Conférence

TRANSFORMATIONS DE REPRESENTATIONS SEMIOTIQUES ET DEMARCHES DE PENSEE EN MATHEMATIQUES[1].

Raymond DUVAL
Professeur émérite, Université du Littoral Côte d'Opale
Laboratoire LCEM, Universit du Littoral Côte d'Opale.
Duval.Ray@wanadoo.fr

Résumé
La récurrence des difficultés d'apprentissage que les mathématiques suscitent oblige à s'interroger non pas seulement sur les contenus et sur la manière de les enseigner mais aussi sur les processus cognitifs sous-jacents aux démarches mathématiques. Le propos de cet exposé est d'introduire à une analyse cognitive de l'activité mathématique.
La situation épistémologique particulière des mathématiques par rapport aux autres domaines de connaissance conduit à conférer aux représentations sémiotiques un rôle primordial. Tout d'abord elles sont le seul moyen d'accès aux objets mathématiques ; ce qui soulève le problème cognitif du passage de la représentation d'un objet à une autre représentation de ce même objet. Ensuite, et surtout, les démarches mathématiques impliquent de manière intrinsèque la transformation de représentations sémiotiques.
En prenant quelques exemples dans les différentes représentations, iconiques et symboliques, des nombres, on montre que l'activité mathématique fusionne deux types de transformation de représentations sémiotiques : l'un qui correspond à un changement de registre de représentation et l'autre qui consiste à utiliser les possibilités de transformation propres à chaque registre. C'est le premier type de transformation qui se révèle être le plus difficile et le plus déroutant pour les élèves. Les difficultés pour passer d'une représentation dans un registre à une représentation dans un autre registre révèlent la complexité, trop souvent sous-estimée, de l'articulation entre eux des registres de représentation utilisés en mathématiques.
On montre enfin que l'opposition entre les représentations sémiotiques et les représentations mentales repose sur la confusion entre le système mobilisé pour produire une représentation et la modalité phénoménologique de cette production. Les représentations mentales sont souvent des représentations sémiotiques intériorisées.

Les recherches en didactique des mathématiques sont essentiellement centrées sur l'enseignement et privilégient par conséquent le point de vue et les préoccupations des enseignants. Cela a conduit à considérer les problèmes d'apprentissage en fonction des conditions d'organisation des activités en classe et en fonction de la complexité conceptuelle propre à chacun des contenus curriculaires à enseigner. Ce faisant, on a admis, à la suite de Piaget, l'hypothèse que les processus cognitifs sous-jacents à

[1] Texte paru dans In J-C. Rauscher (Ed.) *Actes du XXXII^{e} Colloque COPIRELEM*, 67-89 Strasbourg : IREM.

l'activité mathématique, seraient les mêmes que ceux mobilisés dans les autres domaines de connaissance.

Chacun sait pourtant que les mathématiques suscitent des difficultés d'apprentissage qui se révèlent vite plus complexes et plus résistantes que celles rencontrées dans les autres domaines de connaissance. Et beaucoup d'élèves ont le sentiment d'une séparation invisible entre les manières mathématiques de penser et celles pratiquées en dehors des mathématiques, même si les connaissances mathématiques servent, ou devraient leur servir, pour résoudre des problèmes ou comprendre des phénomènes rencontrés dans la réalité. Ont-ils tort ? Par delà les questions particulières d'apprentissage portant sur l'acquisition des concepts définis dans un programme annuel ou de cycle, cela oblige à se poser la question plus globale : qu'est-ce que l'activité mathématique a de si particulier par rapport aux autres activités de connaissance, pour susciter des difficultés d'apprentissage plus complexes que dans les autres domaines ? Car, en mathématiques, il faut non seulement comprendre pour apprendre, mais *comprendre de manière à apprendre à comprendre*, c'est-à-dire à devenir capable ensuite de se poser de nouvelles questions, de trouver des moyens de les explorer ou, tout au moins, de reconnaître et d'appliquer ce que l'on est censé avoir « acquis ».

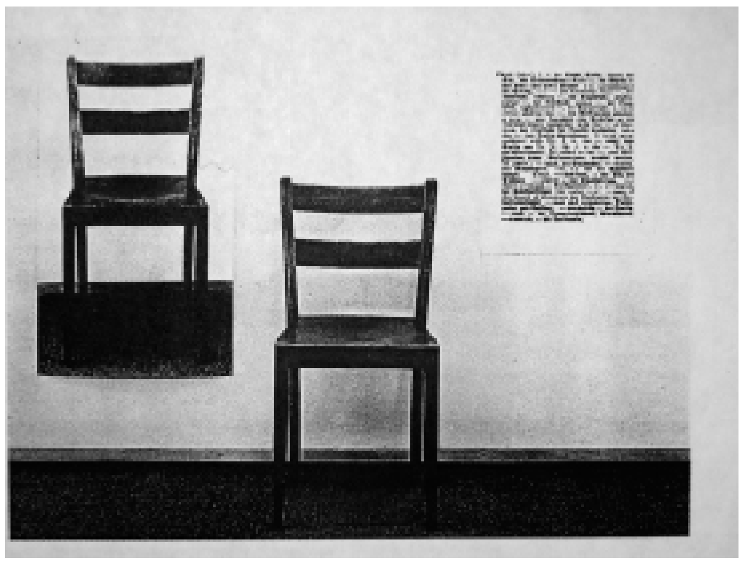
C'est dans le champ de cette question, transversale aux activités mathématiques, toujours centrées sur un contenu particulier, que l'importance des représentations sémiotiques ou, plus exactement, le rôle fondamental joué par les transformations de représentations sémiotiques dans les activités mathématiques apparaît. Et cela aussi bien pour les mathématiques enseignées à l'école que pour les mathématiques pratiquées, à un plus haut niveau, par les experts de la discipline. En effet, les transformations de représentations sémiotiques se retrouvent aussi bien dans les mathématiques dites « intuitives » que dans celles qualifiées de « formelles », dans celles considérées comme « pratiques » que dans celles évoquées comme «théoriques ». Ce qui change est le type de représentations sémiotiques qui s'y trouve mobilisé ainsi que l'accent mis sur des productions orales interactives ou sur des productions écrites permettant d'explorer des cas possibles, d'effectuer des traitements ou d'organiser des données. Mais la transformation de représentations sémiotiques est intrinsèque à toute démarche mathématique. Et là se trouve l'une des sources principales des difficultés ou, plus exactement, de la complexité cognitive de l'apprentissage des mathématiques.

Mon propos est de montrer ce fonctionnement cognitif complexe et spécifique dont la pratique des mathématiques requiert le développement. Or ce fonctionnement est loin d'être toujours visible, surtout lorsqu'on se focalise sur un contenu mathématique qui est nécessairement particulier au regard des gestes intellectuels à faire pour pouvoir appréhender ce contenu comme objet ou pouvoir l'utiliser comme outil. Il ne peut pas y avoir d'apprentissage créateur à moyen et à long terme sans une prise de conscience de ces gestes plus globaux.

Pour rendre visible ce fonctionnement cognitif spécifique, j'analyserai quelques exemples très simples, sachant qu'on pourrait en prendre d'autres complètement différents, mais pour lesquels le même type d'analyse pourrait être fait, et a d'ailleurs été fait. Naturellement je le situerai sur le fond d'un problème cognitif fondamental : pourquoi les représentations sémiotiques sont-elles intrinsèquement nécessaires au fonctionnement de la pensée et quel est leur rapport avec les représentations « mentales » ? Ce problème, qui pourrait sembler théorique à certains, commande beaucoup d'explications didactiques concernant les processus de compréhension que l'apprentissage des mathématiques est supposé mobiliser chez les élèves.

I – POURQUOI LES REPRESENTATIONS SEMIOTIQUES SONT-ELLES NECESSAIRES DANS TOUTE DEMARCHE MATHEMATIQUE ?

Pour illustrer la complexité du problème de la représentation, je partirai d'une photographie faite par Kosuth en 1965 et intitulée « Une et trois chaises ». Pour réaliser cette photographie, Kosuth a juxtaposé trois éléments dans le montage qu'il a photographié :



Elements juxtaposés	Nature des éléments juxtaposés
1. Une CHAISE contre un mur. 2. **La photographie** de cette chaise contre le mur. 3. **Une page de dictionnaire** ouvert au mot « chaise » et collée sur le mur. *On pourrait compléter ce montage avec:*	**(1) L'OBJET lui-même.** **(2)** Une **image** de cet objet, produite physiquement (par un appareil). **(3)** Une **description verbale.**
4. **Le dessin** d'une chaise permettant de la fabriquer, comme dans une notice de montage. 5. **Des flèches sur le mur** pour marquer **la relation** (*ressemblance, référence ou équivalence*) **entre** tous ces différents types de présentation d'une chaise.	**(4) Un autre type d'image,** produit par une procédure « sémiotique » de traçage. **(5) Un schéma** (*de type « réseau conceptuel »* **?)** ***« UNE et CINQ chaises » ?***

Figure 1. *Juxtaposition d'un objet et de plusieurs de ses représentations possibles.*

L'originalité du montage effectué par Kosuth repose sur une **double juxtaposition**. Il y a tout d'abord la juxtaposition **d'un objet et de l'une de ses représentations** {O, R(O)}. L'objet lui-même, ici, est évidemment une chaise sur laquelle on peut s'asseoir, ce qui la distingue de la photo et du texte descriptif, qui ne sont que des représentations. Il y a ensuite la juxtaposition de **plusieurs représentations d'un même objet** {R.A(O), R.B(O)}. Kosuth s'est limité à deux représentations, mais il aurait pu également réaliser un montage « une et cinq chaises » et, plus généralement, « une et *n* chaises».

