

# Analyse de situations

Gilles Aldon

INRP, EducTice, Equipe math

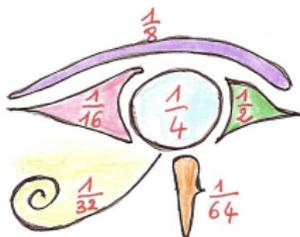
Former des enseignants en sciences physiques et en mathématiques : Outils d'analyse, de conception et de mise en œuvre de situations d'enseignement et de formation

12 janvier 2010

- Introduction
- Exemples
  - EXPRIME
  - e-CoLab
  - P2S-CORISE

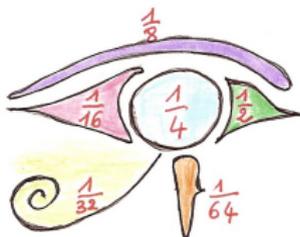
- Analyse mathématique
- Identification des connaissances et des objets mathématiques en jeu
- Anticipation des difficultés et des erreurs possibles et des conceptions qui les expliquent
- Dans un projet d'enseignement, de formation, de création de ressources,...

- Situation des fractions égyptiennes : écriture des rationnels comme somme de fractions de numérateur 1



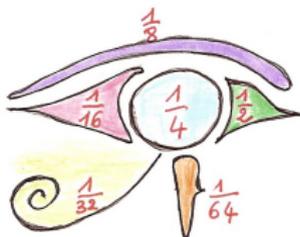
- analyse mathématique de la situation, (Brousseau, 1998)
- heuristiques, démarche d'investigation, démarche scientifique, recherche de problèmes enseignement, (Polya, Peix & Tisseron)
- notion de milieu et des objets mathématiques potentiellement travaillés, (Dorier & al., 2002, Aldon & Durand-Guerrier, 2009)
- des changements de cadres (Douady)

- Situation des fractions égyptiennes : écriture des rationnels comme somme de fractions de numérateur 1



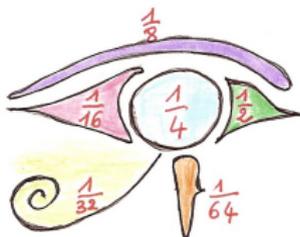
- analyse mathématique de la situation, (Brousseau, 1998)
- heuristiques, démarche d'investigation, démarche scientifique, recherche de problèmes enseignement, (Polya, Peix & Tisseron)
- notion de milieu et des objets mathématiques potentiellement travaillés, (Dorier & al., 2002, Aldon & Durand-Guerrier, 2009)
- des changements de cadres (Douady)

- Situation des fractions égyptiennes : écriture des rationnels comme somme de fractions de numérateur 1



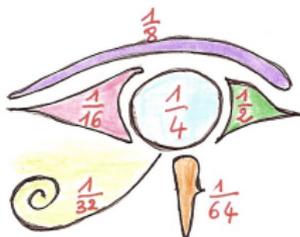
- analyse mathématique de la situation, (Brousseau, 1998)
- heuristiques, démarche d'investigation, démarche scientifique, recherche de problèmes enseignement, (Polya, Peix & Tisseron)
- notion de milieu et des objets mathématiques potentiellement travaillés, (Dorier & al., 2002, Aldon & Durand-Guerrier, 2009)
- des changements de cadres (Douady)

- Situation des fractions égyptiennes : écriture des rationnels comme somme de fractions de numérateur 1



- analyse mathématique de la situation, (Brousseau, 1998)
- heuristiques, démarche d'investigation, démarche scientifique, recherche de problèmes enseignement, (Polya, Peix & Tisseron)
- notion de milieu et des objets mathématiques potentiellement travaillés, (Dorier & al., 2002, Aldon & Durand-Guerrier, 2009)
- des changements de cadres (Douady)

- Situation des fractions égyptiennes : écriture des rationnels comme somme de fractions de numérateur 1



