils mesurer la longueur AB du segment qu'ils ont dessiné, la multiplier par $\sqrt{2}$ et dessiner avec la règle graduée un segment de longueur AB' égale au produit obtenu. Cette technique est soumise à débat. Il y a une forte probabilité pour que quelqu'un dise que ce n'est pas assez précis, que l'on souhaite des constructions exactes, qu'on ne fait pas ainsi en mathématiques. Cette affirmation peut se discuter mais, sans doute, une majorité d'élèves penchera pour l'économie procurée par la mesure des longueurs grâce aux graduations de la règle et au calcul à la calculatrice. Néanmoins, le débat ayant eu lieu, il n'est pas illégitime de poser la question suivante qui force à inventer une nouvelle technique.

Pourrait-on encore réaliser un agrandissement d'un segment dans le rapport $\sqrt{2}$ si les graduations de la règle étaient effacées ?

Les élèves ont rencontré les racines carrées en 4^e à l'occasion de l'utilisation du théorème de Pythagore. C'est pour eux un ostensif qui appelle ce théorème et les techniques associées. La probabilité est donc assez forte que des élèves cherchent à obtenir une longueur écrite avec une racine carrée en utilisant ce théorème. Quelques minutes sont laissées pour une recherche individuelle au bout desquelles des réponses sont portées à la connaissance de la classe.

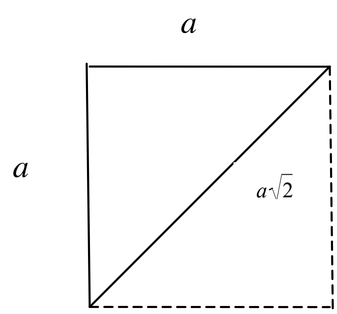
Il est possible que des élèves, en très petit nombre, trouvent ou se remémorent que la diagonale d'un carré, ou l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle constituent la réponse. Il est probable que quelques élèves cherchent à utiliser le théorème de Pythagore mais n'aboutissent pas car deux difficultés apparaissent.
La première tient à la nécessité d'un raisonnement qui s'apparente à l'analyse – synthèse : « supposons que l'on ait un triangle rectangle dont l'hypoténuse ait une longueur égale à la longueur d'un côté de l'angle droit multipliée par $\sqrt{2}$, quelles conséquences ou quelles conditions pour ce triangle ?… » Il y a des chances que ces élèves construisent un triangle rectangle isocèle de côté 1 et en restent là.
La deuxième tient, pour certains élèves, à la plus ou moins grande difficulté du calcul algébrique qu'ils doivent mener : $\sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{a^2} = a\sqrt{2}$ car a positif.

Si la réponse immédiate est trouvée par un ou des élèves, elle est évidemment portée à la connaissance de la classe, discutée et validée. Sinon, il est nécessaire de se demander :
1. Et si l'on cherchait seulement à obtenir une hypoténuse de longueur $\sqrt{2}$?
Le théorème de Pythagore ayant été évoqué, il ne paraît pas invraisemblable que les élèves trouvent par eux-mêmes que les côtés mesurent 1. Des élèves peuvent proposer d'autres valeurs que le calcul permet facilement d'invalider.

2. Et maintenant que l'on sait qu'un triangle rectangle isocèle de côté 1 a une hypoténuse de longueur $\sqrt{2}$, comment doit être un triangle rectangle pour que son hypoténuse soit $a\sqrt{2}$? Et dans ce cas, que représente a ?
Le calcul algébrique permet de voir que si $h = a\sqrt{2}$, alors $h^2 = (a\sqrt{2})^2 = 2a^2 = a^2 + a^2$ (à rapporter à $1^2 + 1^2$, trouvé en *1*). Ce qui prouve qu'un triangle rectangle isocèle de côté a a une hypoténuse de longueur $a\sqrt{2}$.

D'où :
Propriété :
Dans un triangle rectangle isocèle de côté *a*, l'hypoténuse a pour longueur $a\sqrt{2}$.

Conséquences :
- **Dans un carré de côté *a*, la diagonale a pour longueur $a\sqrt{2}$**
- **Pour obtenir un segment de longueur $a\sqrt{2}$ à partir d'un segment de longueur *a*, sans utiliser les graduations de la règle, il suffit de construire l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle dont les côtés égaux ont pour longueur *a*, ou la diagonale d'un carréde côté *a*.**

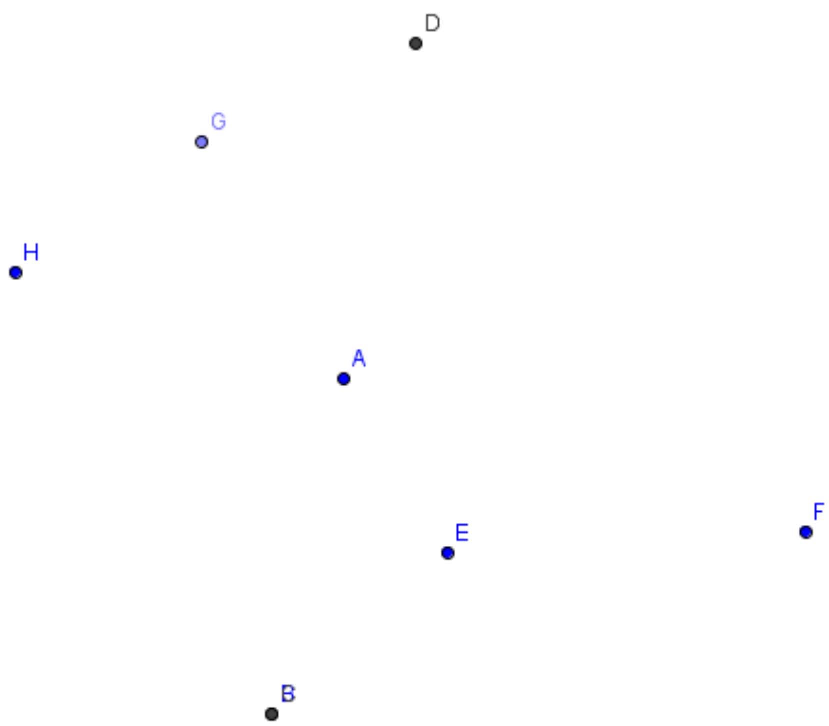


La question de la résolution de la tâche t^*_2 demeure. Elle peut être recherchée à l'occasion d'un exercice « à la maison » reformulé par la question suivante :

