APPRENTISSAGES GEOMETRIQUES AU DEBUT DU COLLEGE

PRESSIAT André, COMBIER Georges
INRP, Département Didactiques des Disciplines, Mathématiques

Résumé : Cet article a pour objectif de présenter une recherche dont le but est de préciser, pour le début du Collège, les enjeux et les contenus d'un enseignement de la géométrie, puis d'élaborer, expérimenter et valider des situations d'enseignement pour quelques notions. Les situations font intervenir plusieurs milieux (papier - crayon, cour de récréation, Cabri - géomètre), de façon à faire évoluer le rapport des élèves aux objets géométriques en question, en partant d'une problématique pratique (géométrie "perceptive" ou géométrie "instrumentée") pour aller vers une problématique géométrique (géométrie du mathématicien). Le but de l'atelier est de présenter la problématique de la recherche, en l'illustrant par deux situations expérimentées dans les classes (le cercle et les angles, en classe de 6^e^).

1. ORIGINE DU PROJET

1.1. Origine

Le projet a pour origine des constats faciles à faire dans les réalisations de programme de géométrie en classe de Sixième : c'est une partie du programme que de nombreux professeurs ont du mal à faire vivre dans leurs classes, et ceci, pour plusieurs raisons que nous évoquerons rapidement :
- la plupart des points du programme de Sixième ont déjà été abordés à l'école élémentaire, ce qui donne aux élèves une impression de "déjà vu" peu propice à une bonne motivation. La dialectique "ancien / nouveau", nécessaire au fonctionnement du contrat, n'y trouve guère son compte.
- les professeurs eux-mêmes ont du mal, surtout en Sixième, et dans une moindre mesure en Cinquième, à définir clairement un projet d'enseignement qui soit conforme aux instructions et qui satisfasse leurs exigences épistémologiques. Pour aller vite, on pourrait dire qu'ils ont du mal à installer le territoire du géomètre par rapport à celui du dessinateur, ou même par rapport à celui du vulgarisateur en matière de formes et de symétries culturellement familières. Souvent, ils n'arrivent guère à faire dépasser à leurs élèves le niveau d'une description naïve, qu'ils se voient obligés de compléter en apportant le vocabulaire officiel sur le sujet. Plus sérieusement, la problématisation des objets d'enseignement (figures usuelles, symétries axiale et centrale) n'est guère prise en charge dans le processus d'enseignement , ces objets sont souvent considérés comme étant "déjà-là", alors que leur construction en tant qu'objets de la géométrie est le résultat d'un processus visant à modéliser l'espace sensible et ses objets, pour produire à leur sujet des connaissances. La construction de figures à l'aide des instruments de dessin, l'utilisation de procédés "expérimentaux" de transformations de figures (pliage, ...) sont à l'origine de nombreux quiproquos sur le but poursuivi, malentendus dont la négociation est souvent ressentie comme devant être conduite "à la baisse" par de nombreux professeurs, qui ont ainsi l'impression de ne pas apprendre grand chose à leurs élèves. Quant à la "mise en place de courtes séquences déductives", elle s'avère aussi délicate en Sixième que peut l'être l'apprentissage de la démonstration en Quatrième : une majorité de professeurs juge ce premier contact prématuré en Sixième.

Actes du colloque inter-IREM 1er cycle : Quelles géométries au collège ? Geste physique, geste virtuel, geste mental, 21-22-23 juin 2001 ; IREM de Montpellier

1.2. Objectifs

Le but de cette recherche est de redonner du sens à l'enseignement de la géométrie, en problématisant l'introduction des objets d'enseignement figurant aux programmes de Sixième et Cinquième, concernant la géométrie plane et la géométrie dans l'espace.

Nous faisons l'hypothèse que les élèves rentrant au Collège n'ont, dans le domaine de la géométrie, que des connaissances très contextualisées, et notamment liées à l'appréhension perceptive et à une non différenciation entre dessin et figure.

En conséquence, les objectifs privilégiés par cette recherche sont les suivants :
1) Préciser pour le début du Collège les enjeux, les contenus et les objectifs d'un enseignement de la géométrie.
2) Élaborer, expérimenter, valider des situations d'enseignement pour quelques notions de géométrie du début du Collège.
3) Étudier plus précisément les conditions et les effets de l'utilisation de logiciels (Logiciels de dessin, Cabri-Géomètre, Géoplan, ...).

2. CADRE THEORIQUE ET HYPOTHESES

2.1. Bref état de la recherche dans le champ concerné

2.1.1. Les trois types d'espaces selon Brousseau

Guy BROUSSEAU distingue les trois types d'espaces suivants :
– le micro - espace, lié à la manipulation des petits objets ;
– le méso - espace, espace contrôlé par la vue, de 0,5 à 50 fois la taille du sujet, dans lequel le sujet se déplace ;
– le macro – espace dont on ne peut avoir que des visions locales, et dont la visualisation globale ne peut être que le fait d'une construction intellectuelle.

Son travail a mis en évidence que la notion d'angle est très pertinente dans le macro - espace alors que celle de distance est très efficace dans le micro - espace (au point d'y rendre presque inutiles les angles). Les implications didactiques de ce type d'analyse sont essentielles pour analyser et modifier les contraintes de la géométrie scolaire, où le micro - espace de la feuille de papier est le terrain d'expérience privilégié.

2.1.2. Les trois problématiques de Berthelot et Salin

Le classement par BERTHELOT et SALIN des problématiques didactiques de l'enseignement de la géométrie (problématique pratique, problématique de la modélisation, problématique géométrique) permet de baliser le territoire jusqu'ici un peu flou de la problématisation de l'enseignement de la géométrie, en faisant de la problématique de modélisation un intermédiaire réduisant l'écart entre les deux autres ; leur travail fournit en outre des types de problèmes appartenant à cette problématique, adaptés à l'école élémentaire.

Berthelot et Salin définissent leurs trois problématiques comme des types de connaissances correspondant à des rapports différents avec l'espace auquel le professeur peut faire appel dans l'enseignement de la géométrie[1].

« La problématique pratique

Il s'agit des rapports qui se réfèrent au sens pratique, *non enseignés*. Ils sont caractéristiques d'une famille de problèmes spatiaux non didactiques, et particulièrement importants dans la vie de tous les jours. Leur finalisation exclusivement « pratique », l'économie de conceptualisation qui commande le choix des décisions sont des caractéristiques essentielles.

La *vérification* du résultat obtenu à la suite des actions ou des déclarations mises en jeu dans les solutions de cette catégorie de problèmes se fait sous le mode de l'*évidence*.

La problématique de modélisation

[Il s'agit] des rapports qui se référent à la résolution de situations de modélisation de l'espace, de mise au point ou d'exploitation de modèles. Parmi ces modèles, certains sont explicitement géométrisés, et d'autres comme les représentations matérielles de l'espace social, technique et / ou physique (plans, cartes, vues, perspectives, schémas, etc.), échappent à une modélisation géométrique, en particulier euclidienne.

Ce type de rapport est finalisé en partie par l'efficacité dans l'espace sensible ou objectif, mais aussi par la recherche d'une solution reproductible, dépassant le problème immédiat. Cette solution doit être communicable à d'autres, en s'appuyant sur un modèle explicatif dont la fonction doit pouvoir être éprouvée. Ces contraintes, communes aux métiers techniques et scientifiques, sont semblables à celles mises en œuvre dans des situations d'initiation de jeunes élèves à la géométrie comme modèle de l'espace.

Les validations correspondant aux actions et déclarations de cette catégorie de problèmes sont de double nature :

• internes au modèle, selon des règles de traitement de l'information qui lui sont spécifiques.

• externes, par référence à des procédures scientifiques agissant sur le milieu spatial objectif et associées au sens même du résultat visé.

La problématique de la géométrie

Nous désignons ainsi les rapports à un espace conceptualisé qui comportent l'exigence de cohérence entre les déclarations sur cet espace, caractérisant l'approche théorique de la géométrie (ici, euclidienne). Les problèmes de ce type font spécifiquement appel aux connaissances permettant de maîtriser ces questions de cohérence théorique du discours sur l'espace, questions qui caractérisent l'émergence historique d'une géométrie de la démonstration chez les grecs.

La validation des productions associées aux situations didactiques correspondantes peut être réalisée de deux manières :

• le plus souvent par la démonstration qui contrôle la cohérence logique entre les déclarations produites, conformément à la fonction de théorie mathématique qu'est la géométrie.