Cette double juxtaposition met en évidence les deux caractéristiques essentielles à retenir pour analyser les représentations et pour comprendre leur rôle dans le fonctionnement cognitif de la pensée et dans l'acquisition des connaissances.

- (1) deux représentations sont différentes lorsque leurs contenus sont de nature différente, c'est-à-dire ne présentent pas le même type d'unités (mots, contours tracés, densité de points, flèches....), même si elles représentent le même objet.

- (2) il y a autant de types de représentation différents que de moyens ou de systèmes différents pour produire une représentation : appareils physiques, systèmes sémiotiques. On ne peut ni classer, ni analyser les représentations sans les rapporter aux différents systèmes permettant de les construire. Cela veut dire que les représentations ne dépendent pas d'abord des individus mais des systèmes producteurs de représentations.

Ces deux caractéristiques sont liées dans la mesure où le *contenu d'une représentation* dépend autant du *système mobilisé pour produire* la représentation d'un objet que de *l'objet représenté*.

I – 1 La double juxtaposition et les deux problèmes cruciaux pour l'apprentissage et pour l'acquisition des connaissances

La double juxtaposition mise en scène par Kosuth n'a rien de fantaisiste ou d'exceptionnel. Elle reproduit une pratique culturelle devenue dominante dans l'enseignement et dans le monde de la communication. Il suffit de remplacer la chaise par n'importe quel autre objet pour constater que la présentation en parallèle de représentations différentes (la seconde juxtaposition) se retrouve dans n'importe quelle page de manuel, de magazine, de notice, de fiche de travail, et, évidemment, sur un écran d'ordinateur où il est possible de multiplier à loisir les représentations d'un même objet. L'activité cognitive qui est ainsi partout sollicitée est la reconnaissance des objets représentés à travers des représentations variées (images, schémas, explications verbales..), celles-ci devant s'éclairer mutuellement.

On suppose généralement que cette activité cognitive est triviale. En réalité c'est l'une des plus complexes qui soient, et cela en mathématiques plus que dans les autres domaines de connaissance. Et cette complexité se retrouve au centre de tous les problèmes d'apprentissage et d'acquisition des connaissances. La double juxtaposition mise en évidence par Kosuth permet de poser les deux problèmes cruciaux suivants :

PROBLÈME 1. Il y a beaucoup de situations où l'on donne seulement une représentation sans aucun autre accès à l'objet étudié : {R(O), ?}. Comment à partir de représentations acquérir la connaissance d'objets ou de phénomènes auxquels on ne peut pas avoir accès par une «expérience» plus ou moins directe ou personnelle ? Autrement dit, *les représentations peuvent-elles fonctionner comme des substituts de l'objet pour ceux qui n'en auraient pas déjà acquis une expérience plus ou moins directe ?*

Il y a évidemment une solution que l'on retrouve dans le développement de toutes les pédagogies : faire entrer des échantillons, des spécimens de la réalité étudiée dans la classe, ou au contraire sortir de la classe pour aller sur le terrain, pour permettre justement un accès plus direct aux objets et aux phénomènes étudiés. Cela est particulièrement évident pour les sciences de la vie et de la terre et plus largement pour les sciences expérimentales. La vidéo et les possibilités de simulation sur ordinateur s'inscrivent aussi dans ce souci pédagogique fondamental :ne pas s'en tenir à la présentation de représentations dans l'acquisition de connaissances !

PROBLÈME 2. Quand nous mettons côte à côte plusieurs représentations d'un même objet, pour les comparer {R.A(O_1), R.B (O_1), R.C (O_1)... }, nous pouvons constater que leurs contenus n'ont presque toujours rien de commun. Par exemple une photographie de A et une description verbale de A, ou une photographie de A et une caricature de A. *Comment reconnaître que c'est le même objet qui est représenté dans deux représentations dont les contenus ne présentent aucune ressemblance, si l'on n'a pas (ou pas eu) un autre accès à cet objet autrement que par des représentations ?*

C'est ce problème qui se révèle crucial dans l'apprentissage des mathématiques. Il suffit de prendre l'exemple de la représentation des nombres pour le voir. Nous pouvons aisément réaliser une juxtaposition de différents types de représentations possibles d'un nombre entier (figure 2). Mais pouvons-nous réaliser un montage à la Kosuth, c'est-à-dire juxtaposer les nombres eux-mêmes et leurs multiples représentations ?

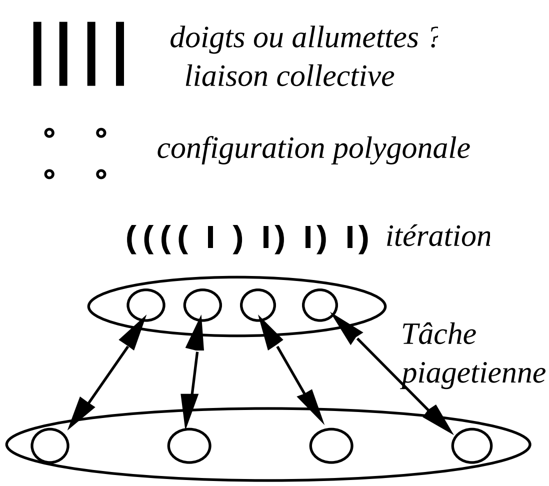
Représentation ICONIQUES Représentations « propres ».	Représentations SYMBOLIQUES (chiffres ou mots)
	**4** **SYSTÈME** décimal . **100** **SYSTÈME** binaire. Ces systèmes de position à base n impliquent ce signe par excellence, « 0 », lequel ne s'entend pas dans l'oralisation de l'écriture symbolique et ouvrent des extensions. **64/16** écriture fractionnaire. **Quatre** dénomination verbale dont le sens vient de sa place dans une suite de dénominations.

Figure 2 : *Juxtaposition de plusieurs représentations d'un nombre*.

On remarquera que nous ne pouvons avoir ici qu'une juxtaposition de représentations et non pas une double juxtaposition comme dans le montage photographié par Kosuth, même si les représentations des nombres peuvent être classées en deux catégories : les représentations iconiques, c'est-à-dire celles qui présentent une ressemblance avec des collections d'éléments matériels, et les représentations symboliques c'est-à-dire celles qui dépendent d'un système de règles de composition et qui impliquent des signes ne renvoyant à aucune « intuition » sensible ou concrète, comme le symbole « 0 ».

Cette impossibilité d'une double juxtaposition n'a rien d'accidentel, elle marque le partage entre deux situations épistémologiques fondamentales pour le développement des connaissances. Il y a la situation dans laquelle **on peut avoir accès aux objets eux-mêmes :**

- soit directement par une perception non instrumentée, ou en recueillant des données par le prélèvement d'échantillons, etc.
- soit par des instruments qui accroissent le champ de perception (télescope, microscope) ou qui permettent de recueillir des données autrement inaccessibles (spectromètres).

Et il y a la situation dans laquelle les objets étudiés **sont inaccessibles en dehors de représentations relevant uniquement d'une activité sémiotique,** comme en mathématiques. Autrement dit le rôle des représentations sémiotiques change totalement selon que l'on se trouve dans l'une ou dans l'autre de ces deux situations épistémologiques. L'enjeu du problème 2 pour l'enseignement est de savoir si les apprentissages mobilisent les mêmes processus cognitifs dans la première situation et dans la seconde ou si, au contraire, ils ne requièrent pas des processus plus complexes lorsque les objets d'étude sont perceptivement ou intrumentalement inacessibles que lorsqu'il ne le sont pas.

I – 2 Le problème cognitif du passage d'une représentation à une autre dans les deux situations épistémologiques fondamentales

Les processus cognitifs permettant de reconnaître un même objet dans des représentations différentes ne peuvent pas être les mêmes dans les deux situations.

Dans la situation où un accès direct ou instrumental aux objets étudiés est possible, la reconnaissance d'un même objet dans deux représentations différentes, et donc la capacité de passer d'une représentation à une autre (flèches 3 et 5 dans la figure ci-dessous), s'acquièrent par association directe avec l'expérience de l'objet (flèches 1, 2, 4). C'est l'expérience de l'objet lui-même qui assure la médiation entre des représentations dont les contenus sont différents. Dans cette situation, le rôle des représentations sémiotiques dans l'acquisition des connaissances est second puisqu'on peut toujours revenir à l'expérience pour contrôler la pertinence et le sens de ces représentations.