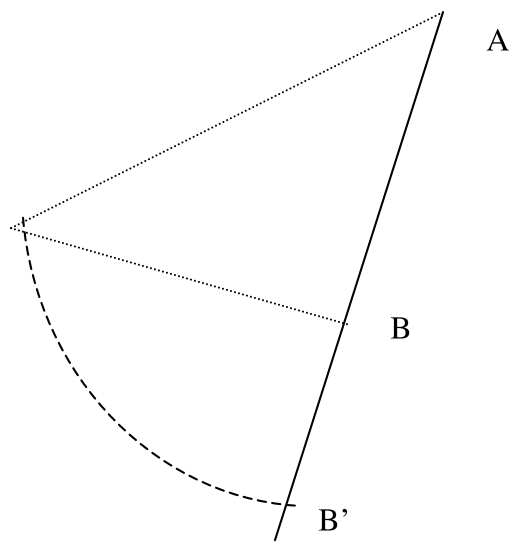
> On donne la figure suivante :
>
> A ——————— l ——————— B
>
> Le segment [AB] ayant pour longueur l, construire un segment de longueur $\frac{1}{\sqrt{2}}l$ à l'aide d'une règle non graduée.

Il n'est pas évident que tous les élèves pensent à se lancer dans la construction « inverse » de la précédente… c'est-à-dire construire un triangle rectangle isocèle d'hypoténuse [AB] ou un carré de diagonale [AB].

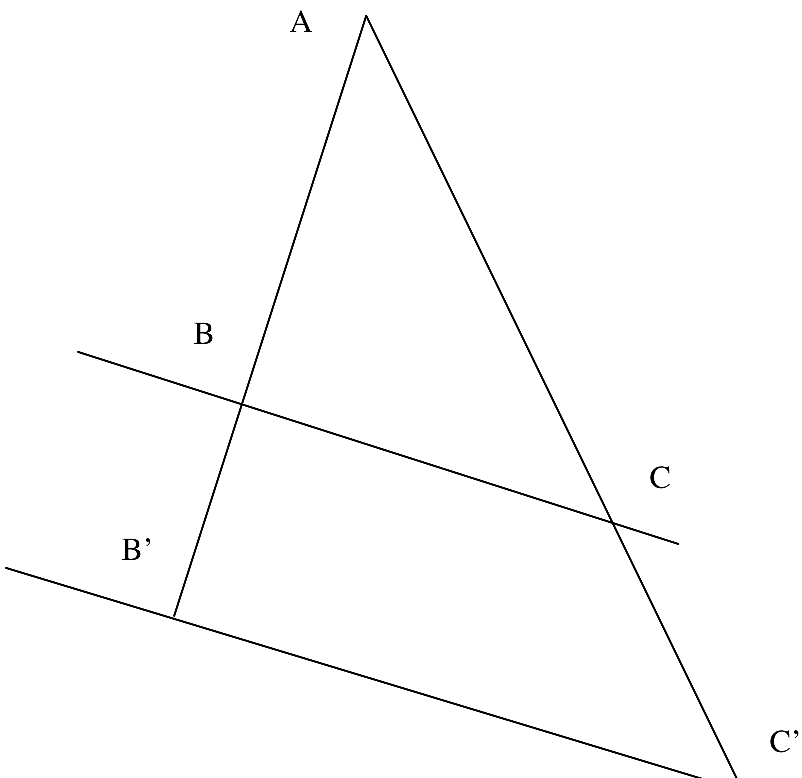
A l'issue de cette première phase de travail, on conclut qu'on parvient à agrandir (ou réduire), grâce à une technique géométrique, un segment dans le rapport $\sqrt{2}$ (ou $\frac{1}{\sqrt{2}}$). On peut donc le faire pour n'importe quelle longueur donnée. Mais cette technique est assez coûteuse, et peu commode, si l'on a beaucoup de segments à agrandir ou réduire dans rapport donné ; par exemple à agrandir dans le rapport $\sqrt{2}$
Par exemple, dans la figure suivante (où il manque C !), on souhaite obtenir les points B', C', D', E', F', G', H', sur (AB), (AC), (AD), (AE), (AF), (AG), (AH) tels que : $AB' = \sqrt{2}\,AB$, $AC' = \sqrt{2}\,AC$, $AD' = \sqrt{2}\,AD$, $AE' = \sqrt{2}\,AE$, $AF' = \sqrt{2}\,AF$, $AG' = \sqrt{2}\,AG$, $AH' = \sqrt{2}\,AH$, en recourant le moins possible à la construction d'hypoténuses de triangles rectangles. Comment faire pour obtenir des agrandissements de rapport $\sqrt{2}$ de cette manière ?



A la première étape de la construction, la figure est la suivante :