[1]Leur description ci-dessous est tirée de leur article « Savoirs - connaissances dans l'enseignement de la géométrie », dans l'ouvrage « Différents types de savoirs et leur articulation », Travaux et thèses de didactique, La Pensée sauvage éditions (1995).

• quelquefois, par la production de contre-exemples spatiaux, par référence à la fonction de modèle d'un espace objectif et local que la géométrie constitue également.

Chacune de ces trois problématiques se caractérise de fait par des rapports avec des milieux (considérés comme systèmes antagonistes du sujet) de nature différente, régulés par des modes différents, milieu de la vie courante, milieu scientifique et milieu mathématique.

Repérer dans quelle(s) problématique(s) se situent élèves et enseignants au cours d'une situation d'enseignement de la géométrie permet de prévoir ou d'expliquer un certain nombre de phénomènes [...]. »

2.1.3 Les travaux de l'IREM de Marseille

Les trois articles de "Petit *x*" (voir bibliographie) consacrés à l'enseignement de la géométrie au Collège par l'équipe de Marseille (Yves CHEVALLARD, Michel JULLIEN, Alain MERCIER, Jacques TONNELLE) proposent une analyse des dysfonctionnements des programmes actuels de Collège et souhaitent agrandir la marge de manœuvre des professeurs pour réaliser un enseignement sur cette même base. Ces articles très riches, questionnant les savoirs et leur histoire, ouvrent une perspective en dessinant des voies possibles pour problématiser les savoirs dans une perspective de modélisation. Ils attirent l'attention sur la mise au point, en géométrie, d'un système de signes qui permettent de travailler les modèles.

Les auteurs insistent sur la nécessité de distinguer jusque dans les textes d'enseignement *trois aspects des constructions géométriques* : le procédé de tracé (qui donne une solution pratique mais ne fournit pas les outils de modélisation adéquats), l'algorithme de construction, la preuve de constructibilité. Il est alors possible d'analyser la solution d'un problème de construction géométrique selon quatre exigences :
- elle doit fournir une preuve de l'existence de l'objet à construire,
- elle doit fournir une preuve de sa constructibilité,
- elle doit fournir un algorithme de construction,
- éventuellement, elle peut fournir la construction géométrographique (c'est-à-dire celle qui, parmi toutes les constructions possibles est la plus simple et la plus exacte, selon des critères bien définis.).

Ils distinguent par ailleurs *trois aspects du travail graphique* :
- *le schéma d'une idée* (qui permet de la représenter, de la mettre spatialement en scène, mais pas de la travailler. Le schéma permet de décrire l'opération matérielle par laquelle on résout le problème. Il reste souvent sous la forme d'un simple tracé à main levée).
- *la figure de géométrie* : elle est partie prenante d'un système de signes. La connaissance géométrique des objets de l'espace prend appui sur l'étude d'une figure – d'un ensemble de points de l'espace – qu'on pourrait appeler une « sur - sous - figure » par rapport à la figure de points qu'occupent l'objet matériel. C'est cette figure qui est généralement étudiée, pour en faire dériver une connaissance relative à l'objet matériel. Elle n'est pas donnée avec l'objet matériel : elle doit être construite par le géomètre.
- *l'épure d'une expérience graphique* (qui est l'aboutissement de la réalisation effective de l'expérience graphique : elle doit être réalisée avec beaucoup de soin, sous peine de produire une expérience ratée).

En particulier, la figure géométrique telle qu'elle est utilisée dans l'enseignement traditionnel fonctionne tantôt comme schéma, tantôt comme épure.

2.1.4 Les recherches concernant l'interaction entre le visuel et le géométrique dans l'environnement Cabri-Géomètre.

Les primitives de ce logiciel permettent dans les actions de tracé à l'écran et dans l'analyse de dessins tracés à l'écran, deux catégories de traitement et de contrôle pour l'utilisateur (les traitements et contrôles perceptifs, et les traitements et contrôles par les connaissances géométriques). On peut faire l'hypothèse que l'interdépendance de ces deux types de contrôles est plus forte dans l'environnement Cabri - Géomètre que dans l'environnement papier - crayon (dans ce dernier, la distinction entre visuel et géométrique est écrasée). Voici, en effet, quelques processus possibles chez les élèves dans l'usage du logiciel :
- recherche par essai - erreur de primitives géométriques qui fournissent visuellement le tracé escompté ;
- inférences de type géométrique à partir de l'appréhension perceptive ;
- phénomène visuel permettant de conclure à une interrogation de type géométrique.

La plus grande interaction entre visuel et géométrique permet de penser a priori que, dans les tâches de construction de Cabri - dessins, le déplacement (dragging) fournit un élément important de déstabilisation de pratiques empiriques fondées sur la perception, et que Cabri - Géomètre favorise alors le recours à des connaissances théoriques. En fait, comme le pointe Colette Laborde [Laborde 1994], l'expérimentation a montré que si l'abandon du recours à des stratégies au jugé purement visuelles se produit bien, il ne débouche pas nécessairement, en revanche, vers une pratique totalement géométrique. Par exemple, alors que le déplacement, utilisé en liaison avec une connaissance visuelle d'une forme particulière, permet d'invalider des propriétés conjecturées sur un cabri - dessin (un rectangle doit rester un rectangle au cours d'un déplacement), il est moins utilisé à des niveaux plus géométriques comme dans l'étude géométrique de trajectoires ou la recherche de propriétés géométriques invariantes. De même, l'usage de primitives géométriques pour valider ou invalider une propriété géométrique lue perceptivement n'est guère développé. Ainsi, la coexistence du visuel et du géométrique pourrait s'exercer à des niveaux plus avancés.

2.2. Cadre théorique et hypothèses

Cette recherche se place dans le cadre des problématiques élaborées par Berthelot & Salin, en faisant jouer aux changements de milieux (et particulièrement grâce à l'emploi de logiciels d'enseignement de la géométrie tels que « Cabri–Géomètre ») le rôle de catalyseur dans le passage d'une problématique à l'autre. Dans la conclusion de leur article déjà cité, ils précisent : « L'exploitation et le développement de l'analyse en terme de “milieux” des situations courantes d'enseignement est une des directions qui nous semblent les plus prometteuses. Enfin, notre travail nous conduit à approfondir l'étude de l'initiation à l'apprentissage de la géométrie, en nous appuyant sur le développement de certains processus de modélisation de l'espace par la géométrie, et sur l'articulation entre la problématique de modélisation et la problématique de la géométrie déductive. ».

Par rapport aux travaux de Berthelot et Salin, notre problématique se situe différemment selon que l'on considère l'enseignement de la géométrie plane ou celui de la géométrie dans l'espace. Pour ce qui concerne la géométrie plane (seule partie que nous considérerons dans cet article), nous avons considéré des problèmes géométriques dont on puisse organiser l'étude et la résolution dans une succession de milieux différents. L'ordre dans cette succession est choisi de manière à amener l'élève à passer de la problématique pratique à la problématique géométrique, et à prendre conscience des différences de modes de validation légitimes dans le cadre de chacune d'elles. Plus précisément, c'est en demandant aux élèves de trouver une justification des techniques qui soit indépendante du milieu matériel que nous comptons faire émerger le besoin de géométrie théorique. En d'autres termes, c'est en cherchant à mieux comprendre pourquoi des techniques (différentes selon les milieux) donnent bien le résultat qu'elles sont censées produire que l'on est amené à identifier ou créer l'objet géométrique (ou les propriétés de cet objet) sur lesquels toutes ces techniques, pourtant différentes dans leur mises en œuvre pratiques, sont fondées.

3. LA PROGRESSION SUIVIE

L'objet de la recherche est de produire des référents documentés répondant aux objectifs précisés au paragraphe 1.2., qui pourront ensuite constituer des produits pour la formation initiale et continue des professeurs. Il convient de préciser que nous ne nous sommes pas limités au cadre défini par les programmes actuels de 6^{e} et de 5^{e} et par leurs commentaires même si dans l'ensemble nous traitons des mêmes objets géométriques fondamentaux. La liste ci-dessous fait apparaître les thèmes qui ont été travaillés au cours d'une progression expérimentée dans des classes de 6^{e}.