- analyse mathématique de la situation, (Brousseau, 1998)
- heuristiques, démarche d'investigation, démarche scientifique, recherche de problèmes enseignement, (Polya, Peix & Tisseron)
- notion de milieu et des objets mathématiques potentiellement travaillés, (Dorier & al., 2002, Aldon & Durand-Guerrier, 2009)
- des changements de cadres (Douady)

- Un élément essentiel de l'analyse *a priori*
  - objets mathématiques en jeu,
  - différentes procédures de résolution,
  - prolongements, difficultés,...
- Dans l'exemple des fractions égyptiennes

- Un élément essentiel de l'analyse *a priori*
  - objets mathématiques en jeu,
  - différentes procédures de résolution,
  - prolongements, difficultés,...
- Dans l'exemple des fractions égyptiennes



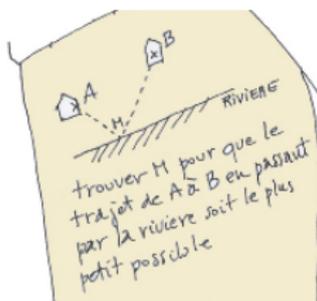
- Un élément essentiel de l'analyse *a priori*
  - objets mathématiques en jeu,
  - différentes procédures de résolution,
  - prolongements, difficultés,...
- Dans l'exemple des fractions égyptiennes
  - en collège : partage du segment  $[0,1]$ , valeur exacte, valeur approchée, différentes écritures d'un nombre, ... au lycée : décroissance de la fonction inverse, arithmétique, algorithmique, récursivité, ...
  - deux exemples développés
  - Concepts d'Égyptiens qui peut s'appliquer à notre monde de nos fractions

- Un élément essentiel de l'analyse *a priori*
  - objets mathématiques en jeu,
  - différentes procédures de résolution,
  - prolongements, difficultés,...
- Dans l'exemple des fractions égyptiennes
  - en collège : partage du segment  $[0,1]$ , valeur exacte, valeur approchée, différentes écritures d'un nombre... au lycée : décroissance de la fonction inverse, arithmétique, algorithmique, récursivité...
    - deux exemples développés,
    - Conjecture d'Erdős-Straus  $\frac{4}{n}$  peut s'écrire comme somme de trois fractions égyptiennes...

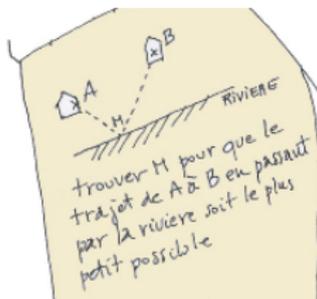
- Un élément essentiel de l'analyse *a priori*
  - objets mathématiques en jeu,
  - différentes procédures de résolution,
  - prolongements, difficultés,...
- Dans l'exemple des fractions égyptiennes
  - en collège : partage du segment  $[0,1]$ , valeur exacte, valeur approchée, différentes écritures d'un nombre... au lycée : décroissance de la fonction inverse, arithmétique, algorithmique, récursivité...
  - deux exemples développés,
  - Conjecture d'Erdős-Straus  $\frac{4}{n}$  peut s'écrire comme somme de trois fractions égyptiennes...

- Un élément essentiel de l'analyse *a priori*
  - objets mathématiques en jeu,
  - différentes procédures de résolution,
  - prolongements, difficultés,...
- Dans l'exemple des fractions égyptiennes
  - en collège : partage du segment  $[0,1]$ , valeur exacte, valeur approchée, différentes écritures d'un nombre... au lycée : décroissance de la fonction inverse, arithmétique, algorithmique, récursivité...
    - deux exemples développés,
    - Conjecture d'Erdős-Straus  $\frac{4}{n}$  peut s'écrire comme somme de trois fractions égyptiennes...