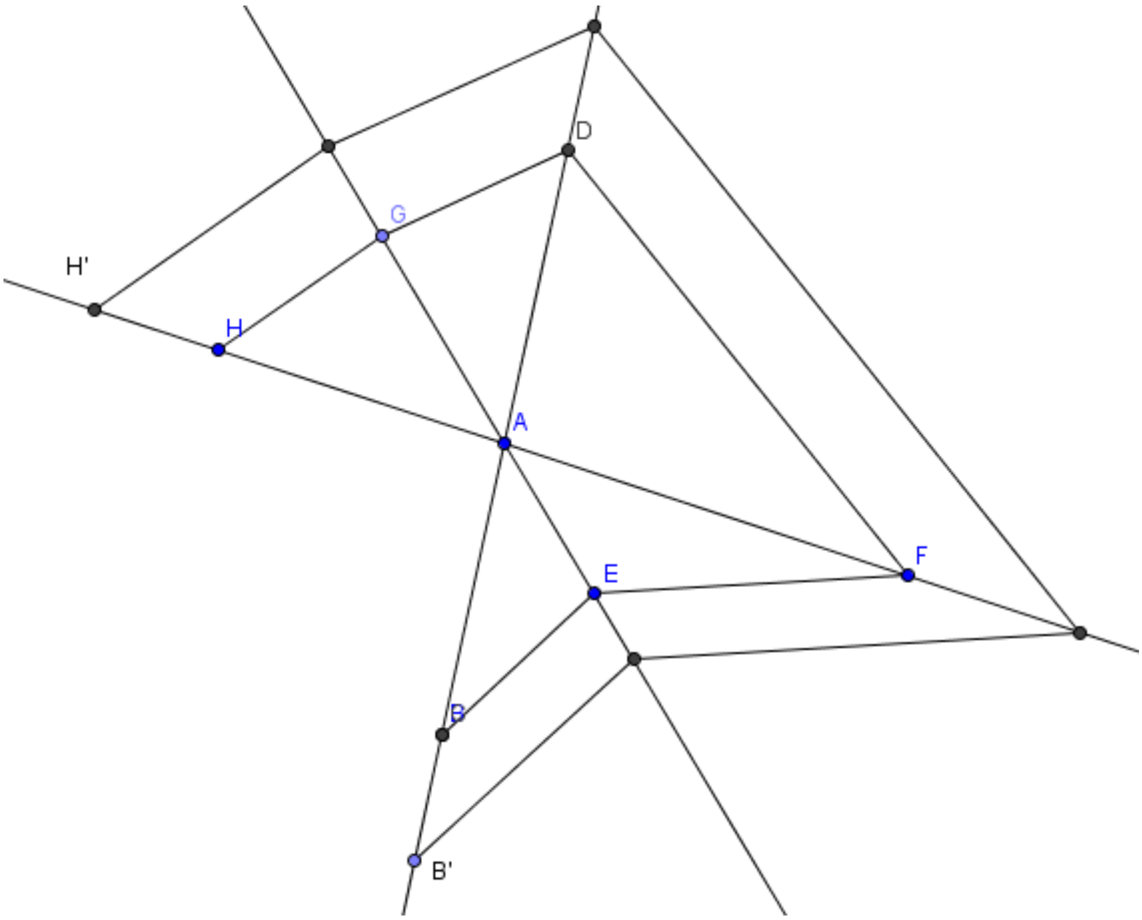


La question devient : sachant que l'on a $AB' = \sqrt{2}\,AB$, comment trouver C' tel que $AC' = \sqrt{2}\,AC$ avec C' point de (AC), sans recourir à la « technique de l'hypoténuse » ?
Les élèves connaissent le théorème de Thalès de 4[e] et un nombre significatif d'entre eux l'utilisent alors, plus ou moins indûment, puisqu'en 4[e] la parallèle coupe les côtés « à l'intérieur du triangle ». La figure devient la suivante :



Dans ce cas où $k > 1$, on s'est autorisé ***un élargissement du cadre d'utilisation du théorème de Thalès*** de 4^{e}. On doit donc se demander comment montrer qu'effectivement le théorème de Thalès est vrai dans ce cas, question que pose P si les élèves ne se la posent pas.

Le raisonnement nécessite « visuellement » d'interchanger les rôles des sous-figures et des sur-figures (ABC et $AB'C'$) et, « algébriquement », de passer du produit au quotient. On sait en effet que $AB' = kAB$ donc $AB = \frac{1}{k}AB'$. D'après le théorème de Thalès de 4^{e} dans le triangle $AB'C'$ alors $AC = \frac{1}{k}AC'$ et $BC = \frac{1}{k}B'C'$. D'où $AC' = kAC$ et $B'C' = kBC$. On a ainsi obtenu la technologie θ de la technique utilisée dans ce cas. Cette technologie θ n'est autre que le théorème de Thalès dans le cas de la parallèle qui coupe les côtés « à l'extérieur du triangle ». La construction continue ainsi :

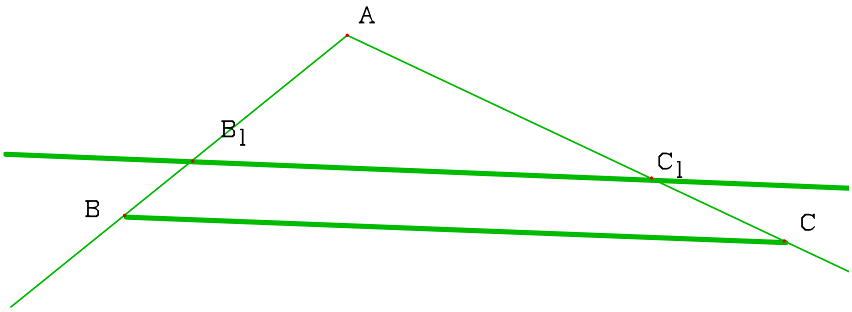


Il est temps d'institutionnaliser ce qui a été obtenu, après avoir écrit les rapports égaux à $\sqrt{2}$.

Agrandissements-réductions et théorème de Thalès

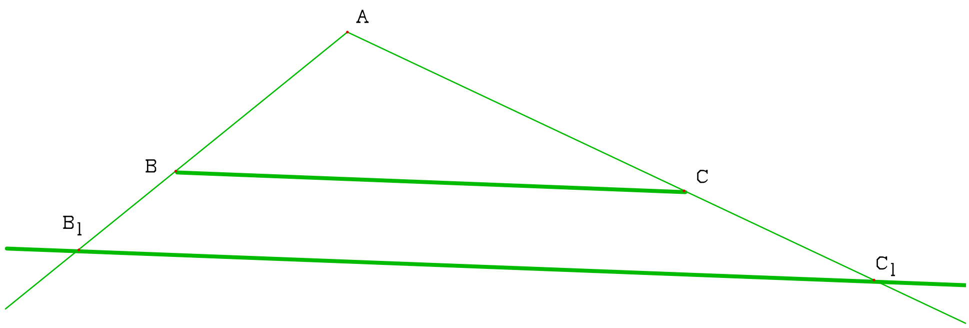
1. Pour obtenir une *réduction* dans le rapport k d'un triangle ABC :
- **il est nécessaire d'avoir $0 < k < 1$**
- **on peut dessiner la parallèle à (BC) passant par B_1 sur (AB) tel que $AB_1 = kAB$, ou encore $\frac{AB_1}{AB} = k$, qui coupe (AC) en C_1**

On a alors $AC_1 = kAC$ et $B_1C_1 = kBC$, ou encore $\frac{AC_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC} = k$, d'après le théorème de Thalès.

