Analyse des phénomènes relatifs a la compréhension en mathématiques et modélisation des processus de son développement dans le cadre des apprentissages

Raymond Duval
ULCO

L'apprentissage des mathématiques soulève des problèmes spécifiques, que l'on ne retrouve pas dans les autres disciplines. Malgré cela, la complexité des phénomènes relatifs à la compréhension en mathématiques reste, maintenant encore, largement sous-estimée.

1. A partir de quel type d'observations et de quelles caractéristiques du savoir mathématique peut-on approcher les phénomènes de compréhension ?

1.1 L'observation des difficultés de compréhension dans l'apprentissage tout au long du curriculum nous met en face de trois types de difficultés très différents.

— des difficultés **transitoires** (à l'échelle de quelques mois ou d'une année scolaire), directement liées à l'introduction d'un nouvel objet de connaissance ou de nouvelles techniques.

— des difficultés **récurrentes** au long du parcours scolaire, liées à la résolution de problème visant seulement l'application de connaissances, déjà enseignées ou venant d'être enseignées, à différentes situations de la « réalité ».

— des difficultés d'emblée **insurmontables,** et mentalement paralysantes, liées à la démarche mathématique elle-même dans ses modes propres de raisonnement et de visualisation. Elles apparaissent dès que la moindre preuve est exigée ou mise en œuvre.

D'où une première question pour la recherche : quel rapport y a t il entre ces trois types de difficultés, et quelles sont celles qui sont les plus importantes pour comprendre les problèmes de compréhension dans l'apprentissage des mathématiques ?

Les premières sont directement liées à des contenus mathématiques et elles renvoient à des programmes dans l'organisation globale d'un curriculum. Les deux autres ne sont pas spécifiques à un contenu mathématique, mais elles sont en quelque sorte **transversales aux contenus mathématiques ,** quel que soit le niveau d'enseignement, et elles sont au cœur de la compréhension en mathématiques.

1.2 La situation épistémologique des mathématiques est atypique par rapport aux autres domaines de savoir. Et elle conduit au paradoxe cognitif des mathématiques.

La situation épistémologique se détermine par le mode d'accès aux objets de connaissance.

1.2.1. Dans tous les domaines, à l'exception des mathématiques, il y les deux modes d'accès fondamentaux suivants avec, bien sûr, priorité inconditionnelle du premier sur le second:

— accessibilité directe (c'est-à-dire *perceptivement, concrètement, avec collecte de spécimens, etc.***)** ou indirecte *(c'est-à-dire avec des instruments permettant d'accroître le champ de perception comme les télescopes, microscopes, spectrographes, l'I.R.M. etc.)*

— accessibilité par des représentations sémiotiques, (*c'est-à-dire utilisant la gamme très étendue des différent systèmes permettant de produire des représentations sémiotiques, pour le calcul, la visualisation, les raisonnements*..).

1.2.1. En mathématiques, il n'y a qu'un mode d'accessibilité, celui par des représentations sémiotiques, (*dont la simplicité ou le degré de complexité dépendent de leur degré d'organisation interne*). Et, en outre, il y a l'exigence épistémologique de ne jamais confondre l'objet et la représentation utilisée ou, plus précisément**, l'objet de connaissance et le contenu de la représentation sémiotique utilisée.** Concrètement l'enjeu est de pouvoir passer de la représentation d'un objet à une autre représentation du même objet (pour les nombres, les fonctions, les propriétés géométriques, etc.), ***cette possibilité de passage étant la condition dynamique de la moindre activité mathématique.***

En l'absence de toute accessibilité directe ou indirecte aux objets de connaissance, l'exigence épistémologique crée un paradoxe cognitif, mis en scène dans la célèbre photo de Kosuth (1963) : comment peut-on ne pas confondre un objet et sa représentation **si on n'a pas accès à cet objet en dehors de l'une ou l'autre des multiples représentations possibles** par lesquelles elles sont présentées ou introduites ? En d'autres termes, comment considérer des contenus différents de représentations différentes représentent un même objet et non pas des objets sans véritablement rapport ?

Le problème du rôle des représentations sémiotiques, dans le fonctionnement cognitif de la pensée change totalement selon que l 'on se trouve dans une situation de double accessibilité, qui est celle de presque tous les domaines de savoir, ou, au contraire, dans une **situation d'accessibilité unique**, comme c'est le cas en mathématiques. La complexité des phénomènes relatifs à la compréhension et aux apprentissages en mathématiques tiennent à cette situation atypique d'accessibilité unique.

2. La question de la modélisation des processus d'apprentissage en mathématiques.

2.1 Le type de modélisation que l'on peut développer pour les apprentissages va dépendre de deux choix.

Le premier choix porte sur le type de difficulté que l'on va considérer comme le plus significatif pour ce qui concerne la compréhension en mathématiques.

— soit on privilégie les difficultés transitoires, c'est-à-dire celles liés à chaque introduction d'un nouvel objet de connaissance, selon l'ordre défini dans l'élaboration d'un curriculum, et on est alors conduit vers des modélisations centrées sur la métaphore du « construire », métaphore évidemment référée à la dérivabilité mathématique des notions listées dans les programmes, avec en prime la connotation pédagogique d' « activité» pour l'élève.