Les parties du programme actuel de 6^{e} qui ne sont pas prises en compte dans le cadre de notre recherche, et qui ont trait pour l'essentiel à la mesure, apparaissent en italique.

Les trois premiers points ont pour objectifs de prendre de l'information, d'installer un contrat disciplinaire et assurer la prise en main du logiciel sur lequel les élèves auront à travailler par la suite.

- Reproduction de figures
- Initiation à Cabri II
- Rédaction d'un message en vue de la reproduction d'une figure
- **Cercle**
- **Angle de visée**
- **Angle de secteur**
- **Angle droit, droites perpendiculaires, droites parallèles**
- *Angle (mesure)*
- *Aire et périmètre (sans la mesure)*
- **Symétrie axiale** (jusqu'à la définition du symétrique d'un point)
- *Aire et périmètre (mesure)*
- **Symétrie axiale** (médiatrice, bissectrice, axe de symétrie, triangles et quadrilatères particuliers)
- **Patron d'un solide**
- **Parallélépipède rectangle et perspective cavalière**
- *Volumes*

Les thèmes indiqués en gras sont ceux pour lesquels le travail de passage à la géométrie théorique a été assuré. Le lecteur aura noté qu'une des originalités de cette progression réside dans le fait qu'une définition de l'angle droit en géométrie théorique est donnée.

Précisons que le niveau de géométrie théorique atteint en fin d'année permet de démontrer que les médianes d'un rectangle sont des axes de symétrie de ce rectangle, énoncé qui, dans les réalisations actuelles de l'enseignement, est souvent abordé en se limitant à la géométrie perceptive et instrumentée.

Dans la suite, nous détaillons la situation relative au cercle, et celle concernant les angles de visée.

4. LA SITUATION RELATIVE AU CERCLE

Son **but** est d'installer le cercle comme lieu des points situés à une distance donnée d'un point fixé.

Elle est organisée selon trois phases (appelées ci-dessous “activités”), que nous décrivons rapidement, avant de détailler ensuite chacune d'elles.

ACTIVITE 1 : Le triangle équilatéral

Les **variables** en sont le milieu et le matériel disponible :
- la feuille de papier avec les instruments de dessin,
- la cour du collège avec ficelle, craie, pointe, marteau…
- le logiciel Cabri - Géomètre avec une barre d'outils appropriée (fournie en annexe).

La tâche donnée aux élèves est la même dans les trois milieux : Un segment AB est donné. Construire le troisième sommet d'un triangle équilatéral ayant AB pour côté.

Idée directrice :

Mettre en échec les procédures par essais et ajustements et amener les élèves à tracer un cercle (et pas seulement un arc) pour positionner un point à une distance donnée d'un autre point.

Dans chacun des milieux, une situation d'action est organisée. Les changements de milieux successifs ont pour but, dans un premier temps, d'invalider les procédures par essais et ajustements, puis, par l'intermédiaire du milieu “Cabri - Géomètre”, d'imposer le recours au cercle.

Vient ensuite une situation de formulation ayant pour but de décrire la technique utilisée indépendamment du milieu.

ACTIVITE 2 : Le cercle

But : Installer la propriété caractéristique d'un point du cercle.

Tâche donnée aux élèves : Deux points sont donnés. Il s’agit d’imaginer un procédé permettant d’obtenir facilement un grand nombre de points (35) situés à la même distance de l'un des deux points donnés que l’autre point (situation d'action) et de justifier la validité de ce procédé (situation de validation).

L'anticipation de la construction d'une part, la justification du procédé d'autre part, font appel à la propriété caractéristique visée.

ACTIVITE 3 : Retour sur le triangle équilatéral

But : Justifier mathématiquement la constructibilité du triangle équilatéral quand on connaît deux de ses sommets.

Les paragraphes suivants donnent les détails les plus significatifs concernant la mise en œuvre de chacune de ces activités, ainsi que l'évaluation proposée ensuite aux élèves.

4.1. Activité 1 : Triangle équilatéral

La même tâche est donnée aux élèves dans les trois milieux successifs suivants :
Papier - crayon ; cour de l’établissement ; logiciel Cabri - Géomètre.

La **tâche** est la suivante. Un segment AB est donné ; il s’agit de construire un triangle équilatéral (triangle ayant ses trois côtés de même longueur) ayant pour côté le segment AB.

<u>1ère étape</u> **: Environnement Papier - crayon, avec tous les instruments de géométrie**

Elle permet de s'assurer que tous les élèves disposent d'un procédé de tracé, même empirique, d'un triangle équilatéral, de faire l'inventaire des procédures disponibles et de les porter à la connaissance de tous, sans en privilégier aucune.

La validation est matérielle (emploi de mesures ou de gabarits).

<u>2ème étape</u> **: Cour du collège, avec ficelle et craie** (AB $\approx$ 5m)

Elle a pour but de mettre en faiblesse la technique par approches successives de la position du troisième sommet, et de favoriser le recours au tracé d'arcs de cercle.

La validation est matérielle (comparaison des longueurs des trois côtés avec la ficelle).

<u>3ème étape</u> **: CABRI-Géomètre (barre d'outils réduite et résistance de la construction au déplacement du segment initial)**

Les contraintes imposées par le logiciel et celles contenues dans la consigne (la construction doit "résister" à un déplacement des deux points de base A et B) imposent de recourir au cercle (pour positionner un point à une distance donnée d'un autre point).

La validation est matérielle (outil « Distance & longueur » et déplacement des points A et B avec la souris).

<u>4ème étape</u> **: Rédaction d'un programme de construction indépendant des trois milieux**

Cette étape est une phase de décontextualisation visant à faire émerger le cercle comme étant l'objet mathématique sollicité par les différentes techniques qui ont permis de réussir la tâche demandée dans les différents milieux.

La validation repose sur la possibilité de réaliser la construction dans chacun des milieux.
Cette situation intitulée "Triangle équilatéral" est un prétexte pour travailler sur le cercle : **en prenant appui sur une technique de construction enseignée à l'école primaire, on fait émerger l'objet mathématique "cercle", sollicité par cette technique.**

4.2. Activité 2 : Le cercle

Cette activité a pour but d'installer la propriété caractéristique d'un point du cercle, dont l'énonciation est prévue sous la forme de deux énoncés séparés :
Énoncé 1 : Un point qui est à la même distance de D que le point E est sur le cercle de centre D passant par E.
Énoncé 2 : Un point qui est sur le cercle de centre D passant par E est à la même distance de D que le point E.

La tâche donnée aux élèves :

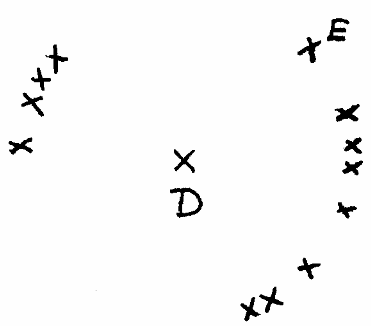
Deux points D et E sont donnés. Il s'agit :
- d'imaginer un procédé permettant d'obtenir facilement un grand nombre de points situés à la même distance de D que le point E

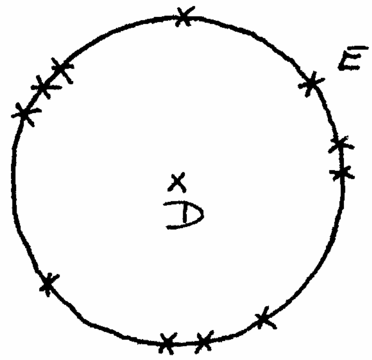
> *Les instruments de dessin ne sont pas autorisés, mais il est possible de faire un schéma* (écriture du procédé)

- de justifier la validité de ce procédé.

> *« Pourquoi, sans avoir besoin d'utiliser des instruments, pouvez-vous affirmer que votre méthode est bonne ? »* (production d'une explication écrite).

Procédés attendus de la part des élèves :





Procédé 1
Placement de points à l'aide :
- d'une règle graduée
- ou d'un gabarit.

Procédé 2
Tracé d'un cercle et placement de points sur ce cercle.

Les justifications attendues de la part des élèves sont les suivantes :
- dans le cas de l’emploi d’une règle graduée : « J’ai mesuré »
- dans le cas de l’emploi du calque ou d’un gabarit : « J’ai reporté la même longueur »
- dans le cas de l’emploi du compas, deux types de justification sont possibles :

« Le compas permet de placer des points tous à la même distance de D ».
Le savoir est attaché à l’instrument.
« Tous les points sur le cercle sont à la même distance du point D ».
Le savoir est déjà décontextualisé.