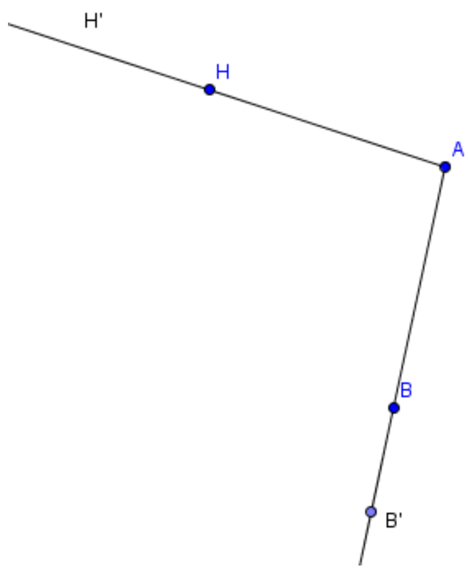


2. Pour obtenir un *agrandissement* dans le rapport k d'un triangle ABC :
- **il est nécessaire d'avoir $k > 1$**
- **on peut dessiner la parallèle à (BC) passant par B_1 sur (AB) tel que $AB_1 = kAB$, ou encore $\frac{AB_1}{AB} = k$, qui coupe (AC) en C_1**

On a alors $AC_1 = kAC$ et $B_1C_1 = kBC$, ou encore $\frac{AC_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC} = k$, d'après une démonstration qui utilise le théorème de Thalès



De la dernière construction obtenue, on peut extraire une sous-figure :



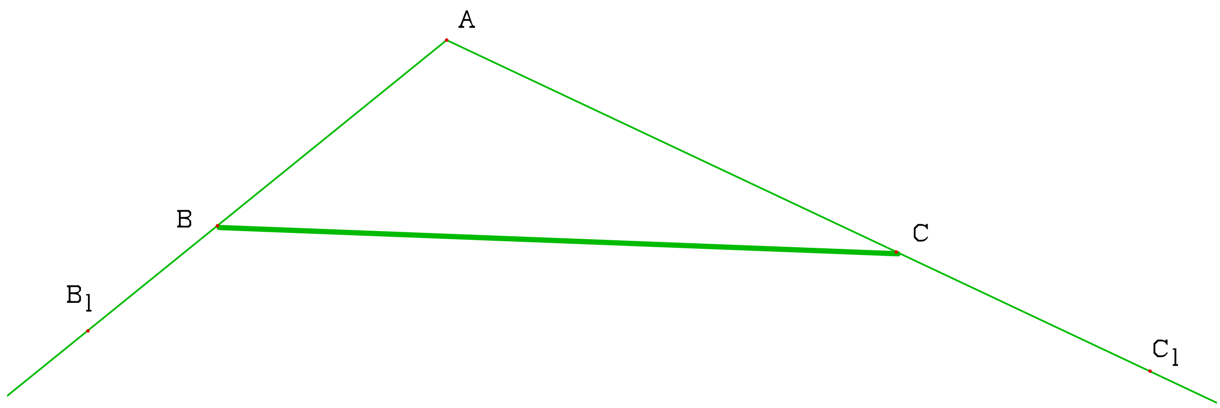
La question est la suivante. ***Que se passerait-il si on traçait la parallèle à (HB) passant par H' ; couperait-elle (AB) en B' ?***
La construction permet de constater qu'effectivement, cela paraît être le cas.

On aboutit alors à la question cruciale suivante :

On sait, par construction, que dans le triangle ABH, on a : $\frac{AH'}{AH} = \frac{AB'}{AB} = \sqrt{2}$ ***. Peut-on établir par le raisonnement qu'alors (H'B') // (HB) ? A-t-on*** $\frac{B'H'}{BH} = \sqrt{2}$ ***?***

On peut formuler autrement la question, en sortant du strict cadre de l'exercice précédent :

Une technique pour un agrandissement ou une réduction a été proposée. Elle consiste à placer B_1 sur (AB) tel que $AB_1 = kAB$, ou encore $\frac{AB_1}{AB} = k$, et C_1 sur (AC) tel que $AC_1 = kAC$, ou encore $\frac{AC_1}{AC} = k$ (donc $\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC} = k$). Sur les figures ainsi réalisées, il semble qu'on a $B_1C_1 = kBC$, ou encore $\frac{B_1C_1}{BC} = k$, et (B_1C_1) // (BC).



Plusieurs remarques sont à noter en synthèse du travail accompli, synthèse faite par le professeur ou par les élèves dirigés par le professeur.

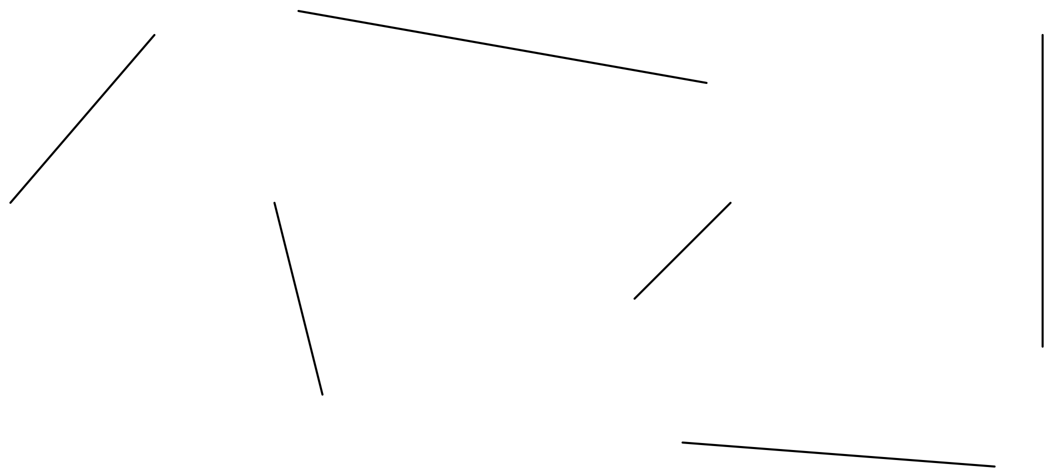
1. ***On connaît quelques techniques pour placer B_1 sur (AB) tel que $AB_1 = kAB$ avec le compas et la règle, sans utiliser ses graduations.***
2. ***On sait aussi « transporter » ce rapport afin de construire des points C_1, D_1, E_1, etc. sur d'autres droites passant par A, afin qu'ils déterminent le même rapport de longueurs avec AC, AD, AE, etc.***
3. ***On a ainsi obtenu des triangles, tous de sommet A, qui sont deux à deux des agrandissements ou réductions l'un de l'autre, dans le rapport k. Par exemple AF_1G_1 est un agrandissement de AFG dans le rapport $\sqrt{2}$ et AFG est une réduction de AF_1G_1 dans le rapport inverse $\frac{1}{\sqrt{2}}$.***