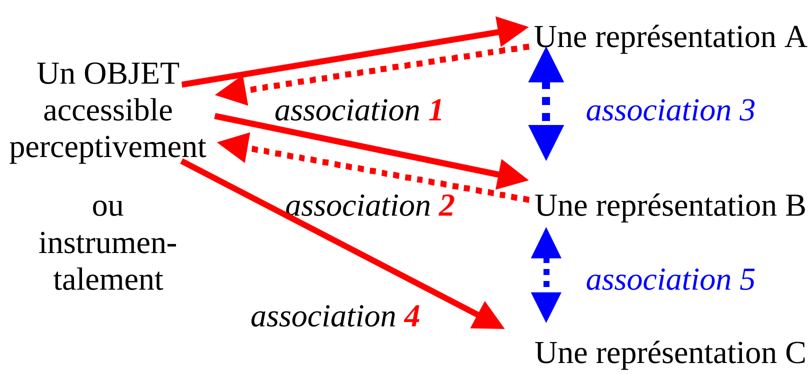


Figure 3 : *Procédure associative en situation d'accessibilité directe ou instrumentale aux objets d'étude.*

Il n'en va plus de même pour l'étude des objets perceptivement ou instrumentalement inaccessibles, et pour lesquels nous n'avons d'autres moyens pour les appréhender ou les utiliser que la production de représentations sémiotiques. Négligeons momentanément la question de savoir ce qui permet de penser que, dans cette situation, les représentations produites représentent bien quelque chose de «réel» et de rationnellement explorable, et focalisons nous sur le passage d'une représentation à une autre, c'est-à-dire sur la reconnaissance d'une même dénotation. On voit alors que toute possibilité d'association d'une représentation avec l'objet représenté devient impossible. Comment dans ces conditions, établir que deux représentations différentes A et B sont bien des représentations du même objet, alors que leurs contenus sont radicalement différents ?

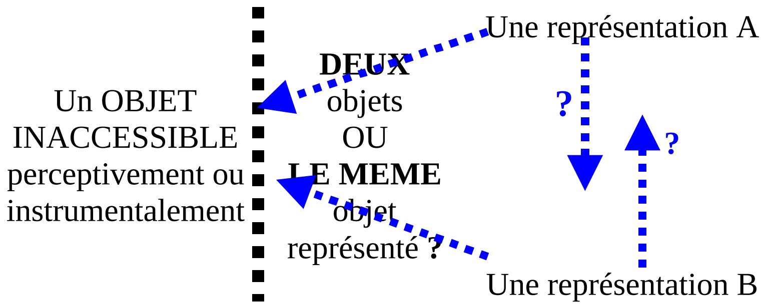


Figure 4 : *Quelle reconnaissance en situation d'inaccessibilité non sémiotique ?*

La juxtaposition de huit représentations possibles d'un nombre, présentée plus haut (figure 2), illustre bien la complexité de ce problème ne fût-ce qu'au plan didactique ! Quand un enfant utilise une, voire même deux, de ces représentations devient-il pour autant capable de reconnaître les nombres dans une troisième représentation ou une quatrième représentation ? On a peut-être aujourd'hui oublié la distance cognitive qui sépare la représentation associée à la tâche piagétienne et les autres représentations iconiques, ainsi que les débats et les difficultés que sa valorisation institutionnelle contre d'autres représentations, entre les années 60 et 80, a suscité ! On a ainsi opposé la construction du concept de nombre par des opérations de classification et de sériation, à l'énumération verbale d'une suite de nombres, que l'on hésitait pas alors à qualifier de « simple récitation d'une comptine ». Il a fallu, entre autres, les travaux de Gelman pour rappeler les principes soujacents à tout comptage, c'est-à-dire à toute énumération imliquant nécesairement des moyens de dénomination. La conquête des nombres par les jeunes enfants ne se fait pas par des actions sur un support de représentations iconiques ou sur un matériel équivalent, mais par la coordination d'actions concrètes sur des représentations iconiques avec des opérations sémiotiques relevant de systèmes sans rapport avec les représentations iconiques mobilisées. L'enjeu essentiel de l'enseignement est le passage des représentations iconiques, quelles qu'elles soient, aux systèmes de représentations symboliques, les énumérations verbales familières constituant un zone de transition indispensable ne serait-ce qu'en raison de leur spontanéité orale. Mais il arrive, comme on l'a observé dans une classe de quatrième au collège, qu'une majorité d'élèves ne réussisse pas cet exercice à trou :

$$1 + 1/2 + 1/4 \ +1/5 \ + ... = 2.$$

Les enseignants l'avaient proposé dans le but de faire passer les élèves par la représentation décimale 1 + 0,50 + 0, 25 + 0, 20 + ... = 2. , ce qui, évidemment, avait été très loin de leur venir à l'esprit.

II – QUELS PROCESSUS COGNITIFS MOBILISE NECESSAIREMENT UNE DEMARCHE MATHEMATIQUE?

Si personne ne conteste l'utilisation nécessaire de représentations sémiotiques dans les activités mathématiques, en revanche le rôle qu'elles y jouent est l'enjeu d'un débat aussi bien théorique que pratique. On admet, par la force des choses, que des représentations sémiotiques soient utilisées en place des objets mathématiques auxquels on veut faire appel ou avec lesquels on veut travailler mais on refuse généralement que l'utilisation de représentations sémiotiques, celles mobilisées ou d'autres, puisse être intrinsèque aux processus cognitifs de la pensée, et plus spécifiquement à ceux engagés dans toute activité mathématique. En témoigne la permanence de l'opposition superficielle entre langage et pensée qui conduit à opposer les représentations sémiotiques comme étant des représentations extérieures aux représentations «mentales » asémiotiques, ou à opposer le langage à l'action et aux opérations de pensée.

A l'encontre de cette réduction des représentations sémiotiques au seul rôle de substitut des objets mathématiques, ou à celui d'expression de représentations mentales, nous allons nous arrêter sur ce qui constitue la caractéristique fondamentale de toute démarche mathématique : la **transformation** de représentations sémiotiques. **Car en mathématiques, une représentation n'est intéressante que dans la mesure où elle peut se transformer en une autre représentation.** C'est seulement dans la mesure où elles répondent à cette exigence fondamentale que les représentations sémiotiques peuvent représenter quelque chose de « réel » et de rationnellement explorable, c'est-à-dire devenir le moyen d'accès à des objets inaccessibles autrement.

On voit alors que la diversité des représentations sémiotiques, loin de constituer une variété arbitraire, constitue une extension de la capacité cognitive de la pensée, car des systèmes de représentations sémiotiques différents offrent des possibilités de transformations ou d'opérations qui sont totalement différentes. La diversité considérable des représentations des nombres, que nous avons évoquée, suffit pour le montrer. Mais parallèlement à cette diversification des possibilités de transformations que la variété des représentations sémiotiques ouvre, apparaît une deuxième exigence fondamentale pour le développement de l'activité mathématiques : deux représentations différentes, avec leurs possibilités propres de transformation doivent pouvoir être mises en regard l'une de l'autre.

Pour illustrer ces deux exigences, nous allons prendre un exemple simple, celui de la représentation polygonale des nombres qui constitue l'une des représentations iconiques possibles des nombres (figure 2).

II – 1 Exemples de transformations de représentations

Rappelons tout d'abord la condition préalable pour qu'une représentation sémiotique puisse intrinsèquement donner lieu à une transformation : elle doit pouvoir être obtenue et être modifiable par une procédure de production, c'est-à dire par une procédure qui permet de transformer une représentation que l'on se donne en une autre représentation du même genre[2]. Dans l’exemple ci-dessous, la représentation est celle d’un point ou d’un jeton et la procédure consiste à y ajouter d’autres points de manière à obtenir chaque fois une configuration de forme carrée.

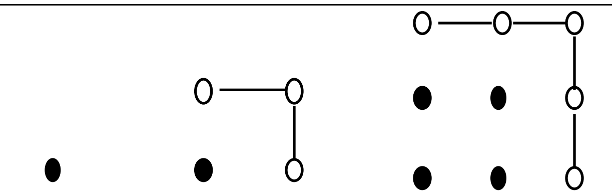
A. Une procédure de transformation d’une représentation donnée.	
B.1 **Description** de chaque représentation obtenue.	**1** **4** **9**
B.2 **Description** de la procédure de transformation.	**1** + **3** + **5**

Figure 5 : *La valeur représentative d’une représentation est dans sa potentialité de transformation en d’autres représentations.*

En ce qui concerne la première exigence, la procédure de transformation d’une configuration polygonale est perceptivement simple. En ce qui concerne la deuxième exigence, la mise en correspondance de chacune des configurations obtenues avec des représentations symboliques du nombre de points conduit à voir la suite des écritures numériques comme une description des transformations figurales successives.