— soit on privilégié les difficultés récurrentes et insurmontables qui, elles, sont liées au fonctionnement spécifique de la démarche mathématique, et qui semblent pérennes quels que soient les changements de programmes — et on est alors conduit vers des recherches plus ouvertes et plus longues, pour lesquelles toutes les modélisations existantes, cognitives ou didactiques, semblent maintenant encore insuffisantes.

Le second choix reste souvent implicite. Il porte sur la situation épistémologique des mathématiques par rapport à celle des autres domaines de connaissances.

— La tradition psycho-épistémologique héritée de Piaget n'admet aucune situation épistémologique particulière pour la formation des notions fondamentales organisatrices de l'expérience physique ou de la connaissance mathématique. On fait donc comme si on était en situation de double accessibilité.

— En reconnaissant, au contraire, que les objets mathématiques ne sont accessibles que par des représentations sémiotiques et que l'activité mathématique consiste dans le transformation des représentations sémiotiques mobilisées, on est alors conduit à se poser la question : **quel modèle du fonctionnement cognitif de la pensée est requis par la compréhension en mathématiques et par l'apprentissage des mathématiques ?**

On peut se demander, rétrospectivement, si le second choix n'est pas le plus déterminant. Historiquement, il a orienté les premiers travaux de didactique des mathématiques à se focaliser sur les difficultés transitoires et à considérer les difficultés récurrentes et insurmontables comme des conséquences ou des symptômes d'une déficience dans l'acquisition des contenus mathématiques particuliers à mobiliser, alors qu'une certain nombre de travaux, reposant sur des dispositifs d'observation et d'expérience qui peuvent aisément être utilisés, montrent que ce n'est pas le cas.

2.2 Le type de modélisation que j'ai commencé à esquisser porte sur les deux caractéristiques fondamentales de l'activité mathématique :

— (1) la possibilité de jouer avec toute la gamme des représentations sémiotiques possibles pour un objet de connaissance,

— (2) la transformation des représentations mobilisées en d'autres représentations qui sont soit du même type (expression linguistique ou formule littérale, ou figure géométrique, ou graphe, ou tableau, etc.) soit d'un autre type.

Ce que j'ai appelé respectivement les « conversions » et les « traitements ». Ce sont là les deux sources d'incompréhension de l'activité mathématique dans l'apprentissage. Elles sont indépendantes l'une de l'autre, et de nature différente.

Ainsi les conversions dépendent de la distance sémiocognitive qui sépare le registre de la représentation de départ et celui de la représentation d'arrivée. Cette distance s'analyse en terme de congruence et de non congruence. La non congruence entraîne un bloquage dans l'activité des élèves. Il faut alors très souvent un apport extérieur de l'enseignant. En outre la conversion n'est pas réversible. Cela veut dire que la conversion inverse peut correspondre à une tâche cognitive totalement différente de celle de la conversion initiale. Ce sont là des phénomènes que l'on peut observer de manière systématique à tous les niveaux, et que l'on retrouve dans presque toutes les observations publiées dans les travaux de didactique, même si l'interprétation qui en est fait ne leur accorde généralement aucune attention.

Pour bien percevoir les sources de difficultés liées au traitements, il est important de distinguer :

— les registres de représentation qui sont communs aux mathématiques et aux autres domaines de savoir comme la langue et les formes iconiques de visualisation (images, schémas, plans, etc.),

— les registres spécifiques aux mathématiques comme les systèmes d'écriture numériques, algébriques, les graphes, etc.

Les premiers sont multifonctionnels et les seconds monofonctionels. Ici les sources spécifiques de difficulté viennent d'abord de l'utilisation faite de ces registres communs en et en mathématiques et en dehors des mathématiques. Il y a rupture, et parfois opposition, entre l'utilisation de la langue faite en mathématiques et celle faite en dehors des mathématiques. De même pour tout ce qui concerne les formes de visualisation. En dehors des mathématiques, les formes de visualisation fonctionnent de manière iconique. En mathématiques, les formes de visualisation sont non iconiques, même lorsqu'elle ressemblent à des formes iconiques comme par exemple avec certaines figures en géométrie. Les difficultés de traitement surgissent de manière spectaculaire chaque fois qu'une demande de justification mathématique ou de preuve est faite. Elles constituent des difficultés insurmontables pour la très grande majorité des élèves.

On pourrait d'ailleurs sur cette question plus précise mais centrale comparer les observations faites et la modélisation proposée par N. Balacheff dans sa thèse (1988)[1]

L'analyse des différents types de conversion et celle des modes inhabituels d'utilisation mathématique des registres communs de représentation permettent de dégager les différents facteurs intervenant dans le fonctionnement cognitif qui est requis par la compréhension en mathématiques. Ces facteurs correspondent en outre à de réelles variables didactiques.