4. ***On est certain que $AG_1 = \sqrt{2}AG$ et que $AB_1 = \sqrt{2}AB$; il semble que $(F_1G_1) // (FG)$ et que peut-être $F_1G_1 = \sqrt{2}FG$. Question déjà rencontrée et dont la réponse reste en suspens.***

Le cours s'arrête en ce point.

Construction à rechercher.
Si on nous demandait un agrandissement ou une réduction pour d'autres valeurs de k, par exemple, $\frac{5}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{5}{3}$, saurait-on le faire ? On peut donner ce travail en exercice à rechercher pour travailler la technique.

La technique qui permet de répondre est *a priori* difficile, car elle correspond à un raisonnement du type analyse-synthèse. On suppose le problème résolu, sur une autre droite. On utilise une projection (dans ce cas le théorème de Thalès), transformation qui conserve le rapport, pour « transporter la solution », de la configuration pour laquelle le problème est résolu vers la configuration-cible où la configuration est à résoudre. Mais l'étude de la configuration dans laquelle le travail de « transport » du rapport d'une droite sur une droite a été mené à plusieurs reprises sert de point d'appui pour la résolution de cet exercice. On donne un segment $[AB]$ différent pour réaliser la construction correspondant à chaque valeur de k.



L'idée est de ne pas bloquer une fois pour toutes l'orientation privilégiée, de gauche à droite, pour le choix de A et B avec des segments horizontaux ou verticaux, afin de ne pas compromettre les chances que les élèves pensent ultérieurement aux deux points partageant $[AB]$ dans un rapport donné ; ce qui est l'objet de l'exercice suivant.

Autre construction à rechercher. Sur la droite (AB), comment faire pour trouver B_1 tel que $AB_1 = kAB$, ou encore $\frac{AB_1}{AB} = k$, uniquement avec un compas et une règle, ***sans utiliser ses graduations pour mesurer*** ? Répondre à cette question pour diverses valeurs de k : $\frac{3}{2}, \frac{1}{7}, \frac{4}{9}$.

Combien de points parvenez-vous à construire ainsi ? Le problème, posé dans le cas de la figure suivante,

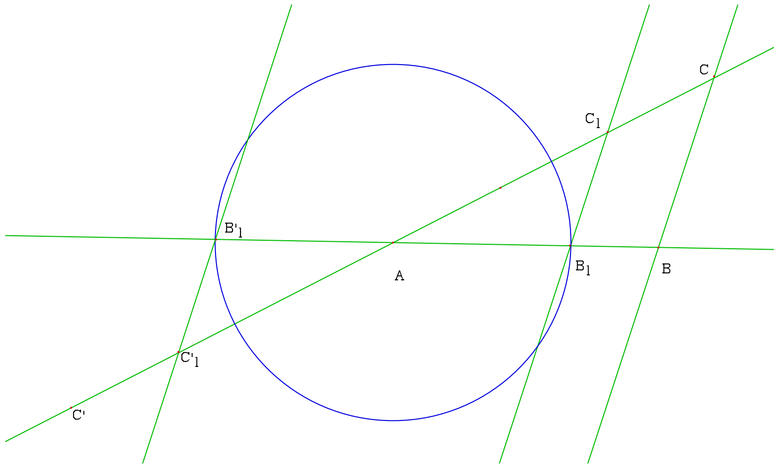
revient à chercher B_1 tel que : $AB_1 = kAB$ sur une droite (AB).

On est dans le cas d'une nouvelle première rencontre avec le type de tâches T^* : les élèves savent en principe diviser un segment en deux ou quatre parties égales, certains l'ont fait et tous l'ont revu en classe durant la première séance. Il y a plusieurs techniques pour T^* : celle qui concerne les dénominateurs du type 2^n (médiatrice), utilisable pour $\frac{3}{2}$, est en échec pour les autres valeurs, et les élèves ont à en trouver une autre.
Beaucoup a déjà été mis en place dans l'exercice qui précède et dans le cas $\frac{3}{2}$, mais il y a de très fortes chances pour que les élèves ne trouvent pas la solution par eux-mêmes… Dans ce cas, après que les élèves ont su placer B_1 dans le cas $\frac{3}{2}$, c'est au professeur d'indiquer que l'exercice qui précède nous fournit la clé.
Pour cela, la ***question cruciale*** est la suivante : ***« <u>Si on savait</u> que, sur une droite, trois points sont tels que $A'B_1' = \frac{1}{3}A'B'$, pourrait-on alors trouver B_1 tel que $AB_1 = \frac{1}{3}AB$? »***
En ce point, il y a des chances que quelques élèves se servent de l'exercice précédent et que leur idée diffuse dans la classe. Dernier coup de pouce, si l'idée n'émerge toujours pas, demander « et si $AB_1' = \frac{1}{3}AB'$? » La solution trouvée permet de résoudre aussi le problème dans le cas $\frac{2}{5}$.
A partir de ce point, on peut donc trouver B_1 pour diverses valeurs rationnelles de k, ce qu'ont à chercher les élèves, à titre d'exercice, pour : $\frac{7}{5}, \frac{5}{6}, \frac{4}{3}, \frac{3}{7}, \frac{7}{12}$.

La question demeure de savoir si le point trouvé est unique ou bien s'il y en a d'autres. Elle devient la ***question cruciale*** suivante : ***« Sur une droite (AB), combien y a-t-il de points M à une distance donnée a de A, c'est-à-dire tels que AM = a ? »***. Question à poser si elle ne surgit pas des élèves. En principe, les élèves devraient assez facilement trouver la réponse.