Le rôle du professeur est ensuite fondamental pour diriger le questionnement de façon à faire produire par les élèves les énoncés 1 et 2 attendus. Il convient de commencer par questionner d'abord le procédé 1 :
« Que peut-on dire de tous les points qui sont à la même distance de D ? »

Lors de l'expérimentation, la phrase remarquable suivante a été produite : « Ils sont sur un cercle imaginaire ». Le qualificatif “imaginaire” (ou encore “invisible” employé par d'autres élèves) témoigne d'une prise de distance par rapport à la seule appréhension perceptive du cercle. Le cercle est évoqué, malgré l'absence d'une figure visible. Une telle réponse conduit à installer **l’énoncé 1** :
« Un point qui est à la même distance de D que le point E est sur le cercle de centre D passant par E ».
On évoque dans un deuxième temps le procédé 2, ce qui permet d’installer l’**énoncé 2** :
« Un point qui est sur le cercle de centre D passant par E est à la même distance de D que le point E ».

4.3. Activité 3 : Retour sur le triangle équilatéral

Cette activité pur but de justifier mathématiquement la constructibilité du triangle équilatéral quand on connaît un côté. (*Il va de soi qu’on ne prend pas en charge, à ce niveau de scolarité, la justification de l’existence des points d’intersection des deux cercles).*

Les deux énoncés relatifs au cercle obtenus dans l'activité précédente sont présents au tableau *(sous la forme où ils ont été écrits dans le cahier des élèves).*
Avant d'aborder la justification proprement dite, le professeur rappelle la tâche, ainsi que la technique de construction permettant de la réaliser.

Rappel de la tâche : Un segment AB est donné, construire un triangle équilatéral ayant pour côté le segment AB.

Rappel de la construction, qui peut être exécutée dans les trois milieux :

Tracé du cercle de centre A passant par B
Tracé du cercle de centre B passant par A
Choix d'un des 2 points d'intersection

La construction est réalisée au tableau.

Ensuite, **dans un premier temps**, il pose aux élèves la question suivante, à laquelle ils sont invités à répondre en travaillant par groupes :
« Lequel ou lesquels des deux énoncés qui viennent d'être écrits, permet de justifier qu'on obtient bien un triangle équilatéral ? »

Comme les expérimentations l'ont confirmé, les élèves abordent alors la justification de la partie "synthèse" du problème de construction : ils supposent que les cercles sont déjà tracés, et cherchent à justifier que l'un de leurs points d'intersection convient. Pour cela, l'énoncé 2 est sollicité.

Dans un second temps, le professeur relance le questionnement, de manière à ce que justification de la partie "analyse" du problème de construction soit abordée par les élèves :
« Quelles sont les informations contenues dans l'énoncé qui nous ont conduits à tracer le premier cercle, puis le deuxième cercle ? »

On notera que cette étape du raisonnement est rarement mise en évidence dans l'enseignement (au début du collège, mais même plus tard) alors qu'elle est celle qui est la plus éloignée de la géométrie perceptive. Son traitement repose sur l'énoncé 1, à propos duquel certains élèves ont évoqué un cercle "imaginaire", ou "invisible".

Il s'agit de la première justification théorique d'une technique de construction (déjà rencontrée à l'école primaire). Le professeur en profite pour faire remarquer qu'il existe deux types de justifications :

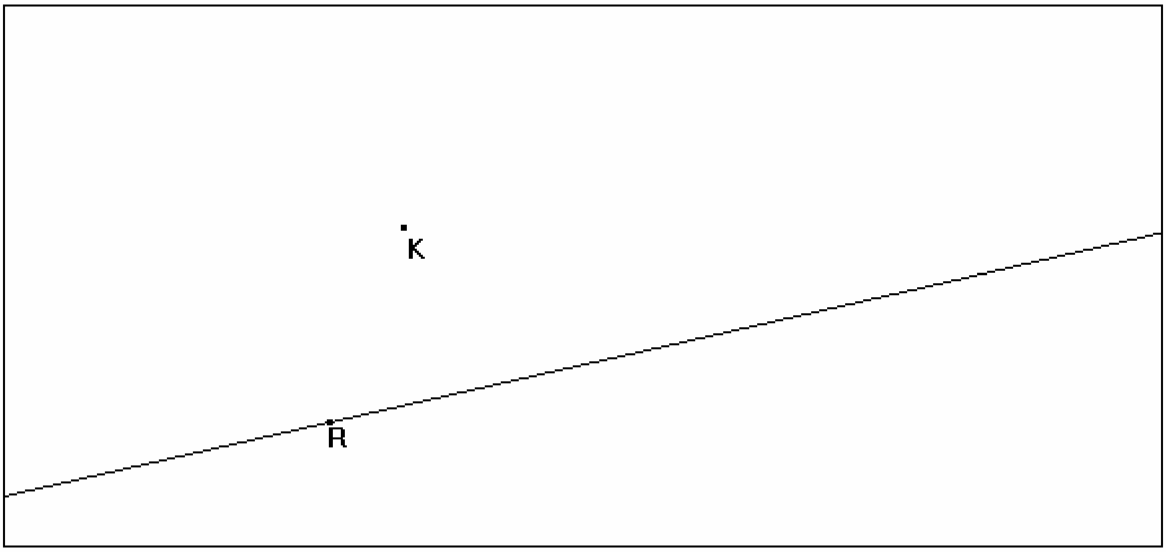
- celles dans lesquelles on emploie des instruments, dans le but de vérifier que la figure construite a bien les propriétés voulues. Elles sont habituelles dans la géométrie pratiquée à l'école primaire : elles sont tributaires de la précision des tracés, et du caractère approximatif des mesures ou des contrôles ;
- celles dans lesquelles seul le recours à des énoncés mathématiques dont on est sûr est autorisé. Même sans réaliser concrètement la construction, ce nouveau type de justification permet d'être sûr que si on la met en œuvre, elle donnera une figure répondant aux contraintes imposées.

Le professeur fait remarquer que ce deuxième type de justification est l'un des éléments nouveaux de la géométrie enseignée au Collège, tout au long duquel il sera travaillé.

4.4. Evaluation

Elle vise à tester la disponibilité du cercle en tant qu'objet géométrique pour résoudre un problème de construction et valider le procédé. Elle vient 15 jours à 3 semaines plus tard.
Entre temps, des exercices d'entraînement ont été proposés.

Enoncé : La figure ci-dessous est donnée aux élèves.



Consigne : « Construis le triangle KRV de façon que :

- V est un point de la droite,
- les côtés KR et KV ont même longueur.

Ta construction doit être faisable aussi bien sur la feuille de papier, que dans la cour ou avec Cabri - Géomètre.
Explique pourquoi tu es certain que les côtés KR et KV ont même longueur ».

Quelques résultats :
Voici les résultats obtenus par 309 élèves de 6^{e} durant l'année scolaire 2000/2001.

• Pour ce qui concerne la **construction** proprement dite :

Procédure conduisant à un résultat exact	Nombre d'élèves l'ayant utilisée (sur 309)
Placement de V sans tracer de cercle	73
Tracé du cercle de centre R passant par K (KR = KV)	21
Tracé d'un cercle ou d'un arc de cercle de centre K passant par R	167

61% des élèves pensent à tracer un cercle, seuls 54% tracent le bon.

• Pour ce qui concerne la **justification** de la construction :

Description des justifications produites	Nombre d'élèves correspondant (sur 309)
Justification faisant référence à l'emploi de la règle graduée	41
Justification faisant référence à l'emploi du compas	23
Supposant le cercle de centre K passant par R déjà présent, justification du fait que le point d'intersection du cercle et de la droite convient	71
Justification du tracé du cercle de centre K passant par R	13

Sur les 188 élèves qui ont pensé à tracer un cercle, 57% donnent une justification.

Parmi ces derniers, 21% font allusion à l'instrument permettant de le tracer. Les autres convoquent l'objet “cercle” : deux tiers d'entre eux le font pour aborder la justification de la partie “synthèse”, et seulement 12% d'entre eux pour celle relative à la partie “analyse”.