Cette analyse conduit également à décomposer toutes les activités globales et les situations problèmes proposées aux élèves en un ensemble de tâches cognitives sous-jacentes qui sont souvent extrêmement hétérogènes. Ces tâches cognitives peuvent être considérées comme des micro-tâches par rapport à l'activité globale demandée aux élèves pour tenter d'atteindre un objectif d'acquisition de.... Elles sont pourtant décisives pour la conduite autonome de cette activité par chaque élève. Cela conduit à un type d'analyse différent de celui fait selon les concepts mathématiques pour analyser les étapes de la résolution d'un problème proposé. **Ce type d'analyse est aussi nécessaire que l'analyse mathématique** sir l'on veut comprendre les processus de compréhension et d'apprentissages des mathématiques par les élèves. Ce qui paraît simple d'un point de vue mathématique recouvre très souvent une grande complexité sémiocognitive et ne peut être atteint qu'au terme de patients détours qui paraissent inutiles à ceux qui sont passés de l'autre côté du miroir (et qui l'ont peut-être été pour ceux qui sont devenus des mathématiciens).

3. La nécessité de prendre en compte trois points de vue sans homogénéiser leurs exigences et leurs logiques propres.

Toute réflexion sur l'enseignement des mathématiques, exige de prendre en compte au moins trois points de vue, totalement différents, pour organiser l'acquisition de connaissances mathématiques par tous les élèves d'une classe d'age donnée.

3.1 **Le point de vue mathématique,** (évidemment !) c'est-à-dire le point de vue propre aux exigences de la discipline à enseigner ainsi que la logique interne à une organisation curriculaire de contenus de connaissance mathématiques en vue de leur enseignement. Cela implique que l'on prenne en compte deux choses différentes :

— les contenus mathématiques (découpés en termes de « concepts», « savoir-faire »,..) avec, surtout, **leurs contraintes d'un ordre d'acquisition**.

— les **exigences propres quant aux modes de raisonnement**, de visualisation, et les critères mathématiques de compréhension. Cela conduit à interroger la pertinence des modèles ou des notions que l'on va importer en didactique des mathématiques.

3.2 **Le point de vue cognitif** sur les structures qui permettent à un sujet d'acquérir des connaissances. Il répond à la question : quels sont les différents systèmes dont le fonctionnement est nécessaire pour qu'un sujet puisse être en mesure de faire une activité ou une démarche mathématiques ? Car faire des mathématiques implique que l'on soit capable d'esquisser ce que l'on pourrait appeler certains gestes rationnels de pensée, irréductibles à des connaissances et à des compétences. Ces gestes dépendent de systèmes de fonctionnement cognitif qui sont en réalité complexes.

3.3 **Le point de vue pédagogique qui s'efforce de s'adapter au point de vue concret de chaque individu,** c'est-à-dire à ce qu'il ressent lorsqu'il est placé dans un type de situation et à la manière dont il interagit avec les autres. Chaque élève a une personnalité et une histoire propres. Ici apparaissent trois facteurs pédagogiques.

---

[1])[1] *Une étude des processus de preuve en mathématiques chez des élèves de Collège.*

— la « confiance en soi » et en ses propres capacités

— l'intérêt pour les tâches ou les types d'activité proposés (motivation).

— l'interaction avec les autres en fonction de leur statut dans la classe (pair ou expert !)

Il est important de rappeler ici que les points de vue cognitif et pédagogique sont radicalement différents, alors que beaucoup de recherches didactiques tendent à les assimiler. Cette différence avait déjà été soulignée par Piaget lorsqu'il séparait le sujet épistémique, constitué par les structures qui permettent à un individu concret de s'adapter, et l'individu concret qui réagit en fonction de la conscience qu'il prend d'une situation. D'un point de vue cognitif, tout ne se réduit à ce dont le sujet a conscience et à ce qu'il explique. Ainsi Piaget rappelait : « il n'est pas même besoin d'entrer dans la conscience d'un sujet pour juger des connaissances d'un sujet » (*Biologie et connaissance* 1967, p. 79). Naturellement cela pose la question méthodologique du type de données et des procédures d'analyse et d'interprétation permettant d'accéder à « l'architecture cognitive» du sujet épistémique, et plus particulièrement du sujet épistémique capable de faire une activité mathématique de manière autonome.

Le plus souvent on s'en tient à un point de vue que l'on privilégie contre les autres , comme si ***« la formation de l'esprit scientifique»*** des élèves (pour reprendre un titre célèbre de Bachelard (1937)), ne relevait pas d'exigences et de processus très différents qui peuvent être parfois localement et temporairement divergents**.**

En fait la recherche en didactique exige que l'on tienne également ces trois points de vue, ou tout au moins deux d'entre eux ! Pour ce qui concerne l'enseignement des sciences, et plus particulièrement celui des mathématiques, les deux points de vue prioritaires sont les points de vue mathématique et cognitif. La difficulté qui semble encore loin d'être surmontée, pour la recherche comme pour la formation des enseignants, consiste à les prendre tous les deux en compte sans que l'un soit subordonné à l'autre.