Mais on aurait pu inverser les rôles en choisissant comme représentation de travail la représentation numérico-symbolique et dans ce cas la transformation polygonale apparaîtrait comme une illustration de la procédure de transformation numérico-symbolique. On remarquera également qu’il y a deux descriptions numériques possibles de la procédure dont les premiers pas sont présentés dans la figure 5.

Maintenant, on peut modifier la procédure de transformation précédente en effectuant un « encerclement » complet, et non plus seulement partiel, du point (ou du pion) de départ (figure 6 ci-dessous). Mais alors la description numérico-symbolique de cette procédure de transformation s’avère plus complexe à formuler, *car elle présuppose une réorganisation visuelle de la configuration polygonale obtenue, en des sous-reconfigurations appropriées.*

---

[2] Au lieu de procédure de production, on pourrait tout aussi bien parler de « règle de jeu ». Par exemple : « Prenez un entier, n ; s’il est pair, vous le divisez par 2, s’il est impair vous le multipliez par 3 et vous ajoutez 1. Vous recommencez cette opération avec le résultat obtenu ». Nous préférons cependant parler de « procédure de production » plutôt que de « règle du jeu», parce que sa fonction première est de générer beaucoup de données qui vont servir de base d’observation et que cette génération de données est une étape fondamentale dans la découverte ou dans la résolution de problèmes (Duval 2003a, 27).). Ainsi dans la procédure de production conduit à l’observation suivante : on tombe toujours sur 1. C’est la conjecture de Syracuse (Delayae 1998, 247). En outre cette procédure de production ne doit pas être confondue avec les règles de formation qui sont propres à chaque système de représentation (syntaxe d’une langue naturelle ou d’une langue formelle, écriture numérique de position, règles syntaxiques en algèbre...) et qui permettent de reconnaître ou d’accepter une représentation comme étant une représentation représentant quelque chose ou pouvant représenter quelque chose (Duval 1995, 37-38).

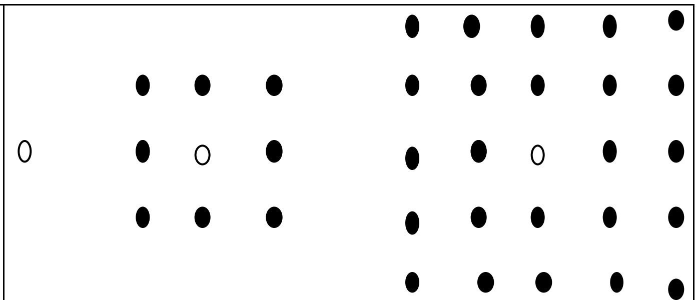
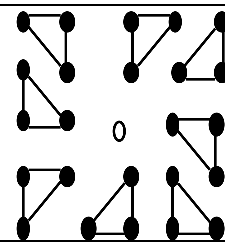
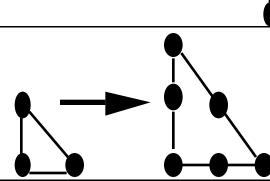
Une procédure de transformation d’une configuration par « encerclement »	
Description de la procédure de transformation.	$(1 \times 8) + 1 \longleftarrow (3 \times 8) + 1$
Sous reconfigurations triangulaires à discerner **pour la conversion en une description numérique.**	
Transformation des sous reconfigurations triangulaires à chaque nouvel « encerclement »	

Figure 6 : *Transformations d’une configuration polygonale par « encerclements ».*

Ce deuxième exemple met en évidence la complexité cognitive de la conversion à faire pour décrire numériquement la procédure de cette reconfiguration de contour carré. Dans l’exemple précédent, la dénomination numérico-symbolique (+ 3, +5, ...) de ce que produisait la procédure correspondait à l’unité figurale venant «compléter» la configuration polygonale précédente. Ici ce n’est plus le cas, la dénomination numérico-symbolique ((1 × 8), (3 × 8), (5 × 8)...) doit être mise en correspondance avec une sous-reconfiguration triangulaire, qui est différente de l’unité figurale carrée venant entourer la représentation précédente. On remarquera que cette réorganisation visuelle, des représentations ainsi obtenues, en sous-configurations triangulaire est plus facile à discerner à partir de la deuxième transformation, c’est-à-dire avec la troisième configuration.

Ces exemples de transformations de configurations polygonales de points, s’ils se révèlent vite complexes d’un point de vue cognitif, peuvent paraître très pauvres quant au contenu mathématique qu’ils peuvent représenter. Regardons donc un problème classique dont l’application à la réalité n’a rien d’un exercice inventé à des fins d’apprentissage : le pavage d’un plan par des hexagones d’aire unité minimale minimise-t-il la cire utilisée par les abeilles ? La réponse passe par le calcul du rendement d’un pavage et, pour le calculer, on regarde un pavage inscrit dans un disque. On peut ainsi montrer qu’un disque «hexagonal» de rayon **n** contient $\mathbf{3n^2 - 3n + 1}$ cellules ou hexagones et que...etc. (Sabatin 2004). Le type de transformation de configurations examiné d’un point de vue cognitif dans les deux exemples précédents peut-il, sans connaissances mathématiques, nous aider à trouver cette première formule ?

En supposant que chaque point représente un hexagone régulier et en partant d'un point, on a la procédure d'encerclements suivante :

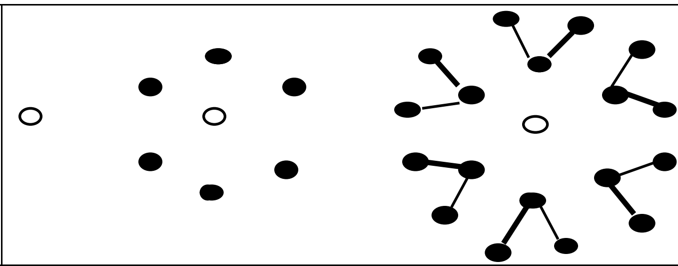
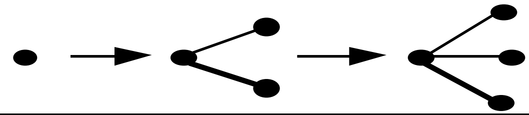
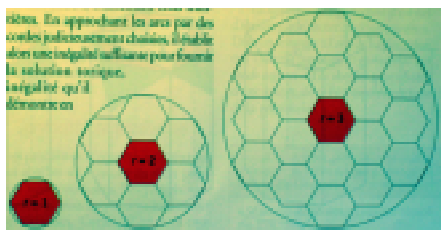
Transformations d'une configuration par « encerclements » d'hexagones réguliers.	
Chaque nouvel encerclement est obtenu par la procédure de transformation ci-contre.	

Figure 7 : *Transformation d'une configuration polygonale correspondant à un pavage, par des hexagones réguliers, inscrit dans un disque.*

Remarquons qu'il est plus facile, et peut-être visuellement plus pertinent, de construire cette suite de configurations polygonales que de construire une suite de disques, de rayon 1, 2, 3, chacun étant pavé par des hexagones réguliers (Sabatin 2004, 75).



Maintenant la question est celle de la description numérico-symbolique de cette suite de transformations polygonales. Elle s'avère encore un peu plus complexe que précédemment parce qu'il y a plus d'unités figurales différentes à prendre en compte pour les mettre en correspondance avec les dénominations numérico-symboliques. Car ici il faut distinguer le nombre de cercles circonscrits et le nombre d'hexagones ajoutés à chaque nouvel « encerclement ».

Nombre de cercles circonscrits.	Nombre d'hexagones ajoutés par chaque nouvel «encerclement » de l'hexagone central.
1 *2* *3* *4* *n*	**+ 0** **+ (1** × 6**)** **+ (2** × 6**)** **+ (3** × 6**)** + (**(n-1)** × 6)
	Et pour décrire la somme des nombres d'hexagones ainsi ajoutés, on reprend la formule $(n^2 + n)/2$: $$\mathbf{((n-1)^2 \times 6) + 6\,(n-1))/2}$$ *c'est-à-dire* **:** $\mathbf{3n^2 - 3n}$ *et en comptant l'hexagone central :* $\mathbf{3n^2 - 3n + 1}$

Figure 8 : *Description des transformations de la configuration polygonale correspondant à un pavage par des hexagones.*

La description numérico-symbolique de la procédure de transformation peut elle même à son tour être décrite de manière littérale, ce qui implique le passage à un tout autre type de représentation des nombres et de leurs relations. Là on semble devoir tricher un peu, puisqu'il faut faire appel à la formule **$(n^2 + n)/2$.** Mais ce n'est là qu'un raccourci de présentation rédactionnelle, car cette formule peut elle-même être trouvée de la manière décrite dans la figure 10 (voir ci-après).

II – 2 Les deux types de processus cognitifs sous-jacents à toute démarche mathématique

Il y a évidemment deux points de vue différents pour analyser les exemples précédents. Le point de vue mathématique et le point de vue cognitif.

D'un point de vue mathématique on peut se demander si le travail de transformations de représentations s'effectue dans un cadre numérique, ou dans un cadre géométrique ou même dans un cadre algébrique. En fait ici il est difficile de décider car ils se recouvrent en partie.