Une fois le deuxième point trouvé, une autre question émerge : ***« Aurait-on pu le prévoir, et même <u>le trouver</u>, en utilisant la technique de construction utilisée pour B_1 ? »***

Se poser la question, et tenter de la résoudre, amène à la configuration suivante :



De laquelle émergent de nouvelles questions :
- soit on a reproduit la construction précédente avec les points C' et C'_1, mais alors où placer B' afin de tracer $(C'_1B'_1)$ parallèle à $(B'C')$?
- soit on a placé les points C', C'_1 et B' et on est sûr que l'on a ainsi les points cherchés, mais alors est-on sûr que $(C'B') \,//\, (C'_1B'_1)$? (Dans ce cas, la réponse s'obtient par image d'une droite par symétrie centrale et transitivité du parallélisme).

Dans tous les cas, la configuration complète fait apparaître les points A, B, C, C_1 et B_1, ainsi que leurs symétriques par rapport à A.

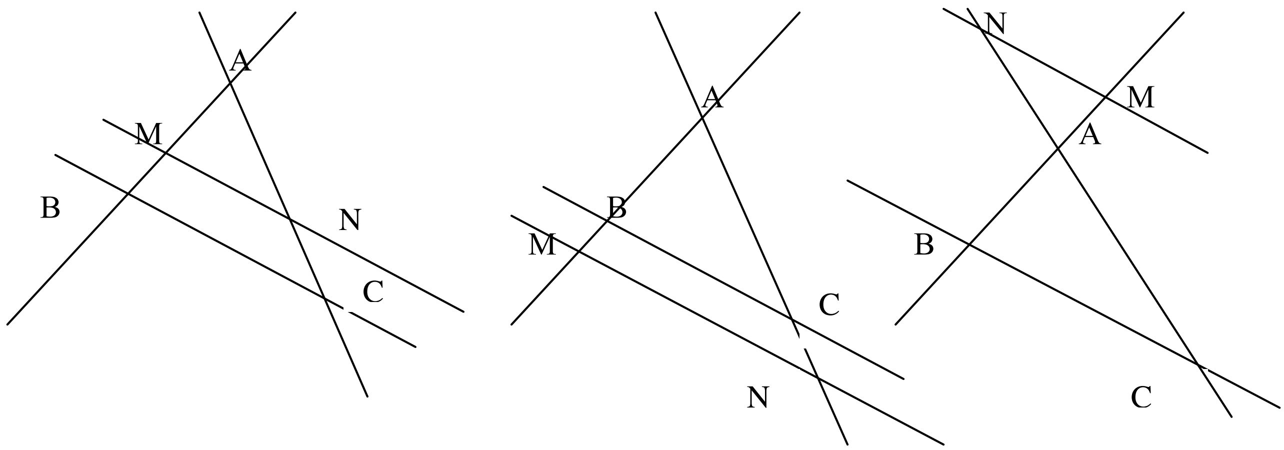
Les élèves écrivent tous les rapports égaux formés avec ces neuf points :
$AB_1/AB = AC_1/AC = AC'_1/AC' = AB'_1/AB'$ $(= B'_1C'_1/B'C' = B_1C_1/BC) = k$

Il est temps de faire la synthèse de ce que l'on vient de trouver. Celle-ci est amenée par la question suivante : ***« Finalement, lorsqu'on écrit le théorème de Thalès dans un triangle, quel est le nombre minimum de points à considérer, quelles sont les hypothèses et quelle est la conclusion ? Comment adapter cette écriture à la dernière configuration que l'on vient de trouver ? »***

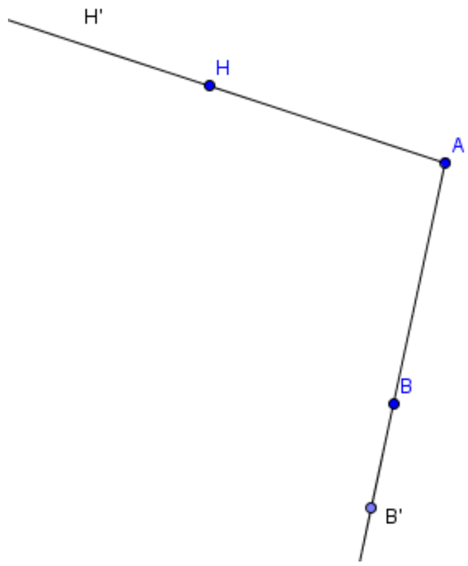
On note donc le cours qui inclut ce dernier cas :

Théorème de Thalès dans un triangle

Étant donné un triangle ABC, M un point de la droite (AB), N un point de la droite (AC), si la droite (MN) est parallèle à la droite (BC), alors $AM/AB=AN/AC=MN/BC=k$. Le triangle AMN est un agrandissement ou une réduction du triangle ABC dans le rapport k.



Le problème de savoir ce qu'il se passe lorsque l'on a seulement *AM / AB = AN / AC = k* n'est toujours pas résolu. On se remémore ce problème, le point en lequel on avait abouti.

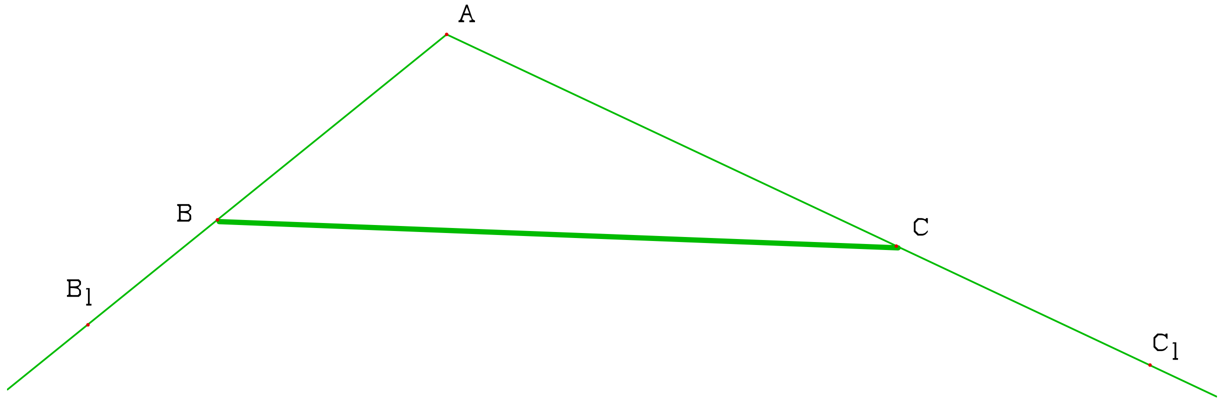


La question était la suivante. ***Que se passerait-il si on traçait la parallèle à (HB) passant par H' ; couperait-elle (AB) en B' ?***
La construction avait permis de constater qu'effectivement, cela paraissait être le cas.

