Analyse des phénomènes relatifs a la compréhension en mathématiques et modélisation des processus de son développement dans le cadre des apprentissages

L'apprentissage des mathématiques soulève des problèmes spécifiques, que l'on ne retrouve pas dans les autres disciplines. Car la complexité des phénomènes relatifs à la compréhension en mathématiques reste maintenant encore largement sous-estimée.

1. A partir de quel type d'observations et de quelles caractéristiques du savoir mathématique peut-on approcher les phénomènes de compréhension ?

1.1 L'observation des difficultés de compréhension dans l'apprentissage tout au long du curriculum nous met en face de trois types de difficultés très différents.

— des difficultés (plus ou moins**)** **transitoires** directement liées à l'introduction d'un nouvel objet de connaissance.

— des difficultés **récurrentes** au long du parcours scolaire liées à la résolution de problème visant seulement l'application de connaissances (objet de connaissances) déjà enseignées ou venant d'être enseignées

— des difficultés d'emblée **insurmontables,** et mentalement paralysantes, liées à la démarche mathématique elle-même dans ses modes propres de raisonnement et de visualisation qui apparaissent dès que la moindre preuve est exigée ou mise en œuvre.

D'où une première question pour la recherche : sont elles liées et quelles sont celles qui sont les plus importantes à prendre en compte pour comprendre les problèmes de compréhension dans l'apprentissage des mathématiques ?

Les premières sont directement liées à des contenus mathématiques et renvoient à l'organisation de programmes dans le cadre d'un curriculum. Les deux autres sont pas spécifiques à un contenu mathématique mais sont en quelque sorte transversales aux contenus mathématiques et elles touchent la compréhension

1.2 La situation épistémologique des mathématiques est atypique par rapport aux autres domaines de savoir. Et elle conduit au paradoxe cognitif des mathématiques.

La situation épistémologique est déterminée par le mode d'accès aux objets de connaissance.

1.2.1. Dans tous les domaines, à l'exception des mathématiques, il y les deux modes d'accès fondamentaux suivants avec, bien sûr, la priorité du premier sur le second :

— accessibilité directe (c'est-à-dire *perceptivement, concrètement, avec collecte de spécimens, etc***)** ou indirecte *(c'est-à-dire avec des instruments permettant d'accroître le champ de perception comme les télescopes, microscopes, spectrographes, l'I.R.M. etc.)*

— accessibilité par des représentations sémiotiques, (*c'est-à-dire utilisant la gamme très étendue des différent systèmes permettant de produire des représentations sémiotiques*).

1.2.1. En mathématiques, il n'y a que l'accessibilité par des représentations sémiotiques, (*dont la simplicité ou le degré de complexité dépendent de leur degré d'organisation interne*). Et il y a en même temps l'exigence épistémologique de ne jamais confondre l'objet et la représentation utilisée ou, plus précisement**, l'objet de connaissance et le contenu de la représentation sémiotique utilisée.** En d'autres termes, il ne faut pas considérer des contenus différents représentent des objets différents. Concrètement l'enjeu est de pouvoir passer de la représentation d'un objet à une autre représentation du même objet. Sinon on s'enferme dans le paradoxe mis en scène dans la célèbre photo de Kosuth (1963). D'où le paradoxe cognitif des mathématiques : comment peut-on ne pas confondre un objet et sa représentation **si on n'a pas accès à cet objet en dehors de l'un ou l'autre de ses multiples représentations possibles ?**

Le problème du rôle des représentations sémiotiques, dans le fonctionnement cognitif de la pensée change totalement selon que l 'on se trouve dans une situation **de double accessibilité** ou dans une situation **d'accessibilité unique**, comme c'est le cas en mathématiques.

2. La question de la modélisation des processus d'apprentissage en mathématiques.

2.1 Le type de modélisation que l'on peut développer pour les apprentissages va dépendre de deux choix.

Le premier choix dépend du fait que l'on privilégie soit les difficultés transitoires, liés à chaque introduction d'un nouvel objet de connaissance, selon un ordre défini dans la construction d'un curriculum — et cela conduit Cela conduit à privilégier les difficultés transitoires et à la métaphore du « construire ».*,* évidemment référée à la dérivabilité mathématique des notions — soit les difficultés récurrentes et insurmontables qui, elles, sont liées au fonctionnement spécifique de la démarche mathématique

Le second choix reste souvent implicite. Il porte sur la situation épistémologique des mathématiques par rapport à celle des autres domaines de connaissances. La tradition psycho-épistémologique héritée de Piaget n'admet aucune situation épistémologique particulière pour la formation des notions fondamentales. On fait donc comme si on était en situation de double accessibilité. Si, au contraire, on reconnaît que les objets mathématiques ne sont accessibles que par des représentations sémiotiques et que l'activité mathématique consiste dans le transformation des représentations mobilisées, on est alors conduit à se poser la question : **quel modèle du fonctionnement cognitif de la pensée est requis par la compréhension en mathématiques et par l'apprentissage des mathématiques ?**

2.2 Le type de modélisation que j'ai développé porte sur les deux caractéristiques fondamentales de l'activité mathématique : la possibilité de jouer avec toute la gamme des représentations possibles pour un objet et la transformation des représentations mobilisées en d'autres qui sont soit d'un autre type (énoncé linguistique, formule littérale, graphes, figure, etc.) soit du même type. Ce que j'ai appelé respectivement les « conversions » et les « traitements ». Ce sont là les deux sources d'incompréhension de l'activité mathématique dans l'apprentissage. Elles sont indépendantes l'une de l'autre et de nature différente.