D'un point de vue cognitif, la situation est plus nette. **Il y a deux types de transformations qui sont toujours sémiotiquement disjoints et dont les fonctionnements cognitifs sont hétérogènes et indépendants.** Toute démarche mathématique les mobilise simultanément ou alternativement, explicitement ou implicitement. Peu importe la manière dont ces deux types de transformations sont mobilisés, l'essentiel pour une analyse cognitive de l'activité mathématique est de bien les identifier et de bien les séparer.

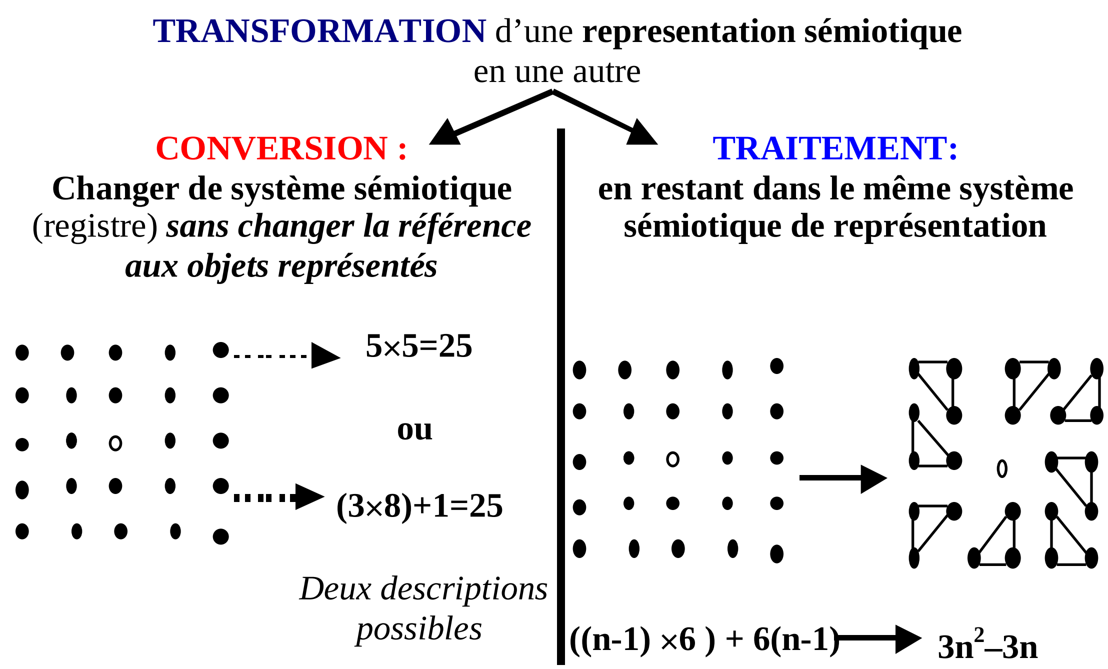


Figure 9 : *Deux types de transformations des représentations, cognitivement hétérogènes.*

Même si le choix d'une conversion à faire est mathématiquement commandé par le traitement que l'on veut effectuer, la conversion est une transformation dont le fonctionnement cognitif est hétérogène et indépendant de celui des traitements. **Et c'est**

ce type de transformation qui se révèle être le plus difficile et le plus complexe dans l’apprentissage des activités mathématiques.

II –2.1 Complexité cognitive de la conversion des représentations

L’importance et la complexité des transformations de représentations du type conversion sont trop souvent méconnues parce qu’on les assimile à de simples phénomènes de traduction ou de codage, et donc à des phénomènes de surface par rapport à ce qui serait un véritable travail de conceptualisation. Mais une telle assimilation revient à réduire la conversion aux seules transformations du type *langage* → *écriture symbolique,* et à laisser de côté toutes les autres comme celles de type configuration → écriture symbolique (décimale) comme dans les exemples ci-dessus (figures 5, 6, 8, 9). On remarquera que pour ces conversions il s’agit davantage d’une **description** que d’un codage ou d’une traduction. Et si nous inversions le sens de ces conversions, il serait encore inexact de parler de traduction ou de codage. La conversion de représentations d’un registre A vers un registre B présente deux caractéristiques cognitives qui empêchent de la subordonner à une conceptualisation non sémiotique.

1. Elle est **orientée** et **non réversible**. Ce qui veut dire que la conversion directe et la conversion inverse sont souvent de nature différente et soulèvent des difficultés et des obstacles qui n’ont rien de commun. Ainsi, pour en rester aux exemples de la représentation polygonale des nombres, la conversion directe *écriture numérico-symbolique* → *configuration polygonale* représente un saut représentationnel qui n’a rien de commun avec la conversion, laquelle consiste en une description.

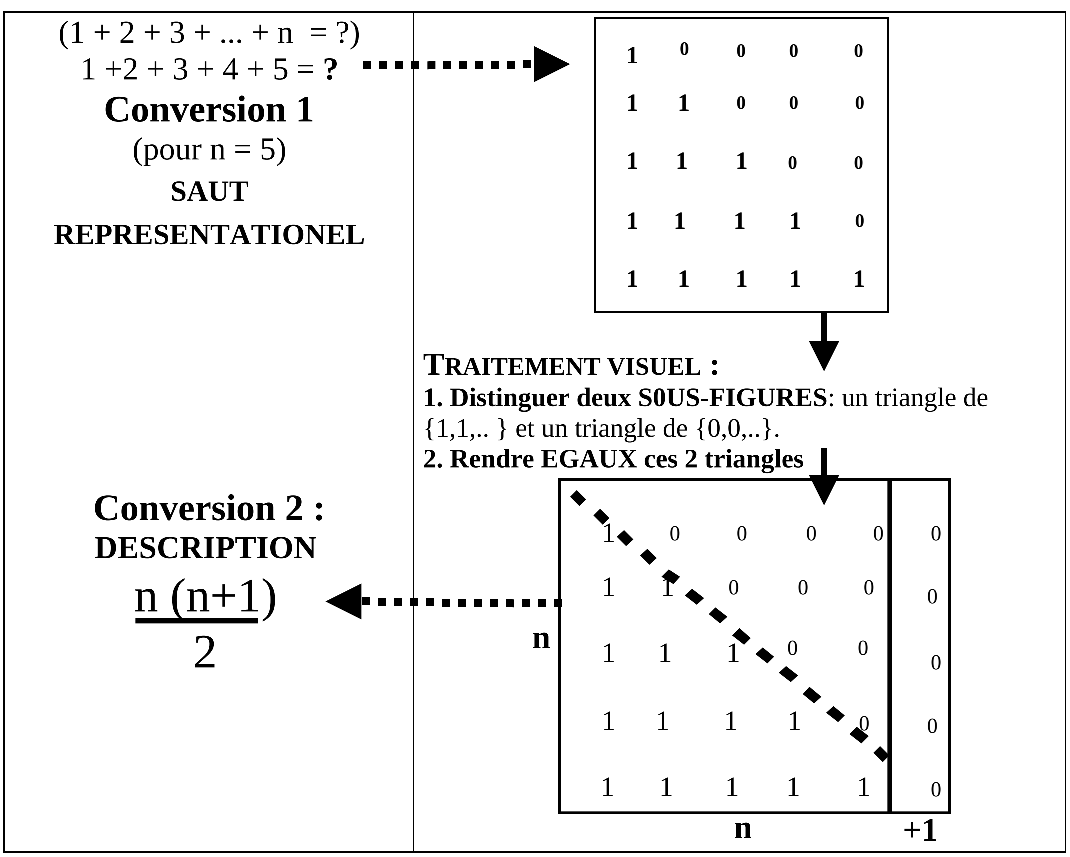


Figure 10 : *Conversion directe et conversion inverse.*

Le passage d'une représentation discursive (verbale ou numérico-symbolique) à une représentation non discursive représente très souvent un saut représentationnel important. Ici le saut repose dans le choix et l'apport de la disposition spatiale des points pour représenter une suite de nombres. Dans cette conversion le marquage explicite de l'opération numérique disparaît. La conversion inverse consiste à faire réapparaître une opération numérique. Et dans cette conversion inverse, la multiplication paraît aussi congruente que l'addition, mais elle doit prendre en compte des places vides que la conversion directe a en quelque sorte créées.

De manière plus générale, à partir d'une représentation d'arrivée, on ne retrouve pas nécessairement la représentation de départ et les opérations pour revenir à l'une des représentations de départ possibles ne sont pas les mêmes que celles ayant permis la conversion directe. Le point le plus important pour notre propos est que l'on peut étudier de manière expérimentale les facteurs qui rendent visibles ou qui au contraire occultent les conversions à faire dans une démarche de résolution de problèmes. On peut également proposer aux élèves des activités pour prendre conscience de ce jeu complexe et spécifique aux mathématiques et leur permettre ainsi de se l'approprier.