5. LA SITUATION RELATIVE AUX ANGLES DE DEMI-DROITES

L’angle trouve sa justification dans le macro - espace, là où la mesure des longueurs est rendue plus difficile, et parfois même impossible.

Dans l’espace sensible, on fait souvent allusion implicitement aux angles solides, et aux angles dièdres. Pour ces derniers, par le choix convenable d’un plan de section, on se ramène souvent à un problème plan et, par conséquent, à un angle de demi-droites.

Rares sont les situations où cette tâche de sélection d’un plan de coupe est à la portée d’élèves de 6ème : c’est la raison pour laquelle, lorsqu’un professeur leur donne un problème dans l’espace sensible, c’est lui qui prend en charge ce travail de modélisation. Et l’élève se voit alors confronté à un problème dans le micro - espace de la feuille de papier. Dans cet espace privilégié par l’enseignement, il est possible d’enfermer un angle dans un triangle ; la reproduction de ce dernier, à l’aide de longueurs (grâce aux reports ou aux mesures) permet de contourner la rencontre avec l’angle.

Il s’agit donc de trouver une situation permettant de “faire sortir” un angle des nombreux triangles dans lesquels on peut l’enfermer. Nous avons fait le choix de travailler dans un espace sensible où l’utilisation de l’angle s’avère pertinente, tout en laissant à l’élève une part de modélisation de la situation. Pour cela, il nous a fallu **trouver une situation ni trop simple, ni trop complexe, qui mette en défaut l’utilisation de longueurs.**

Nous avons choisi le thème des angles de visée, dans un contexte utilisant une lunette de visée rudimentaire, que nous appelons “boîte de visée”, situé dans le méso-espace (espace allant de 0,5 à 50 fois la taille du sujet). Une première situation, se déroulant dans l’espace de la cour de récréation, a été expérimentée dans une classe à la fin de l’année scolaire 1998/1999 : la dévolution du problème s’est avérée difficile. Nous avons décidé de la modifier en la situant dans l’espace formé par la réunion de deux tables de classe. Plus modestement, on vise la sortie de la feuille de papier, un changement de taille, sans pour autant affronter les difficultés de modélisation d’une situation se déroulant dans le macro – espace. (La cour et les tables de classe relèvent toutes les deux du méso-espace).

Les objectifs de cette première situation sont les suivants :

– Mettre en défaut la mesure de longueur pour résoudre un problème de l’espace sensible ;
– Faire apparaître l’angle comme déterminé par deux demi-droites ;
– Faire percevoir que les côtés de l’angle ne sont pas des segments.

5.1. Présentation globale de la situation “Angles de visée”

Description matérielle :

La séance se déroule entièrement dans la salle de classe, et le matériel suivant est à prévoir :

– une boîte de visée par groupe de quatre élèves (voir annexe 2) ;
– des tables sur lesquelles on peut écrire ;
– des feutres (à condition que les tracés soient facilement effaçables) ;
– des tasseaux en bois d’une longueur comprise entre 1,50 m et 2 m ;
– quelques allumettes en bois et du matériel (scotch, ou pâte à fixer) pour les coller sur le bord

des tables ;
– des feuilles de papier blanc (format 21 × 29,7) de faible grammage ;
– du papier calque.

Précisons que les rapporteurs et les règles graduées ne sont pas autorisés, afin d'éviter tout recours aux mesures de grandeurs.

Déroulement :
La situation se déroule sur deux séances.

La première a pour but de présenter le problème aux élèves, de le leur faire chercher en travail par groupes, et enfin de procéder à une présentation collective des solutions trouvées, ainsi qu'à leur validation.

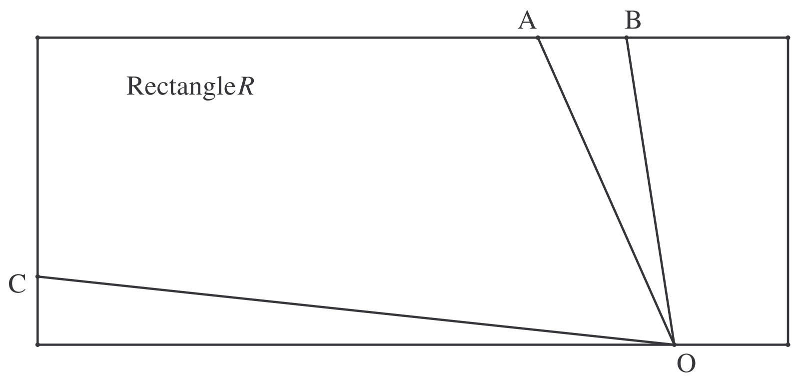
La deuxième est consacrée au rappel des solutions correctes et à l'institutionnalisation de la notion d'angle de demi-droites.

Les paragraphes suivants donnent une description de chacune de ces séances.

5.2. Première séance de la situation “Angles de visée”

1er temps : présentation collective du problème

Un point *O* est matérialisé sur le bord d'une longueur d'un rectangle *R*. Un point *A* est repéré sur l'autre longueur, à l'aide d'une allumette placée verticalement. En posant en *O* le viseur de la “boîte de visée”, le professeur vise et fait coïncider l'arête gauche de la face évidée de la boîte avec l'allumette placée en *A*. Une seconde allumette est placée en *B*, point qui coïncide alors avec l'arête droite de la face évidée.



Problème :
« Si, en posant en O le viseur de la boîte, et qu'en visant, l'arête gauche coïncide avec l'allumette placée en C, peut-on prévoir, sans utiliser la boîte de visée, en quel point D de la largeur serait située l'allumette coïncidant avec l'arête droite ? ».

Le professeur attend que soit proposé le report à partir de *C* d'une longueur égale à *AB*. C'est la seule proposition qui, à ce moment de l'activité, sera prise en considération.

Cette proposition est expérimentée, et invalidée à l'aide de la boîte de visée : cette dernière permet de placer le point *D* qui convient, et le professeur fait constater qu'il est différent du point obtenu par les élèves en reportant la longueur *AB* à partir de *C*.

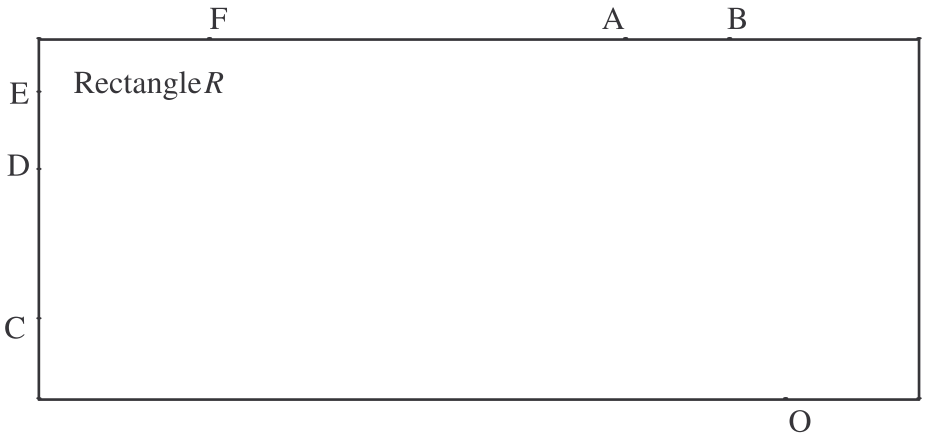
Il est essentiel que cette procédure ait été mise en défaut pour que les élèves acceptent de s'engager dans la recherche d'une autre procédure, travail qui leur sera demandé dans le deuxième temps.

Deuxième temps : par groupes autour de grandes tables accolées

Les élèves sont placés par groupes de quatre autour de tables (à deux places) accolées dans le sens de la longueur (ou de la largeur), sur lesquelles le professeur a placé une gommette indiquant la position du point O et deux allumettes indiquant celles des points A et C.

• D'abord, afin de se familiariser avec l'emploi du matériel, ils sont invités à utiliser la boîte de visée mise à la disposition du groupe pour placer les points B et D définis précédemment.

• Ensuite, le professeur vient placer sur les rectangles R de chacun des groupes un point E comme l'indique le schéma ci-dessous (en revanche le professeur ne dit rien au sujet du point F dont les élèves auront à anticiper la position, placé ici sur le schéma seulement à l'intention du lecteur) :



puis donne à chaque groupe la consigne suivante :

« Si, en posant en O le viseur de la boîte, et qu'en visant, l'arête gauche coïncide avec l'allumette placée en E, comment s'y prendre, sans faire de visée avec la boîte, pour déterminer en quel point F du bord serait située l'allumette coïncidant avec l'arête droite ? ».