On avait abouti à la question suivante :
On sait, par construction, que dans le triangle ABH, on a : $\frac{AH'}{AH} = \frac{AB'}{AB} = \sqrt{2}$***. Peut-on établir par le raisonnement qu'alors (H'B') // (HB) ? A-t-on*** $\frac{B'H'}{BH} = \sqrt{2}$ ***?***

On avait formulé autrement la question, en sortant du strict cadre de l'exercice précédent :

Une technique pour un agrandissement ou une réduction a été proposée. Elle consiste à placer B_1 ***sur (AB) tel que*** $AB_1 = kAB$***, ou encore*** $\frac{AB_1}{AB} = k$***, et*** C_1 ***sur (AC) tel que*** $AC_1 = kAC$***, ou encore*** $\frac{AC_1}{AC} = k$ ***(donc*** $\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC} = k$***). Sur les figures ainsi réalisées, il semble qu'on a*** $B_1C_1 = kBC$***, ou encore*** $\frac{B_1C_1}{BC} = k$***, et*** $(B_1C_1) // (BC)$***.***



Question cruciale :
Si $AM = kAB$ et si $AN = kAC$, a-t-on $MN = kBC$ et a-t-on (MN) // (BC) ?

La démonstration de la réciproque de Thalès repose sur un raisonnement par analyse-synthèse et un raisonnement par l'absurde (peut-on trouver plus simple ?) :

Analyse : si on trace la parallèle à (BC) passant par M, alors elle coupe (AC) en P, et on a d'après le théorème de Thalès, $\frac{AP}{AC} = \frac{AM}{AB}$. Or, $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, donc $\frac{AP}{AC} = \frac{AN}{AC}$, donc $AN = AP$. Donc soit N et P sont confondus, soit N est le symétrique de P par rapport à A. ***On peut espérer à cette étape que les élèves se souviennent des deux points partageant un segment dans un rapport donné… mais la figure n'incite pas à cela, sauf si on a ménagé une disposition explicite d'un point qui soit le symétrique de B par rapport à A.***
Synthèse : si N et P sont confondus, alors (MN) est la droite (MP) (par deux points distincts passe une et une seule droite) et donc (MN) // (BC)
Si N est le symétrique de P par rapport à A, alors (MN) est (MP) sont deux droites distinctes sécantes en M (car sinon N et P seraient confondus puisque uniques points d'intersection de la parallèle à (BC) passant par M et de (AC)). Il en résulte que (MN) n'est pas parallèle à (BC).
Conclusion : il est nécessaire de rajouter une hypothèse à l'énoncé de la question cruciale si l'on veut pouvoir conclure au parallélisme de (MN) et (BC).

Autre piste : travailler sur la feuille quadrillée distribuée qui suit, avec la consigne suivante :

Sur cette feuille, un triangle ABC et cinq autres triangles ont été dessinés. Pour chacun d'eux, les côtés correspondant à AB (par exemple A_1B_1) et à AC (par exemple A_1C_1) sont obtenus en multipliant les longueurs AB et AC par le même nombre k. On va vérifier pour chacun d'eux, s'il peut être mis en situation de Thalès avec le triangle ABC ; c'est-à-dire si en découpant et déplaçant les triangles du type $A_1B_1C_1$ sur le triangle ABC, on a effectivement (MN)//(BC) et MN = kBC. On précise que ce sont les points du type de A_1 qui jouent le rôle de M, et ceux du type de B_1 qui jouent le rôle de N.

On peut faire vérifier par les élèves que l'on a effectivement, en mesurant ou grâce au quadrillage, proportionnalité des longueurs des côtés de l'angle A_i avec les longueurs des côtés de l'angle A dans ABC. Mais il ne faut pas perdre de temps à cela ; on peut donc diviser la classe en cinq groupes ; chacun d'eux vérifiant sur un des triangles, et étant arrêté par le professeur dès qu'il a trouvé (on se contente de mesures approximatives).

Chacun des élèves découpe les quatre preliers triangles et cherche à obtenir une configuration de Thalès en le transportant, comme indiqué, sur *ABC*.
Seul le triangle $A_1B_1C_1$ est en similitude directe avec *ABC*. Les autres étant en similitude inverse ($A_5B_5C_5$ qui n'est pas semblable aux autres), il y a nécessité d'un retournement pour les mettre en situation de Thalès avec *ABC* ; c'est-à-dire pour avoir (B_iC_i) // (*BC*). Une fois dans cette position, on conjecture aisément que les longueurs des troisièmes côtés sont proportionnelles.
La nécessité d'un retournement est évidemment quelque chose de remarquable qui doit être souligné. La question qui se pose est donc la suivante : qu'est-ce qui n'a pas été pris en compte dans les hypothèses de la question cruciale précédente, et qui a nécessité le retournement de certains triangles ? Ou encore, en quoi le retournement traduit-il une hypothèse, ou une condition, supplémentaire ? Pourquoi ce retournement ?