2. La mise en correspondance entre *la représentation de départ* et *celle d'arrivée*, se fait en fonction des unités pertinentes de leurs contenus respectifs et non pas en fonction de l'objet représenté par les deux représentations. La reconnaissance du même objet représenté, c'est-à-dire de l'invariance référentielle, **RÉSULTE de cette mise en correspondance discriminative entre unités constitutives des contenus.** Elle ne la commande pas. Ainsi dans le pavage hexagonal d'un cercle (figures 7 et 8) il faut discriminer respectivement :

- dans le contenu visuel, les cercles circonscrits et les « couronnes» successivement ajoutées ;
- dans le contenu de la formule littérale descriptive, (avant sa transformation par traitement) la dénomination «n» et la dénomination «(n-1)».

Le saut représentationnel qu'est la conversion devient un problème cognitif crucial pour les apprentissages en situation épistémologique d'inaccessibilité des objets représentés. Il peut être si important que l'on recourt parfois à *une troisième représentation*, qui servira transitoirement de représentation intermédiaire, *pour expliciter comment se fait la mise en correspondance* entre le contenu de la représentation de départ et celui de la représentation d'arrivée. Cela apparaît dès que le langage ordinaire est mobilisé comme registre de départ. Ce qui est le cas avec tous les problèmes se référant à une situation de la vie quotidienne (Duval 2003 a).

II – 2.2 Type de traitement et de registre de représentation mobilisé

Les traitements dépendent des possibilités de transformation propres au registre de représentation utilisé. Ainsi les différents registres de représentation n'offrent pas les mêmes possibilités de traitement :

- soit du point de vue de la puissance de traitement. Les possibilités de calcul ne sont pas du tout du même ordre avec les représentations symboliques des nombres et avec les représentations iconiques ! Celles-ci présentent vite des limitations insurmontables, non seulement concernant la «grandeur» des nombres ou la nature des nombres, mais également la nature des opérations. Les représentations iconiques ne permettent guère que les opérations additives.

- soit du point de vue heuristique. Dans l'exemple que nous venons de voir (figure 10), le traitement relève d'une réorganisation visuelle de la configuration qui a été obtenue au terme de la première conversion.

Mais derrière cela, qui est évident, il y a un point essentiel concernant les «signes» et plus généralement toute activité sémiotique : **il n'y a pas de signes en dehors d'un système sémiotique**. On peut illustrer cela en revenant aux représentations des nombres et en comparant, par exemple, la liaison collective (| | | |) et l'écriture décimale «**4**».

Un système sémiotique est constitué :

a) de règles organisatrices pour combiner ou regrouper des éléments en unités significatives, c'est à dire des expressions ou des unités figurales élémentaires.

b) d'éléments prenant une valeur de sens qu'en opposition de choix par rapport à d'autres éléments (par exemple, les chiffres d'une base d'un système de numération), leur utilisation selon les règles organisatrices permettant de désigner des objets.

Les systèmes décimaux, binaires, etc. de représentation des nombres sont les systèmes sémiotiques les plus simples, les plus purs et les plus puissants que l'on puisse trouver. Ainsi ils ont une règle organisatrice (un déplacement de position vers la gauche correspond à une opération d'une élévation à la puissance) et leurs éléments sont définis par la base, laquelle comprend ce signe «0» qui ne peut désigner aucun objet. Les traitements numériques, effectués dans ces systèmes, doivent respecter ces règles et contraintes organisatrices internes au système, car ce sont elles qui leur donnent non seulement une capacité de représentation illimitée mais également leur puissance opératoire pour toutes les opérations arithmétiques. Ils représentent un pas important dans le développement des mathématiques.

Par rapport à cela, les représentations iconiques, à commencer par les liaisons collectives (| | | |), ne sont pas des signes mais des **pseudo-objets**. Elles n'ont pas de règles organisatrices qui déterminent leur emploi ou leurs combinaisons. Les opérations que l'on peut faire sur ces pseudo-objets sont externes et isomorphes à celles que l'on peut faire sur des objets matériels, comme le montrent bien les tâches proposées dans les épreuves piagétiennes. Ces représentations iconiques des nombres peuvent servir :

- soit de support visuel pour des manipulations de reconfiguration perceptive (regroupement, mise en correspondance), comme on a pu le voir dans les exemples précédents dans lesquels il y avait toutefois une procédure de transformation ;
- soit de support matériel pour des comptages comme on peut l'observer dans la résolution de problèmes de dénombrement (Duval 2003, p.22-25).

Mais elles ne peuvent pas constituer à elles seules un moyen de traitement. Leur utilisation mathématique requiert au moins une première articulation avec un système de représentation sémiotique, ne serait-ce que pour permettre les opérations de comptage.

En ce qui concerne **les registres communs** à tous les domaines de connaissance (la langue et les représentations figurales), *les mathématiques ne font pas appel aux mêmes possibilités de transformation* que celles que l'on utilise communément en dehors des mathématiques. Pour le langage ordinaire, cela peut être observé de façon spectaculaire avec la première des opérations discursives, la désignation des objets (Duval 2003b, p.26-27 ; Duval 1995, 98-110). Pour la visualisation, c'est-à-dire pour tout ce qui se rapporte à la production instrumentée ou à l'analyse de «figures géométriques », cela peut être observé avec les différentes pratiques de décomposition et de recomposition des formes qui sont le degré zéro de toute activité géométrique (Duval 2005). Or dans ce recours nécessaire à ces registres communs, on fait comme si on les utilisait en mathématiques de la même manière qu'en dehors des mathématiques. Ce qui est une source profonde de malentendus entre l'enseignant et les élèves.

II – 3 Vue d'ensemble des processus cognitifs sous-jacents aux démarches mathématiques

En présentant ces exemples, mon but était de mettre en évidence les deux types de transformations que l'activité mathématique mobilise simultanément ou en alternance. Ils correspondent à deux types de processus cognitifs hétérogènes et indépendants l'un de l'autre. Cela, évidemment, laisse entière la question du caractère fondamental et général de ces deux processus. Il faut donc regarder la variété des registres de représentation dans lesquels, ou entre lesquels, ces deux types de transformations sont effectués. La classification ci-dessous en donne un premier aperçu et permet d'avoir une vue d'ensemble des processus cognitifs sous-jacents aux démarches mathématiques.

	REPRESENTATIONS résultant de l'un des trois types d'**OPERATIONS DISCURSIVES:** *1 Référence à des objets (syntagme, marque..)* *2 Enonciation d'une relation ou d'une propriété* 3. *Expansion d'énoncés (déduction, calcul...)*	**REPRESENTATIONS NON-DISCURSIVES** *Formes, configurations* **1D**/2D, **2D**/2D**, 3D**/2D
REGISTRES MULTI-F0NCTION-NELS **Les traitements ne sont pas algorithmisables**	dans une LANGUE NATURELLE **deux modalités non équivalentes :** **- ORAL (parole/écoute)** *limitations d'appréhension et des capacités de traitement du discours* **??** **- ECRIT (visuel)** :	**ICONIQUE:** *croquis, caricatures, B.D...* **NON -ICONIQUE:** figures *géométriques constructibles avec un instrument*
	Représentations AUXILIAIRES : aucune règles *de combinaison (support libre)*	
REGISTRES MONO-FONCTIONELS **La plupart des traitements sont algorithmisables**	DANS un SYSTEME de SYMBOLES **UNIQUEMENT la modalité ECRIT :** ***impossible à dire sinon en épelant*** *Calcul*	**Combinaison D2 de formes D1 et D0, orientées** (FLÈCHES) ou non *Graphiques, schémas, cartes....*

Figure 11 : *Les processus cognitifs pouvant ou devant être mobilisés dans une démarche mathématique*

Le jeu cognitif des transformations de représentations sémiotiques, mobilisant simultanément ou en alternance conversions ((les flèches rectilignes) et traitements (les flèches larges recourbées), est schématisé sur le fond d'une classification des registres de représentations sémiotiques en quatre grands types. Les conversions directes et inverses sont distinguées par des traits pleins et des traits en pointillés. Enfin on remarquera que la modification modale importante que constitue le passage de l'oral à l'écrit est propre au registre des langues naturelles et qu'elle ne peut donc pas être considérée comme un traitement ou comme une conversion.

On peut voir ainsi que, d'un point de vue cognitif, la géométrie repose sur l'articulation des deux registres multifonctionnels (au niveau de l'enseignement primaire) et que le fonctionnement cognitif permettant cette articulation exige la mobilisation, simultanée ou en alternance, de conversions directes et inverses ainsi que des traitements spécifiques à chacun de ces deux registres (Duval 2005). Exigence qui n'a rien de naturel, qu'on ne retrouve pas de cette manière dans les autres domaines de connaissance et qui demande donc des apprentissages spécifiques (Godin & Duval, 2005). On remarquera aussi que le passage des registres de langue naturelle aux registres monofonctionnels discursifs requiert souvent le recours à des représentations auxiliaires, comme on peut le voir, par exemple avec la compréhension des énoncés de problèmes dès l'enseignement primaire (figure 12).