Ensuite, s'adressant à l'ensemble des groupes, il précise les “règles du jeu”, et en particulier le matériel que les élèves peuvent utiliser :

– le matériel habituel de géométrie ;
– les feuilles de papier blanc de faible grammage ;
– le papier calque ;
– les tasseaux de bois (un par groupe) ;
– des feutres pour tracer sur les tables (ou sur le papier qui les recouvre).

Il rappelle qu'il est interdit de viser avec la boîte, mais qu'ils peuvent l'utiliser pour prendre à son sujet les informations qu'ils veulent. Il annonce qu'elle servira plus tard pour voir si les méthodes trouvées sont bonnes ou mauvaises.

Un temps de recherche leur est ensuite laissé (10 minutes, pas davantage).

On ne leur demande pas de fournir une description écrite de leur méthode. Mais, chaque groupe est prévenu du fait qu'il devra déléguer un de ses membres pour venir expliquer à tout le monde, sur la table centrale, la méthode qu'il a trouvée.

Éventuelle mise en commun intermédiaire

Si besoin est, et en particulier dans le cas où aucun groupe ne produirait de réponse, le professeur veillera à organiser un moment de mise en commun, en invitant les groupes à :

– faire part des méthodes qu'ils sont essayées ;

– pointer ce qui n'a pas fonctionné ;
– pointer ce dont on est sûr (y compris les réponses fausses).

Ensuite, il fera une nouvelle dévolution du problème, en leur demandant ce qui est connu et que l'on peut utiliser (O, les points A et B, C et D obtenus à l'aide de la boîte de visée, le point E, et la boîte elle-même), question qu'il pourra formuler autrement, par exemple : "Où peut-on aller chercher des informations ?", en veillant à ce que la réponse attendue soit produite par les élèves : en utilisant le matériel autorisé, on peut tirer de l'information des points déjà placés (A, B, C et D) ou de la boîte.

Troisième temps : présentation des productions et validation

Présentation des productions

Il serait souhaitable que ce troisième temps puisse avoir lieu dans la foulée des deux précédents, d'où la nécessité de ne pas passer trop de temps sur les deux premiers.

Le rapporteur de chaque groupe vient montrer sa méthode, à l'aide du matériel disponible sur la table centrale, et la commenter en même temps qu'il la met en œuvre. La position du point F obtenu par chacun des groupes est matérialisée.

Pour chacun d'eux, le professeur note sur une affiche le nom des objets géométriques sollicités en se limitant au vocabulaire effectivement employé par les élèves :

- segments de même longueur (mis en jeu dans les reports) ;
- arcs de cercle ayant pour rayon certaines longueurs ;
- angles "égaux" ou "superposables" (mis en jeu dans les reports d'angles).

Après qu'un groupe a présenté sa méthode, ceux qui ont employé la même ou une méthode voisine sont invités à n'en présenter que les différences, afin de gagner du temps.

Phase de validation

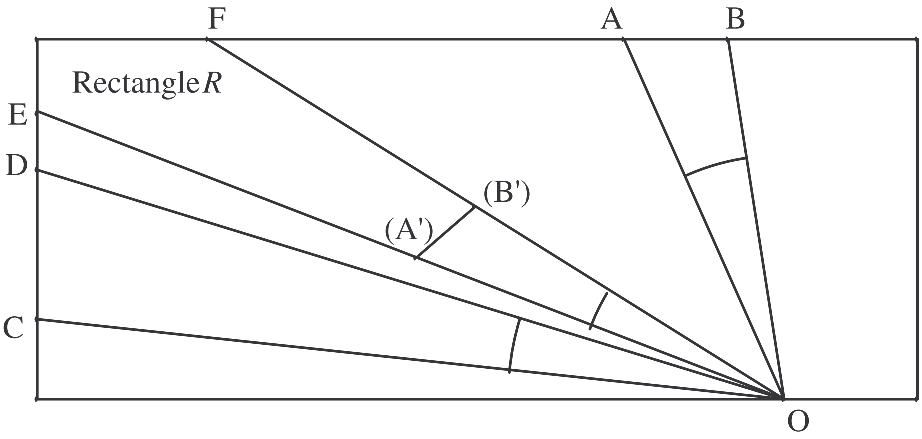
Il s'agit d'une validation matérielle, utilisant la boîte de visée. Elle permettra de déclarer comme acceptables des points "voisins" du point attendu, compte tenu de l'imprécision de certaines manipulations.

5.2. Deuxième séance de la situation "Angles de visée"

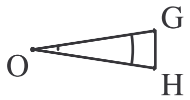
Premier temps : rappels des procédés corrects validés en séance 1

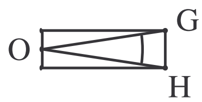
Deuxième temps : institutionnalisation

Le professeur aura préparé, entre les deux séances, un transparent à rétroprojeter reproduisant les tracés réalisés sur le rectangle R pour chacun des procédés évoqués durant le premier temps, en utilisant une couleur par procédé. La rétroprojection sera faite de façon à ce que les tailles des images obtenues soient voisines des tailles réelles.



En ce qui concerne la boîte de visée, le professeur pourra reproduire sur un autre transparent le(s) gabarit(s) utilisé(s) (cf. schéma ci-dessous), ou directement positionner la boîte de visée au tableau à l'endroit ou l'angle de visée doit être reporté. Les points *G* et *H* utiles pour indiquer l'angle de visée seront placés, selon le cas, sur le transparent ou directement au tableau :





Les tracés effectués sur le rectangle font apparaître quatre exemplaires d'un même objet géométrique, qui sont tous égaux (ou superposables) à l'un d'entre eux, ici à celui qui apparaît dans la boîte de visée. On les appelle des angles. Pour mieux les identifier sur les figures, on les marque à l'aide d'un arc de cercle centré en leur sommet, le codage des angles étant réalisé à main levée plutôt qu'au compas, conformément aux habitudes.

Le professeur pourra signaler que, pour pouvoir parler de ces angles, dans les pays anglo-saxons, on utilise les notations (ou écritures) suivantes :

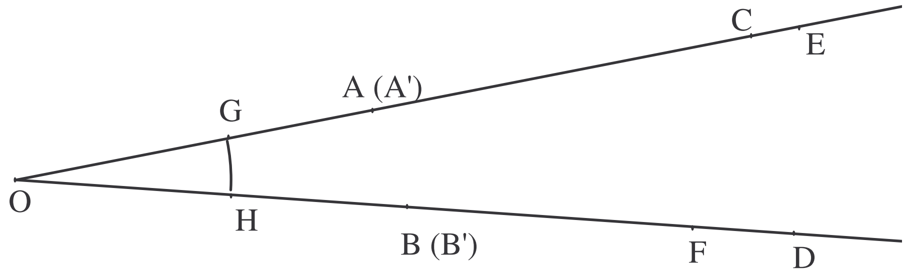
$$\angle AOB,\ \angle COD,\ \angle EOF,\ \angle GOH,$$

le symbole $\angle$ évoquant de manière assez suggestive un angle, et qu'en France, on préfère le symbole du chapeau que l'on écrit au-dessus des lettres désignant les points (symbole figurant un angle ... obtus), et il donnera les notations de ces mêmes angles avec ce symbole.

La situation devrait permettre la formulation par les élèves de l'idée selon laquelle l'égalité de deux angles n'a rien à voir avec les longueurs de leurs côtés respectifs. Si cela ne se produit pas, le professeur pourra superposer l'angle *GOH* à chacun des angles *AOB*, *COD* et *EOF*.

Puis, à partir de photocopies "papier" du transparent utilisé précédemment, il demandera à quelques élèves de découper les parties du rectangle délimitées respectivement par les (triplets de) points *A*, *O*, *B*; *E*, *O*, *F* ; *A'*, *O*, *B'* ; *C*, *O*, *D*. (Il évitera de parler de triangles, car la partie délimitée par les points *E*, *O* et *F* est un quadrilatère).