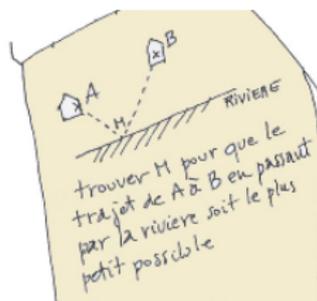
- Un élément essentiel de l'analyse *a priori*
  - objets mathématiques en jeu,
  - différentes procédures de résolution,
  - prolongements, difficultés,...
- Dans l'exemple des fractions égyptiennes
  - en collège : partage du segment  $[0,1]$ , valeur exacte, valeur approchée, différentes écritures d'un nombre... au lycée : décroissance de la fonction inverse, arithmétique, algorithmique, récursivité...
    - deux exemples développés,
    - Conjecture d'Erdős-Straus  $\frac{4}{n}$  peut s'écrire comme somme de trois fractions égyptiennes...



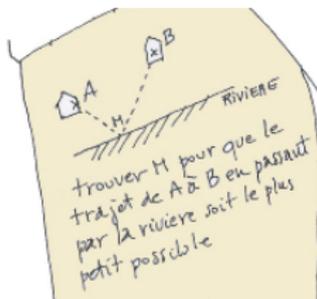
- Registre de représentations sémiotiques (Duval, 1996)
- Intra et inter représentations (Arzarello, Robutti, 2008)
- Approche instrumentale (Rabardel, 1995)
- Variables didactiques (Artigue, 1988)



- Registre de représentations sémiotiques (Duval, 1996)
- Intra et inter représentations (Arzarello, Robutti, 2008)
- Approche instrumentale (Rabardel, 1995)
- Variables didactiques (Artigue, 1988)

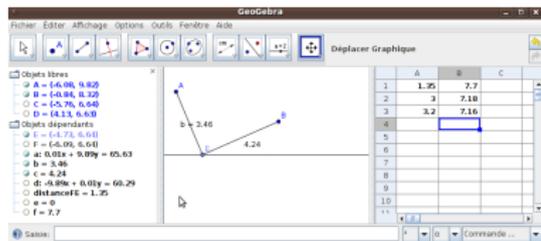


- Registre de représentations sémiotiques (Duval, 1996)
- Intra et inter représentations (Arzarello, Robutti, 2008)
- Approche instrumentale (Rabardel, 1995)
- Variables didactiques (Artigue, 1988)



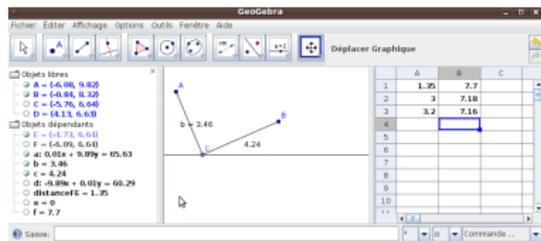
- Registre de représentations sémiotiques (Duval, 1996)
- Intra et inter représentations (Arzarello, Robutti, 2008)
- Approche instrumentale (Rabardel, 1995)
- Variables didactiques (Artigue, 1988)

- Multireprésentation
- Instrumentation et Instrumentalisation
- “Déterminer en quoi les choix effectués permettent de contrôler les comportements des élèves et leur sens” (Artigue 1988)



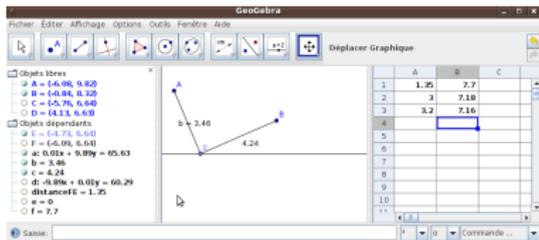
- Orchestration (Trouche, 2005)
- écran-papier/crayon

- Multireprésentation
- Instrumentation et Instrumentalisation
- “Déterminer en quoi les choix effectués permettent de contrôler les comportements des élèves et leur sens” (Artigue 1988)