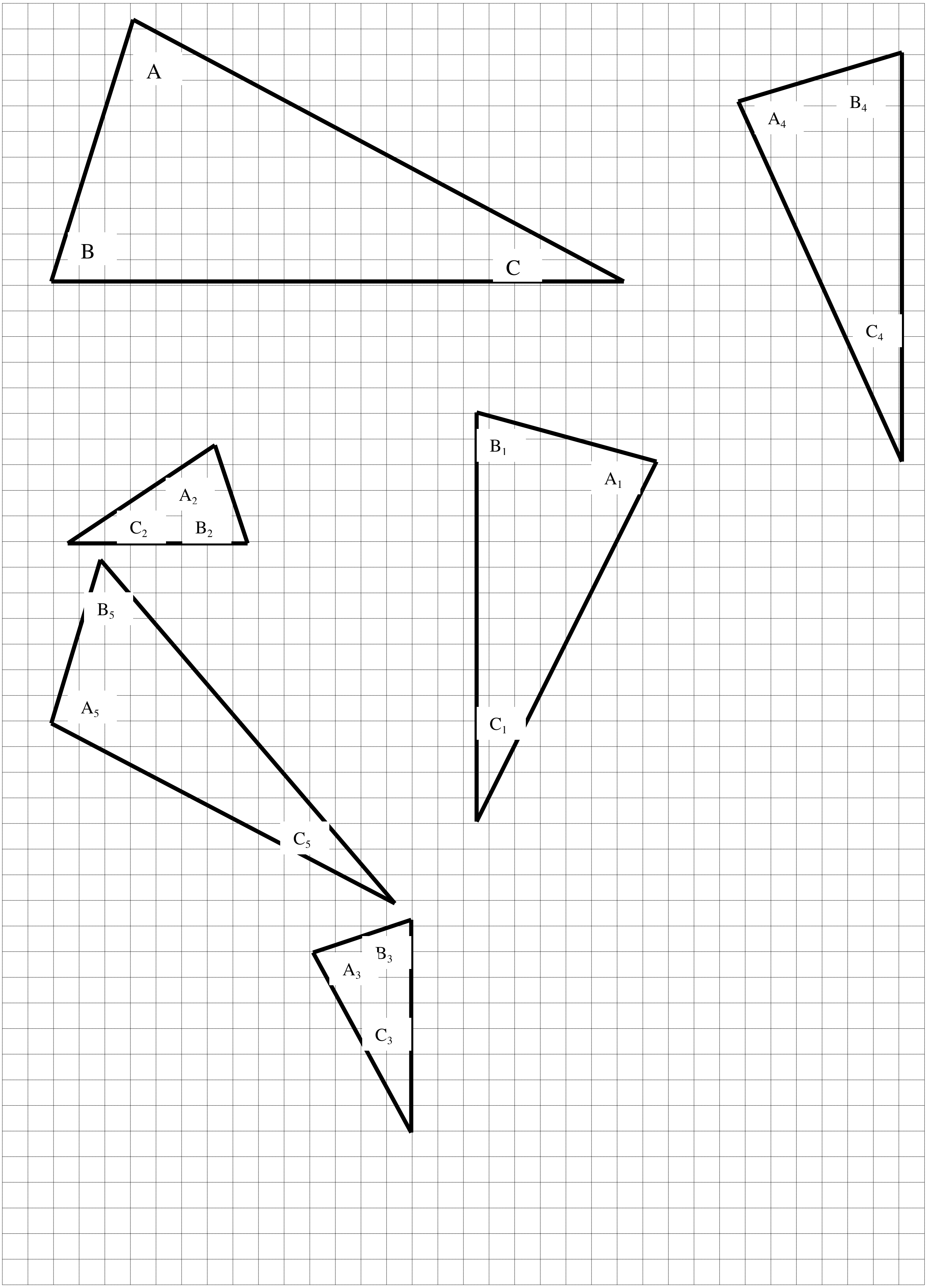
La réponse n'est pas difficile à trouver. S'il n'y a pas retournement dans le cas de ces quatre triangles, alors $B_i \notin (AB)$ et $C_i \notin (AC)$. Il faut donc préciser que $B_i \in (AB)$ et $C_i \in (AC)$.

Nouvelle question cruciale :
Si $AM = kAB$ avec <u>$M \in (AB)$</u> et si $AN = kAC$ avec <u>$N \in (AC)$,</u> a-t-on $MN = kBC$ et a-t-on (*MN*) // (*BC*) ?

On s'intéresse au cinquième triangle, $A_5B_5C_5$. Quelles hypothèses vérifient-ils ? A-t-on avec lui la conclusion annoncée sur le parallélisme et la proportionnalité pour les troisièmes côtés ? Une fois de plus, on est amené à retoucher les hypothèses en faisant intervenir l'ordre des points. Ceci permet de se placer dans le cas de la configuration de la réciproque du théorème de Thalès dans le « cas croisé ».

On arrive ainsi à l'écriture de la réciproque du théorème de Thalès dont la démonstration est proposée en travail à la maison.

On considère un triangle *ABC*.
Soit *M* est un point de (*AB*) et *N* un point de (*AC*), tels que les points *A*, *M*, *B* et *A*, *N*, *C* soient dans le même ordre, et tels que $AM/AB = AN/AC$.
Faire une figure pour $AM/AB = AN/AC = 3/2$.
Sur une feuille de papier calque, décalquer le triangle *ABC* et le point *M*. Sur le calque, on trace la droite (*d*) parallèle à (*BC*) passant par *M*. On appelle *P* le point d'intersection de (*d*) et de (*AC*).
1°/ Démontrer que $AM/AB = AP/AC$.
2°/ Superposer le calque sur la figure contenant le triangle *ABC* et les points *M* et *N*. Que constate-t-on ?
3°/ En se servant de la 1re question, démontrer que si un triangle *ABC* est tel que si *M* est un point de (*AB*), *N* un point de (*AC*) tels que les points *A*, *M*, *B* et *A*, *N*, *C* soient dans le même ordre, et tels que $AM/AB = AN/AC$, alors le point *P* d'intersection de la parallèle (*d*) à (*BC*) passant par *M* et de (*AC*) est le point *N*.`
4°/ Conclure de la question précédente que : si dans un triangle *ABC*, un point *M* de (*AB*) et un point *N* de (*AC*) sont tels que les points *A*, *M*, *B* et *A*, *N*, *C* sont dans le même ordre, et que $AM/AB = AN/AC$, alors (*MN*) // (*BC*) et $MN/BC = AM/AB = AN/AC$.


A
B
C
A_4
B_4
C_4
B_1
A_1
C_1
A_2
C_2
B_2
B_5
A_5
C_5
B_3
A_3
C_3