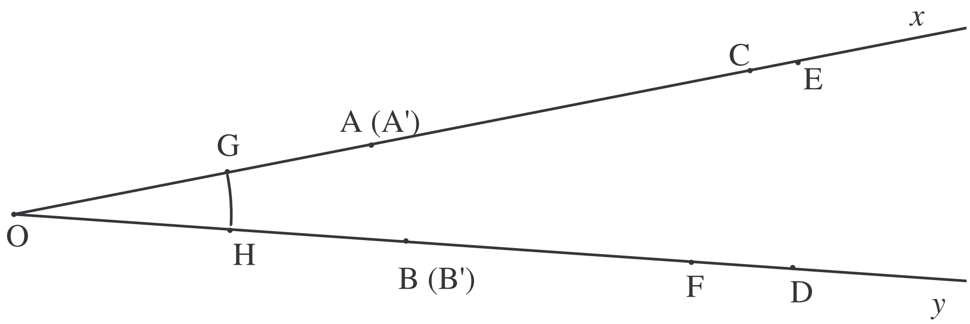
Ensuite, ayant préparé un transparent sur lequel est reproduit l'angle *GOH*, il superposera successivement sur l'angle *GOH* les angles *AOB*, *COD* et *EOF*, en marquant à chaque fois l'emplacement des points *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* : l'alignement des points *G*, *A*, *C* et *E* d'une part, des points *H*, *B*, *D* et *F* d'autre part apparaîtra, comme l'indique le schéma ci-dessous (qui est cohérent avec ceux qui précèdent du point de vue des longueurs de côtés) :



ce qui permettra de bien mettre l'accent sur "l'ouverture entre les deux côtés", dont veut rendre compte la notion d'angle, qui est ici la même pour chacun d'eux, alors qu'il n'en est pas de même pour les longueurs de côtés.

La transition avec les demi-droites peut se justifier en s'appuyant sur cette idée d'indépendance de l'angle par rapport à la longueur de ses côtés : une bonne manière de l'exploiter, *en théorie du moins*, consiste à faire que ces côtés aient une longueur infinie, c'est-à-dire à remplacer les segments d'origine commune *O* par deux demi-droites. Cet aspect théorique reste assez facile à admettre lorsqu'on parle justement d'angle de visée, car l'on peut regarder aussi loin que l'on veut ..., à l'infini ...

Le schéma ci-dessous permet d'expliquer qu'au lieu de parler de l'un des quatre angles *AOB*, *COD*, *EOF* et *GOH*, on peut tout aussi bien parler de l'angle des deux demi-droites *Ox* et *Oy*, angle que l'on pourrait noter $\angle xOy$, mais que l'on notera *xOy* "avec un chapeau", conformément aux conventions usuelles en France.



Cinquième temps : réinvestissement / entraînement

Le professeur proposera aux élèves des exercices des deux types suivants :

1. Reconnaître des angles égaux :
   - à l'œil ;
   - puis avec un instrument (gabarit, papier calque).
2. Tracer à main levée, puis à l'aide d'instruments (gabarit, papier calque) un angle égal à un angle donné, d'abord sans aucune contrainte, puis en imposant le sommet de l'angle et enfin, un côté de l'angle.

6. CONCLUSION : RETOUR SUR LES HYPOTHESES DE LA RECHERCHE

Résumons à l'aide d'un tableau les démarches adoptées dans les deux situations exposées dans les paragraphes 4. et 5.

Situation “Cercle”	Situation “Angles de demi-droites”
Étude d'un même problème (construction d'un triangle équilatéral) dans plusieurs milieux successifs, auxquels sont attachés des modes de validation (élèves) différents	Étude d'un problème dans un milieu privilégié (changement d'espace : on sort de la feuille de papier)
Prise de recul par rapport à ces différents milieux : rédaction d'une procédure qui convient indépendamment du milieu, ce qui conduit à l'évocation de l'objet cercle.	dont la solution nécessite l'objet “angle de demi-droites”, quelle que soit la procédure matérielle de résolution choisie.
À partir d'un autre problème, mise en place de la propriété caractéristique de l'objet “cercle”.	Validation matérielle.
Retour sur le problème de construction initial : justification de la procédure (indépendante du milieu) formulée précédemment, convoquant les énoncés caractérisant le cercle.	Le professeur met en évidence que l'objet “angle” est commun à toutes les stratégies de résolution, et justifie le choix de demi-droites comme “côtés”.

Notre hypothèse initiale de recherche consistait à créer le besoin de géométrie théorique en organisant l'étude de problèmes de construction dans une succession de différents milieux, et en recherchant une justification des techniques de construction qui soit indépendante du milieu.

En ce qui concerne la situation “Cercle”, l'expérimentation a montré que cette hypothèse est nécessaire pour assurer une distinction claire entre la géométrie perceptive et instrumentée pratiquée à l'école primaire et la géométrie théorique introduite au début du collège, mais qu'elle n'est pas suffisante. En effet, l'activité 2, qui n'était pas prévue dans la progression au début de notre recherche, a dû y être introduite pour que le retour à la constructibilité du triangle équilatéral (activité 3) puisse fonctionner dans les classes avec une participation réelle des élèves. Sans l'activité 2, le seul effet bénéfique du changement de milieu (et il n'est pas négligeable !) a été d'installer le vocabulaire mathématique (usage du mot “cercle” sans obligatoirement faire référence à un instrument matériel). En revanche, le fait de devoir faire fonctionner la propriété caractéristique d'un point d'un cercle dans un contexte surchargé (où deux cercles étaient présents, et où il fallait sur chacun d'eux “isoler” un de leurs points d'intersection) a rendu difficile la justification par les élèves du fait que le triangle ainsi construit était équilatéral. La conception de cette phase supplémentaire (activité 2) a répondu au souci de donner à l'incidence “point / cercle” un statut d'objet, alors que seul son aspect outil avait été sollicité dans l'activité 1. C'est par la dévolution d'un nouveau problème de construction, plus directement lié à cette incidence, que nous y sommes parvenus. Les deux procédés de construction utilisés par les élèves pour construire les 35 points ont permis de distinguer les deux énoncés 1 et 2 qui caractérisent l'appartenance d'un point à un cercle dont on connaît le centre et l'un de ses points. La recherche a permis de hiérarchiser ces deux énoncés en fonction de leur “distance” à la géométrie perceptive. L'emploi de l'énoncé 2 est facilité par l'appréhension perceptive qu'on en a : en évoquant un point M d'un cercle de centre D passant par E, on s'imagine mentalement ce cercle, et on n'a aucune peine à en tirer que DM est égale à DE. En revanche, l'énoncé 1, pour lequel on sait seulement que DM est égale à DE, ne provoque pas spontanément la construction du cercle au compas (comme certaines productions d'élèves l'ont montré), et rend difficile l'évocation du cercle : l'attribution par les élèves des qualificatifs “imaginaire” et “'invisible” à ce cercle montre bien que cette évocation ne peut être rattachée à la géométrie perceptive. Or dans le problème de construction du triangle équilatéral, c'est précisément cet énoncé 1 que l'on met au travail en premier dans la phase traditionnellement appelée “analyse”. Les programmes insistent sur la nécessité d'énoncer avec deux énoncés séparés une propriété caractéristique. Notre recherche permet de comprendre pourquoi le respect de cette consigne par les professeurs ne suffit pas à en assurer un apprentissage correct. L'appréhension perceptive facile de l'énoncé 2 explique que ce dernier soit davantage disponible pour les élèves, et que son emploi ne pose guère de problème. En revanche, l'énoncé 1 nécessite une prise de distance par rapport à la géométrie perceptive que l'enseignement n'offre que trop rarement l'occasion aux élèves de faire : c'est précisément la vertu du problème de construction posé dans l'activité 2. La mise en rapport des élèves avec un tel problème, et en particulier avec la confrontation des deux procédés pour le résoudre, permet de leur faire “voir” qu'un cercle est constitué de points (qui ont tous en commun une même propriété), acte très difficile à faire quand le cercle est “déjà-là”. Sans doute convient-il de préciser que notre objectif était la caractérisation de l’appartenance d’un point à un cercle sans chercher à installer le cercle comme ensemble de points, problème autrement plus difficile et que nous avons jugé hors de portée d’élèves en début de collège. Ce qui précède montre bien la complexité de la définition du cercle en tant qu'objet de la géométrie théorique. Les mêmes remarques sont valables pour la caractérisation de l'appartenance d'un point à la médiatrice d'un segment. L'enseignement à propos de ces objets, au lieu d'insister sur les aspects “anciens” renforcés par l'appréhension perceptive, gagnerait à focaliser son énergie pour rendre opératoires les aspects “nouveaux” qui ne le sont pas et qui, en compagnie des aspects anciens, vont précisément constituer le cœur des objets de la géométrie théorique, par l'intermédiaire des énoncés si particuliers que sont les définitions ou les propriétés caractéristiques.