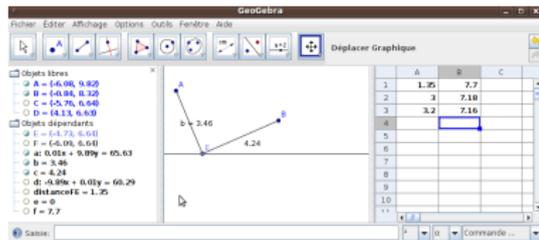
- Orchestration (Trouche, 2005)
- écran-papier/crayon

- Multireprésentation
- Instrumentation et Instrumentalisation
- “Déterminer en quoi les choix effectués permettent de contrôler les comportements des élèves et leur sens” (Artigue 1988)



- Orchestration (Trouche, 2005)
- écran-papier/crayon

- Multireprésentation
- Instrumentation et Instrumentalisation
- “Déterminer en quoi les choix effectués permettent de contrôler les comportements des élèves et leur sens” (Artigue 1988)



- Orchestration (Trouche, 2005)
- écran-papier/crayon

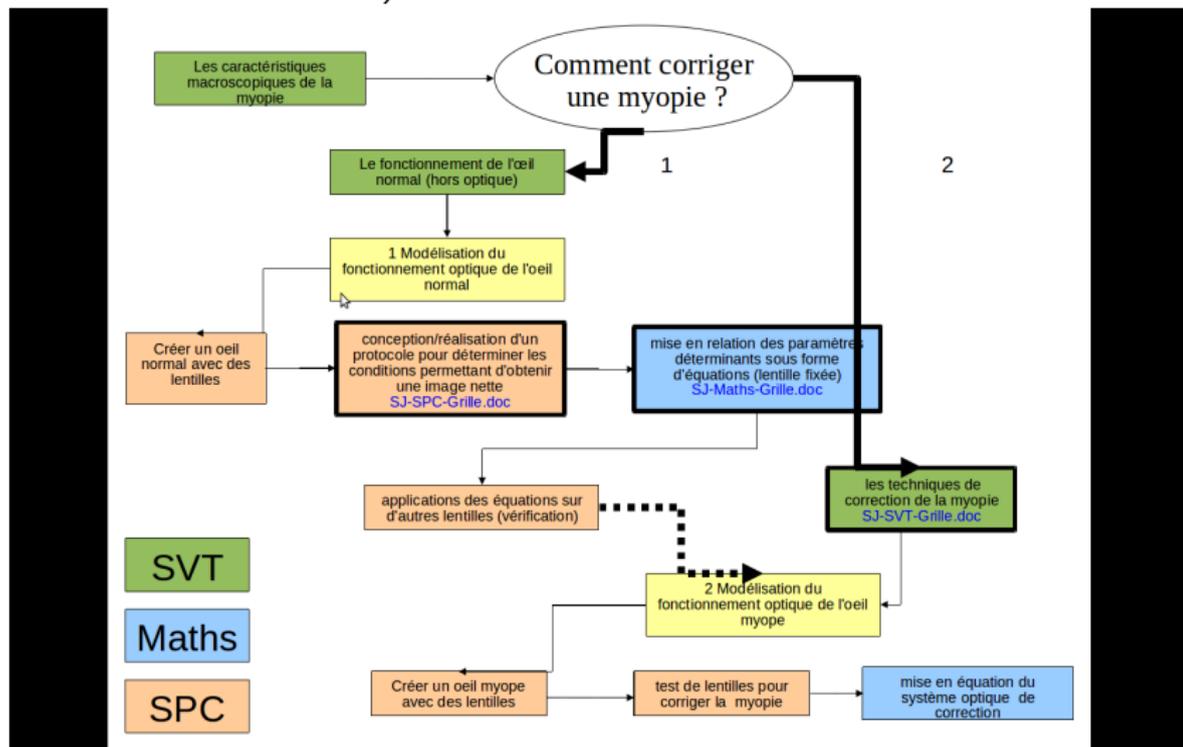
- Travail en co-disciplinarité
  - Investigation
  - en mathématiques, sciences physiques et sciences de la vie et de la Terre
  - description et communication