Signalons enfin, que les différentes conversions (flèches rectilignes) constituent chacune des variables cognitives indépendantes à prendre en compte dans l'analyse des apprentissages. Concrètement cela nous renvoie à la question : les élèves peuvent-ils mettre en œuvre d'eux-mêmes chacune de ces différentes conversions, ou cela ne requiert-il pas, au contraire, un travail spécifique de coordination entre deux registres et une prise de conscience du fonctionnement spécifique à chacun des registres ? Car c'est leur fonctionnement en synergie qui constitue les démarches de pensée en mathématiques.

III – ECLAIRAGES SUR LES PROBLEMATIQUES D'APPRENTISSAGES

III – 1 Un principe méthodologique d'analyse pour la recherche comme pour des diagnostics

Il faut commencer par **SEPARER COMPLETEMENT** ces deux types de transformation que sont les conversions et les traitements. Cela aussi bien pour faire une analyse a priori des tâches, y compris de celles impliquées par la résolution d'un problème, que pour faire une analyse des productions d'élèves. Car, répétons le, d'un point de vue cognitif ces deux types de transformations de représentation sémiotique dépendent de processus qui n'ont rien de commun. Ce sont deux sources indépendantes de difficultés dans l'apprentissage. Et la toute première source de difficulté est d'abord dans les changements de registre de représentation. La conversion est **ce seuil de compréhension** qui apparaît souvent aux élèves comme un tour de magie, qui ne peut être ni appris ni enseigné.

Cette séparation va à l'encontre de la pratique courante qui considère conversion et traitement comme un tout inséparable dans la résolution de problème. Mais pour comprendre les difficultés récurrentes des étudiants face à un problème, on ne peut pas les dissoudre dans une analyse menée du seul point de vue mathématique. Car ce que l'on considère comme simple et premier d'un point de vue mathématique présuppose pour devenir accessible aux élèves une synergie cognitive de différents registres de représentation. Or cette synergie :

1) n'est ni sollicitée ni requise dans la plupart des autres domaines de connaissances, en raison de l'accessibilité non sémiotique aux objets ou phénomènes étudiés (figure 3).

2) exige un long travail, non de construction conceptuelle, mais de construction de «l'architecture» des différents systèmes producteurs de représentations, sémiotiques et non sémiotiques qui constituent le «sujet épistémique».

On objecte généralement que, dans la résolution d'un problème, ce sont les traitements qui sont importants mathématiquement et non point les conversions, car c'est le traitement à faire qui permet de choisir la conversion utile ou pertinente. Ce qui est vrai mais cela n'affaiblit pas la nécessité de séparer les conversions et les traitements pour l'analyse des tâches et des productions dans l'organisation des apprentissages. Bien au contraire, cela montre que la capacité à changer de registre constitue la compétence primordiale pour pouvoir chercher des problèmes en mathématiques.

Revenons au problème de la somme de la suite des entiers (figure 10). C'est le traitement visuel à faire, celui qui montre comment un traitement additif se transforme en traitement multiplicatif, qui permet de choisir la représentation polygonale pertinente. Mais pour faire ce choix, encore faut-il être en mesure de le faire, c'est-à-dire d'effectuer de soi-même un changement de registre, d'explorer les différentes possibilités qu'il offre et de contrôler l'apport pour le problème à résoudre. Ce que nous pourrions appeler, pour reprendre un mot slogan, une «compétence» cognitive de choix représentationnel ! Or une telle compétence n'est pas liée à un contenu mathématique particulier - contenu que l'on analyse généralement en termes de « concepts» **- elle est au contraire transversale à des contenus mathématiques très différents et elle constitue le dynamisme interne des démarches mathématiques.**

III – 2 Une approche cognitive des processus de compréhension

La compréhension commence **avec l'articulation,** pour le sujet, **de deux registres de représentation.** Autrement dit**, on ne peut jamais considérer qu'un type de représentation est meilleur qu'un autre si l'individu** n'est pas capable de contrôler, par lui-même et **dans les deux sens,** la conversion d'un type de représentation mis en avant par l'enseignement avec un autre type de représentation. Autrement dit, il ne faut pas se focaliser sur les représentations utilisées mais sur leur articulation avec un autre registre de représentation. Pour illustrer cela très rapidement, nous pouvons évoquer rapidement deux pratiques didactiques communes visant à «donner du sens» en privilégiant le «concret» ou des situations «réelles».

Pour proposer des activités mathématiques (numériques ou géométriques) on cherche généralement des supports matériels qui permettent d'«agir» c'est-à-dire d'effectuer des manipulations et de résoudre des problèmes. Ce qui revient à privilégier les représentations iconiques. Or cette pratique, nécessaire, ne se révélera efficace pour des acquisitions profondes à long terme que si une importance égale est attachée à la production d'une **description** des représentations iconiques qui ont été privilégiées didactiquement. Trop souvent, on se limite à la réussite en surface dans l'utilisation d'un type de représentations comme si les transferts allaient s'ensuivre normalement. Et j'insiste sur le terme description que l'oppose aux termes habituellement employés d' validation de ce qui a été fait (Duval 2003a). Ainsi dans les exemples présentés plus haut, en supposant que les représentations polygonales de points soit matérialisées par des pions sur des cases, la description des transformations faites est aussi importante que le jeu que l'on peut faire pour gagner.

La deuxième pratique didactique commune est le recours à des **représentations auxiliaires** pour aider les élèves dans la résolution des **problèmes** élémentaires d'application d'un traitement mathématique à une situation de la vie «réelle», les problèmes additifs et les problèmes de proportionnalité en étant les exemples typiques. Or, quand on regarde la diversité des représentations auxiliaires mises en avant *selon les types de traitement mathématiques mis en problèmes,* on voit que l'utilisation de représentations auxiliaires n'a rien d'évident. On ne peut pas les utiliser sérieusement dans l'enseignement sans s'être posé les questions suivantes :

(1) Quelles représentations ? Lesquelles devraient le mieux marcher et pourquoi ?
(2) Avec quoi s'articulent-elles ?
(3) Comment les introduire ?

Or si l'on se pose habituellement les questions (1) et (3), on ne pose pratiquement jamais la question (2) qui est pourtant la plus importante quand il s'agit de représentations auxiliaires.

Rappelons qu'il n'y a pas de problème sans un **énoncé** et que les énoncés de problèmes d'application combinent toujours deux descriptions **:** celle de la situation «concrète» que l'on évoque, et celle des données nécessaires pour l'application des opérations arithmétiques à effectuer. L'une des grandes difficultés qui apparaissent concernent ce qu'on a appelé la sélection des «informations pertinentes». Or une telle sélection coïncide avec une phase de conversion des expressions linguistiques concernant la description des données nécessaires au choix et à l'application des opérations à effectuer.

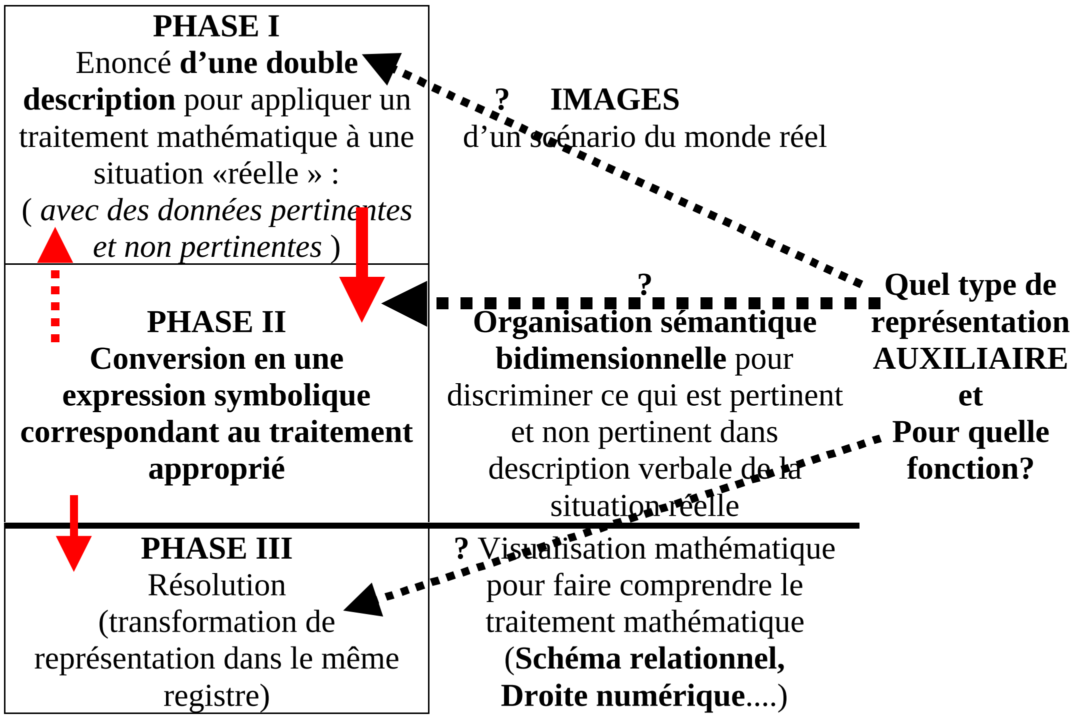


Figure 12 : *Equivocité fonctionnelle des représentations auxiliaires*

L'inefficacité, souvent constatée, des représentations auxiliaires introduites ou promues dans les documents pédagogiques, ne tiendrait-elle pas au fait que les représentations auxiliaires introduites concernent la phase III, ou parfois la phase I, et non pas la phase II (Duval, à paraître).