Autre fruit intéressant de notre recherche : l'installation du vocabulaire mathématique correct (que permet ici l'activité 1) est insuffisant pour rendre opératoires les objets théoriques qu'il permet d'évoquer (il nous a fallu introduire l'activité 2 pour que l'activité 3, dans laquelle on rend le cercle opératoire, puisse faire l'objet d'une bonne dévolution aux élèves). Ce résultat explique ce constat fait par de nombreux professeurs : malgré le temps important passé pour installer et contrôler la connaissance formelle du “bon” vocabulaire concernant la géométrie, les élèves ont du mal à l'acquérir et à en voir la nécessité ou même l'utilité. Ce qui précède montre que les objets de la géométrie théorique sont des construits culturels dont l'enseignement ne peut faire l'économie de la reconstruction, cette dernière ne pouvant se limiter aux aspects renforcés par l'appréhension perceptive.

En ce qui concerne la situation relative aux angles de demi-droites, le coût de l'organisation matérielle n'est légitimé que par la nécessité de travailler dans un espace autre que celui de la feuille de papier, dans lequel on peut remplacer avantageusement les angles par des longueurs. La force de ces dernières s'est manifestée dans nos expérimentations : même après avoir explicitement invalidé leur emploi, certains élèves y ont de nouveau eu recours, parfois avec des stratégies fort complexes mais hasardeuses. La résolution du problème est difficile pour les élèves, mais les professeurs ont constaté son fort effet d'apprentissage : même les élèves n'ayant pas réussi voient la pertinence de l'objet “angle”, vu comme “écartement entre deux segments de même origine”. Le fait que cet “écartement” soit indépendant de la longueur des segments est au cœur de la situation, et il est bien perçu. En revanche, cette dernière ne porte pas en elle-même le passage des segments aux demi-droites de même origine, partie du travail qui doit être pris en charge par le professeur, et qui appartient au domaine de la géométrie théorique.

Les deux situations présentées sont les deux premières qui ont été mises en œuvre dans notre recherche, qui vise la construction des objets géométriques (au sens de la géométrie théorique) sur lesquels on va s'appuyer tout au long du collège : cercle, angle, angle droit, droites perpendiculaires et droites parallèles, symétrie orthogonale, triangles et quadrilatères particuliers. Pour réaliser un tel projet, nous avons pris quelques libertés par rapport aux programmes actuels : ainsi, nous avons donné une définition de l'angle droit du point de vue de la géométrie théorique ; par ailleurs, nous n'avons pas hésité à choisir une axiomatique surabondante, afin de pouvoir démontrer les résultats relatifs aux triangles et quadrilatères particuliers en restant dans le domaine de la géométrie théorique ainsi construite. Ce travail, complété par une partie concernant la géométrie dans l'espace, fera l'objet d'une publication INRP dont la parution est prévue en fin d'année 2002 - début 2003.

Annexe 1 : La barre d'outils « Triangle équilatéral »

Elle comporte :

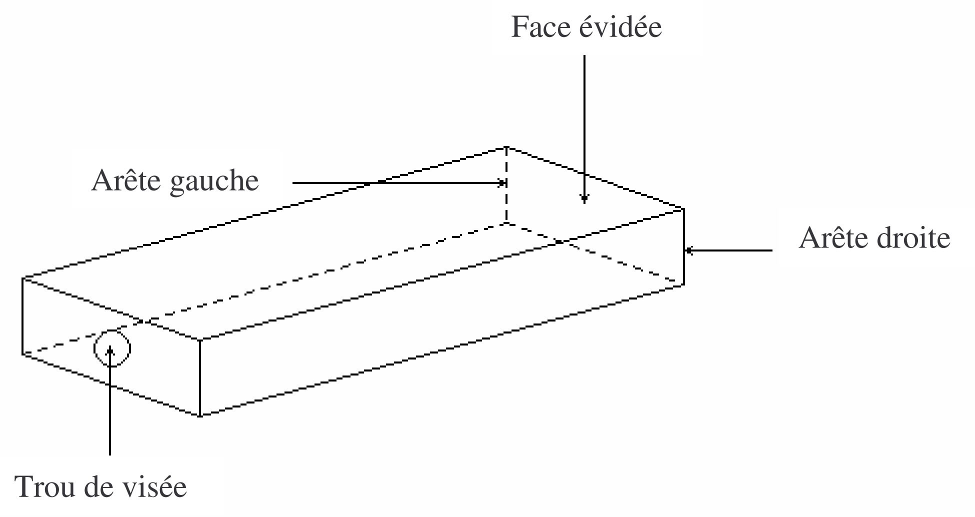
- la boîte des **Pointeurs** avec le seul outil **Pointer,**
- la boîte des **Points** avec les outils **Point**, **Point sur un objet** et **Point sur deux objets,**
- la boîte des **Lignes** avec **Droite**, **Segment** et **Demi-droite,**
- la boîte des **Courbes** avec le seul outil **Cercle centre et point** qui remplace **Cercle**
  (Nous avons dû recréer l'outil "Cercle" présent dans la première version de Cabri à l'aide d'une macro – construction. En effet, la procédure suivante « Tracé du cercle de centre *A* passant par *B*, placement d'un point *C* sur ce cercle et ajustement de sa position à l'aide de l'outil "Distance et longueur " de manière à ce que *BC* = *AB* » ne résiste pas au déplacement avec Cabri I. En revanche, avec Cabri II, si le triangle obtenu avec ce procédé ne reste pas équilatéral dans tous les cas, l'écart des mesures entre *CA* et *AB* n'excède jamais un centième, ce qui ne suffit pas à convaincre les élèves que le triangle n'est plus équilatéral).
- la boîte des **Mesures** avec **Distance & longueur**, avec 1 décimale

Les autres boîtes à outils sont supprimées.

Annexe 2 : La boîte de visée

Boîte de visée réalisée dans une boîte de spaghetti

- Dimensions approximatives de la boîte :
  Longueur : 25 cm
  Largeur : 5,5 cm
  Hauteur : 2 cm
- La plus petite des faces est percée en son centre d'un trou circulaire d'environ 5 mm de diamètre. Il peut être réalisé à l'aide d'un perforateur.
- La face opposée est complètement évidée.



Bibliographie

Berthelot R., Salin M.H. [1992] *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans le cycle obligatoire*, Thèse Université Bordeaux I.

Berthelot R., Salin M.H. [1995], « Savoirs et connaissances dans l'enseignement de la géométrie » dans *Différents types de savoirs et leur articulation*, La Pensée Sauvage Éditions, Grenoble.

Brousseau G. [1983] *Études de questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie*, Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, IMAG, LSD, Université Grenoble 1, année 82-83, n° 45, pp. 183-227.

Chevallard Y, Jullien M. [1990-91] *Autour de l'enseignement de la géométrie au Collège - Première partie*, Petit *x*, n°27, IREM de Grenoble, pp. 41-76.

Combier G., Pressiat A. [parution fin 2002 - début 2003] *Apprentissages géométriques au début du Collège*, INRP.

Duval R. [1994] *Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique*, Repères IREM, n°17.

Euclide [1993] Les Œuvres d'Euclide traduites littéralement par F. Peyrard, Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, Paris.

Laborde C. [1992] *Enseigner la géométrie : permanences et révolutions*, Conférence pleinière tenue à ICME 7 à Québec.

Laborde C. [1994], *Les rapports entre visuel et géométrique dans un EIAO*, dans "Vingt ans de didactique des mathématiques en France", La Pensée Sauvage Éditions, Grenoble.

Mercier A., Tonnelle J. [1991-92] *Autour de l'enseignement de la géométrie au Collège - Deuxième partie*, Petit *x*, n°29, IREM de Grenoble, pp. 15-56.

Mercier A., Tonnelle J. [1992-93] *Autour de l'enseignement de la géométrie au Collège - Troisième partie*, Petit *x*, n°33, IREM de Grenoble, pp. 5-35.