- Travail en co-disciplinarité
  - Investigation
    - en mathématiques, sciences physiques et sciences de la vie et de la Terre
    - description et communication

- Travail en co-disciplinarité
  - Investigation
  - en mathématiques, sciences physiques et sciences de la vie et de la Terre
  - description et communication

- Travail en co-disciplinarité
  - Investigation
  - en mathématiques, sciences physiques et sciences de la vie et de la Terre
  - description et communication

Une grille d'analyse, de description et de communication (Prieur, Sanchez, Aldon, 2009)



## Grille de préparation de la séance

		type de travail (individuel, groupe...)	rôle du prof (P) /rôle de l'élève (E)	Gestion du temps	ressources
<b>1. problématisation/dévolution</b>					
Articulation séances précédentes					
Nature du problème à résoudre					
Motivation					
Formulation du problème/centrage					
Explication du/des modèles scientifiques en jeu					
<b>2. Recueil et traitement d'information</b>					
Activités d'investigation					
éléments permettant l'autocontrôle					
connaissances nécessaires					
<b>3. production/communication</b>					
Type de production					
type de destinataire					
Critères de réussite					
<b>4. Institutionnalisation</b>					
bilan intermédiaire					
Bilan final					
<b>5. Evaluation</b>					
Nature					

- Stratégies et connaissances des élèves
  - Quelles actions et stratégies l'activité induit-elle ?
  - Quelles autres actions et stratégies sont possibles ?
  - Quelles connaissances sous-tendent ces stratégies ?
  - La connaissance visée est-elle nécessaire pour passer de la stratégie de base à une stratégie meilleure (ou optimale) ?
- Rétroactions
  - Quels types d'informations, de validation la ressource renvoie-t-elle à l'élève ?
  - Quel type d'aide est prévu ?
  - Quelle est la relation entre le type d'aide et les erreurs prévisibles chez l'élève ?

- Aldon, G., Durand-Guerrier, V. (2009). *Exprime*, une ressource pour les professeurs. In *Actes de EMF 2009*, Dakar, 6-10 avril.
- Artigue M. (1988), *Ingénierie didactique*, Recherches en Didactique des Mathématiques 9(3), 281-308.
- Arzarello, F. ROBUTTI, O. (2008) *Multirepresentations in TI-Nspire and TI-Navigator environments*, in *Sharing Inspiration*, Berlin
- Brousseau G. (1987), *Fondements et méthodes de la didactique*, Recherches en Didactique des Mathématiques 7(2), 33-115.
- Dorier, J.-L. , Artaud, M., Artigue, M., Berthelot, R., Floris, R. (eds) (2002) *Actes de la 11e École d'Été de Didactique des Mathématiques - Corps - 21-30*, Grenoble, La pensée sauvage
- Duval R. (1996), *Quel cognitif retenir en didactique ?*, Recherches en Didactique des Mathématiques, 16(3), 349-382. La Pensée Sauvage éditions, Grenoble.
- Peix, A. and Tisseron, C.(1998) *Le problème ouvert comme moyen de réconcilier les futurs professeurs d'école avec les mathématiques*, Petit x 48, volume 48, 5-21, Eds : de Grenoble, IREM
- Polya, G. (1945) *How to solve it ? A New Aspect of Mathematical Method*, Princeton University Press