III – 3 Un problème crucial pour tous les modèles cognitifs : quel rapport entre les représentations sémiotiques et les représentations « mentales » ?

On pourrait croire que nous soulevons un problème que ne se pose pas, puisqu'il semble évident d'opposer les représentations sémiotiques aux représentations mentales comme des représentations externes à des représentations internes ! Ce qui conduit à penser qu'il faudrait mobiliser des représentations mentales pour comprendre ce que les représentations sémiotiques représentent, comme si ce qu'elles représentent ne pouvait pas être une autre représentation sémiotique dans un autre registre.

Or, avec cette opposition, on méconnaît deux choses. D'une part toute représentation dépend d'un système spécifique permettant de la produire, et d'autre part, toute production d'une **représentation consciente** combine deux aspects indépendants l'un de l'autre :

- les **systèmes producteurs de représentations,** *lesquels peuvent être non sémiotiques ou sémiotiques ;*
- **les modes phénoménologiques de production *qui peuvent être externes ou internes.***

Ainsi toute production d'un discours peut se faire selon trois modes phénoménologiques différents : «mentalement», «oralement», «visuellement» (par un code graphique). C'est d'ailleurs cette distinction des trois modes phénoménologiques de production «langagière» qui joue un rôle fondamental dans les analyses de Vytgoski (1985).

On obtient donc les distinctions suivantes :

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="3">MODE PHENOMENOLOGIQUE DE PRODUCTION</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td rowspan="2">MENTAL</td><td colspan="2">EXTERNE / MATERIEL</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>ORAL</td><td>VISUEL</td></tr>
<tr><td rowspan="2">NATURE
du
SYSTEME de
Production</td><td>SEMIOTIQUE: production intentionnelle : relation de référence</td><td>VERBALISATION NON VOCALISEE
Fonctions d'objectivation et de traitement (limité)</td><td>PAROLE
Fonction de communicatio n</td><td>ÉCRITURE, DESSIN
Fonction de traitement, d'objectivation ou de communication</td></tr>
<tr><td>NON SEMIOTIQUE (PHYSIQUE, NEUROLOGIQUE : production automatique : relation de causalité</td><td>IMAGE MENTALE (MEMOIRE)
Fonction d'objectivation</td><td></td><td>IMAGE REFLET, PHOTOS
Fonctions de matériau ou de données enregistrées</td></tr>
</table>

Figure 13 : *Classification des différents types de représentations conscientes.*

Pour classer toutes les représentations conscientes possibles, sémiotiques et non sémiotiques, il est important de ne pas confondre la nature du système spécifique qui les produit et le mode phénoménologique selon lequel la représentation est explicitée. Ce sont là deux dimensions cognitives complètement indépendantes (Duval 1999, p.42-48). L'aspect le plus important est évidement la nature du système de production.

Il y a deux différences importante entre les deux types de systèmes quant à la production des représentations. La première tient au fait que la production d'une représentation sémiotique est nécessairement intentionnelle, tandis que la production d'une représentation non sémiotique est souvent automatique. La seconde tient à la nature de la relation entre le contenu de la représentation produite et l'objet représenté. Dans une représentation non sémiotique la relation entre l'objet représenté et le contenu de la représentation est une relation de causalité via le système physique ou neurophysiologique mobilisé. Dans une représentation sémiotique, il n'y a aucune relation de causalité, car chacun des éléments formant le contenu de la représentation relève d'un choix de celui qui la produit. La relation est soit simplement une relation de ressemblance ou une relation de référence. Ainsi, dans un dessin c'est une relation de référence tandis que dans une photo c'est une relation de causalité. Il est essentiel de ne pas confondre la nature du système de production et le mode phénoménologique de production.

.

Il apparaît donc que les représentations sémiotiques ne sont ni mentales, ni matérielles, ni internes, ni externes. Ces oppositions renvoient aux modes phénoménologiques de production des représentations et non pas à la nature des systèmes qui produisent les représentations. En d'autres termes, les représentations sémiotiques sont neutres par rapport à ces modes phénoménologiques, même si chaque mode ne remplit pas exactement les mêmes fonctions cognitives dans la production de représentations comme on peut le voir dans le tableau (figure 13).

III – CONCLUSION

A travers les exemples présentés au cours de cet exposé, j'ai cherché à mettre en évidence deux données fondamentales concernant les processus cognitifs de la pensée en mathématiques.

(1) Les transformations de représentations sémiotiques sont intrinsèques aux démarches mathématiques.

(2) Il est nécessaire, dans une analyse cognitive des démarches mathématiques, de séparer deux types de transformation de représentations sémiotiques qui, d'un point de vue mathématique, fusionnent en quelque sorte.

Naturellement je m'en suis tenu à un point de vue cognitif sur l'enseignement des mathématiques. Et la question rebondit : pourquoi un point de vue cognitif serait-il aussi important que le point de vue mathématique pour l'enseignement des mathématiques ? Merveilleuse question puisqu'elle nous ramène au problème soulevé en introduisant le sujet de cet exposé. Les processus cognitifs sous-jacents à l'activité mathématique sont-ils les mêmes que ceux mobilisés dans les autres domaines de connaissance ou, au contraire, sont-ils propres aux démarches mathématiques parce que plus complexes ?

La double juxtaposition, que la photographie de Kosuth met en scène, montre le paradoxe qui est au coeur de toute l'activité cognitive, quelle que soit son degré de complexité. Et nous avons vu qu'elle conduit, pour l'acquisition des connaissances, à distinguer deux situations épistémologiques fondamentales. L'une de ces deux situations, celle justement des mathématiques, soulève un problème cognitif spécifique que l'on rencontre à chaque pas, si j'ose dire, dans n'importe quel problème mathématique et dans n'importe quelle explication mathématique. C'est cette situation épistémologique particulière des connaissances mathématiques qui explique que les transformations de représentations sémiotiques soient intrinsèques aux démarches mathématiques. Cela peut-il être ignoré ou marginalisé dans l'organisation des apprentissages en mathématiques et dans l'analyse des incompréhensions auxquelles beaucoup d'élèves se heurtent ?

Regarder les problèmes d'apprentissages du point de vue cognitif, et pas seulement du point de vue mathématique, comporte un enjeu sur les objectifs de formation que l'on poursuit dans l'organisation de l'enseignement des mathématiques et de séquences d'activités. L'objectif le plus souvent mis en avant, concerne le développement, chez les élèves, de démarches d'explication, d'argumentation et de preuve, qui sont évidemment essentielles dans toute élaboration d'une connaissance scientifique. La prise en compte du point de vue cognitif met en évidence un autre objectif : comprendre non pas d'abord pour devenir capable de valider mais pour apprendre à comprendre, c'est-à-dire pour être ensuite capable de se poser de nouvelles questions, de trouver des moyens de les explorer et par suite de contrôler la pertinence de ses explorations et de ses interprétations. Ce qui est l'autonomie par excellence.

BIB.LIOGRAPHIE

Delahaye J.-P. (1998). La conjecture de Syracuse. Pour la Science, 247, 100-105.

Duval R. (1995) Sémiosis et pensée humaine. *Peter lang, Bern.*

Duval R. (Ed.) (1999). Conversion et articulation des représentations analogiques. *Séminaire I.U.F.M. Nord Pas-de-Calais, 1, Villeneuve d'Ascq*

DUVAL R. (2003a) *Décrire, visualiser, raisonner : quels « apprentissages premiers » de l'activité mathématique ?* Annales de Didactique et de Sciences cognitives, 8, 13-62.

DUVAL R. (2003b) *Langage(s) et représentation(s) dans l'enseignement des mathématiques : deux pratiques et une troisième*, Actes du 3ème Colloque en Didactiques des mathématiques, Rethymon, Crète, 13-33.

GODIN M. & DUVAL R. (2005) *Les changements de regard nécessaires sur les figures.* Grand N, 76, 7-27.

KOSUTH J. (1965) in Beaux Arts Magazine (1992) 101, p.80

SABATIN A. (2004) *L'âme de géomètre des abeilles*, Les formes de la vie, Dossier pour la Science, 44, 72-77.

Vygotski, L.S. (1985) Pensée et langage. *Editions sociales, Paris.*

Pour compléter cette présentation on peut consulter les deux publications suivantes :

Duval, R. (2006a). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131.

Duval, R. (2006b). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques. *Relime, Numero Especial*, 45-81.