Ainsi les conversions dépendent de la distance sémiocognitive qui sépare le registre de la représentation de départ et celui de la représentation d'arrivée. Cette distance s'analyse en terme de congruence et de non congruence. En outre la conversion n'est pas réversible. Cela veut que la conversion inverse peut correspondre à une tâche cognitive totalement différente de celle de la conversion initiale.

Pour bien percevoir les sources de difficultés liées au traitements, il est important de distinguer les registres de représentation communs aux mathématiques et aux autres domaines de savoir comme la langue et les formes iconiques de visualisation (images, schémas, plans, etc.), et les registres spécifiques aux mathématiques comme les systèmes d'écriture numériques, algébriques, les graphes, etc. Les premiers sont multifonctionnels et les seconds monofonctionels. La source de difficulté vient d'abord de l'utilisation des registres communs. Il y a en effet rupture et parfois opposition entre l'utilisation de la langue faite en mathématiques et celle faite en dehors des mathématiques. De même les formes de visualisation utilisées en mathématiques sont non iconiques, même lorsqu'elle ressemblent à des forme iconiques comme on peut le voir avec certaines figures en géométrie. Les difficultés de traitement surgissent de manière spectaculaire chaque qu'une demande de justification mathématique ou de preuve est faite.

On pourrait d'ailleurs sur cette question plus précise mais centrale comparer les observations faites et la modélisation proposée par N. Balacheff dans sa thèse (1988)[1]

L'analyse des différents types de conversion et celle des modes inhabituels d'utilisation mathématique des registres communs de représentation permet de dégager les différents facteurs qui interviennent dans le fonctionnement cognitif requis par la compréhension en mathématiques. Ces facteurs correspondent en outre à de réelles variables didactiques.

Cette analyse conduit également à analyse toutes les activités globales et les situations problèmes proposées aux élèves en un ensemble de tâches cognitives sous-jacentes qui sont souvent extrêmement hétérogènes.

3. La nécessité de prendre en compte trois points de vue sans homogénéiser leurs exigences et leurs logiques propres.

Toute réflexion sur l'enseignement des mathématiques, exige de prendre en compte au moins trois points de vue totalement différents pour organiser l'acquisition de connaissances mathématiques par tous les élèves d'une classe d'age donnée.

3.1 **Le point de vue mathématique,** (évidemment !) c'est-à-dire le point de vue propre aux exigences de la discipline à enseigner ainsi que la logique interne aux contenus de connaissance mathématiques. Cela implique que l'on prenne en compte deux choses différentes :

— les contenus mathématiques (découpés en termes de « concepts», « savoir-faire »,..) avec, surtout, **leurs contraintes propres d'ordre d'acquisition**.

— lees exigences propres quant aux modes de raisonnement, de visualisation, et lees critères mathématiques de « savoir » en mathématiques. Cela conduit à interroger la pertinence des modèles cognitifs ou autres que l'on va importer en didactique des mathématiques.

3.2 **Le point de vue cognitif** sur les structures qui permettent à un sujet d'acquérir des connaissances. Quels sont les différents systèmes dont le fonctionnement est nécessaire pour que le sujet puisse être en mesure de faire une activité ou une démarche mathématiques ? Car faire des mathématiques implique que l'on soit capable d'esquisser ce que l'on pourrait appeler certains gestes rationnels de pensée, irréductibles à des connaissances et à des compétences. Ces gestes dépendent de systèmes de fonctionnement cognitif qui sont en réalité complexes.

3.3 **Le point de vue pédagogique qui s'efforce de s'adapter au point de vue concret de chaque individu,** c'est-à-dire ce qu'il ressent lorsqu'il est placé dans un type de situation et la manière dont il interagit avec les autres. Ici apparaissent trois facteurs pédagogiques.

— la « confiance en soi » et en ses capacités

---

[1])[1] *Une étude des processus de preuve en mathématiques chez des élèves de Collège.*

— l’intérêt pour les tâches ou les types d’activité proposés (motivation).

— l’interaction avec les autres en fonction de leur statut dans la classe (pair ou expert !)

Il est important de rappeler ici que les points de vue cognitifs et pédagogiques sont radicalement différents, alors que beaucoup de recherches didactiques tendent à confondre le point de vue cognitif avec le point de vue pédagogique. Cette différence avait déjà été soulignée par Piaget lorsqu’il séparait le sujet épistémique constitué par les structures qui lui permettent de s’adapter et l’individu concret qui réagit en fonction de la conscience qu’il prend d’une situation. D’un point de vue cognitif tout ne se réduit à ce dont le sujet a conscience et à ce qu’il explique. Ainsi Piaget rappelait : « il n’est pas même besoin d’entrer dans la conscience d’un sujet pour juger des connaissances d’un sujet » (*Biologie et connaissance* 1967, p. 79).

Le plus souvent on s’en tient à un point de vue que l’on oppose à un autre point de vue, **comme si « *la formation de l’esprit scientifique*» des élèves** (pour reprendre un titre célèbre de Bachelard 1937), ne relevait pas d’exigences et de processus très différents qui peuvent être parfois divergents**.**

En fait l’enseignement exige que l’on tienne également ces trois points de vue, ou tout au moins deux ! Et pour ce qui concerne l’enseignement des sciences et plus particulièrement des mathématiques , les deux points de vue discriminants sont les points de vue mathématique et cognitif. Et la question est celle de la manière de les prendre en compte tous les deux sans les subordonner l’un à l’autre.