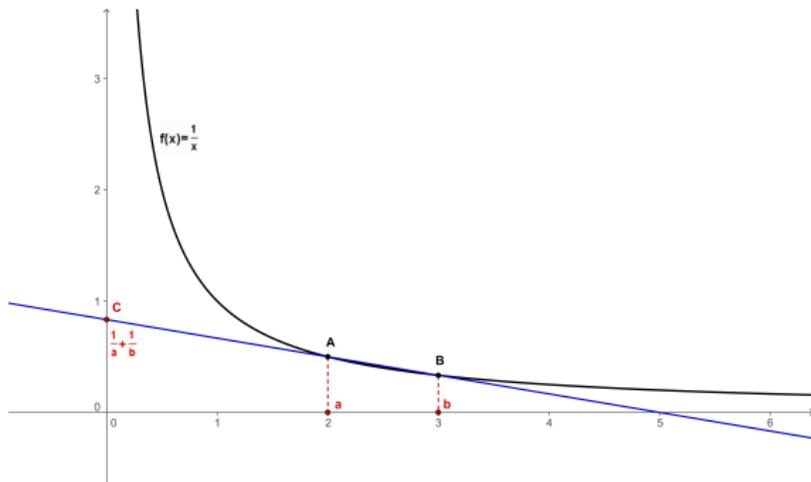
- Prieur, M. Sanchez, E. Aldon, G. (2009) Enseignement scientifique co-disciplinaire en classe de seconde : éléments à prendre en compte pour sa mise en œuvre. Journées STEAM, IUFM de Grenoble.
- Rabardel, P. (1995) *L'homme et les outils contemporains*, A.Colin
- Trouche, L (2005). Instrumental Genesis, Individual and Social Aspects. In D. Guin, K. Ruthven & L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators : turning a computational device into a mathematical instrument* (pp. 197-230). New York : Springer.

# Fractions égyptiennes et hyperbole

Peut-on trouver deux fractions égyptiennes dont la somme vaut 1 ?

On considère l'hyperbole d'équation :  $y = \frac{1}{x}$ , et les deux points de cette hyperbole d'abscisses  $a$  et  $b$ . La droite qui passe par ces deux points coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée :  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ .

Comme  $1 < a < b$ , ce point est au-dessous de 1 quels que soient  $a$  et  $b$ .



$$\frac{x}{y} = \frac{1}{E\left(\frac{y}{x}\right) + 1} + \frac{x - \text{mod}(y, x)}{y \times (E\left(\frac{y}{x}\right) + 1)}$$

Ou bien le numérateur de la fraction simplifiée

$$\frac{x - \text{mod}(y, x)}{y \left( E \left( \frac{y}{x} \right) + 1 \right)}$$

est égal à 1 et la décomposition est faite

Ou bien on recommence avec cette fraction simplifiée, son numérateur étant soit  $x - \text{mod}(x, y)$  soit un diviseur de ce nombre. Comme, de plus,  $y$  n'est pas un multiple de  $x$  (par hypothèse), on a donc  $0 < \text{mod}(y, x) < x$  de sorte que  $0 < x - \text{mod}(y, x) < x$ . Les fractions successives ont donc des numérateurs de plus en plus petits et supérieurs ou égaux à 1 ce qui permet d'assurer que l'algorithme se termine.

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{E\left(\frac{y}{x}\right) + 1} + \frac{x - \text{mod}(y, x)}{y \times (E\left(\frac{y}{x}\right) + 1)}$$

$\frac{1}{E\left(\frac{y}{x}\right) + 1}$  est la plus grande fraction égyptienne plus petite que  $\frac{x}{y}$ .

La différence  $\frac{x}{y} - \frac{1}{E\left(\frac{y}{x}\right) + 1}$  est donc strictement inférieure à  $\frac{1}{E\left(\frac{y}{x}\right) + 1}$  (sinon,  $\frac{1}{E\left(\frac{y}{x}\right)}$  serait une fraction égyptienne plus grande que  $\frac{x}{y}$  et qui serait plus petite que  $\frac{x}{y}$ , ce qui est absurde);

Par conséquent, toutes les fractions sont distinctes. [← Retour](#)