Gilles Aldon, Aurélien Alvarez, Anne Calpe,
Yves Matheron, Jarmila Novotna,
Sophie Soury-Lavergne, Jana Trgalova

Représentations dynamiques des mathématiques :

quels outils pour faire, pour apprendre et pour enseigner les mathématiques ?

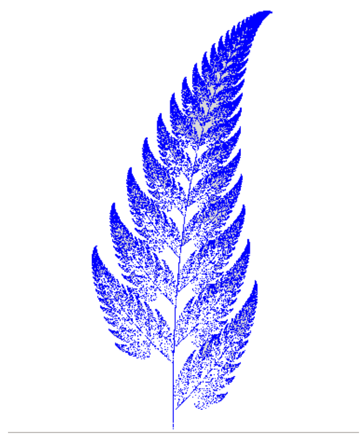


Table des matières

Chapitre 1

Préface

Gilles Aldon
IFÉ-ENS de Lyon
S2HEP (EA 4148)

1.1 Les journées mathématiques de l'Institut Français de l'Éducation

Les journées mathématiques de l'IFÉ se sont tenues les 12 et 13 juin 2012 ; elles se sont situées dans la dynamique de la conférence nationale qui s'est déroulée à l'École Normale Supérieure de Lyon en mars 2012 et dont le thème portait sur l'enseignement des mathématiques à l'école et au collège. En élargissant le propos aux différents niveaux d'enseignement, de l'école primaire à l'université, ces journées ont pour ambition à la fois de rendre compte des travaux des équipes associées à l'IFÉ travaillant en mathématiques et de dynamiser les projets de recherche des années prochaines en explorant les pistes proposées par la conférence nationale.

Les travaux des journées précédentes, concrétisés par les actes publiés dans la collection des éditions électroniques de l'INRP, puis de l'IFÉ montrent l'évolution et les apports des équipes associées à la recherche en éducation mathématique. En 2010, les journées interrogeaient les effets des ressources pour l'enseignement des mathématiques, en 2011, les questions portaient sur la qualité des ressources, pour aboutir cette année à la question des représentations dynamiques des mathématiques : quels outils pour faire, pour apprendre et pour enseigner les mathématiques ? A travers les ateliers, les débats initiés par les communications de recherche et les conférences plénières ont permis de construire, à partir des travaux existants, les projets de recherche des années prochaines. Je ne reprendrai pas dans cette préface le détail des journées dont ces actes vont témoigner. On peut cependant consulter sur la page dédiée du site Educmath le programme des journées mais aussi l'annonce des prochaines journées qui auront lieu en juin 2013.

En revanche, je souhaiterais montrer le dynamisme et la diversité des travaux menés dans le cadre des équipes de mathématiques de l'IFÉ pour réaffirmer les apports pour les recherches en éducation que cette structure facilite, avant de développer les directions de recherche dans lesquelles les mathématiques à l'IFÉ souhaitent se projeter et qui ont constitué le cœur des débats des journées de juin.

1.1.1 La recherche en mathématiques à l'IFÉ

La recherche en mathématiques à l'IFÉ constitue un écosystème à la fois fragile et complexe parce que dépendant de priorités politiques et de moyens humains et financiers et reposant sur des réseaux et des collaborations multiples. J'émets le souhait que le rôle fondamental de l'école dans le développement de la nation soit enfin considéré dans son ensemble, depuis la recherche en éducation jusqu'à la pratique dans les classes de la maternelle à l'université. La vigueur de cette école, et sa projection vers l'avenir, notamment en ce qui concerne l'enseignement des mathématiques, passent par des organisations pérennes reposant sur la formation, la vitalité de réseaux d'enseignement et de recherche et des coopérations multiples.

- Importance des réseaux :
  - au sein de l'IFÉ et au niveau national, en s'appuyant notamment sur les Instituts de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques (IREM) et les inspections académies régionales, les équipes de professeurs associés apportent le lien nécessaire avec la pratique de l'enseignement en montrant dans leurs diversités la complexité des approches,
  - les lieux d'éducation associés (LéA) initiés dans cette année scolaire constituent « un espace (école, centre de quartier...) où il y a un enjeu d'apprendre, et qui porte en lui un questionnement qui mobilise ses acteurs », et jouent un rôle important dans les liens entre chercheurs et praticiens en ne considérant pas enseignants associés comme des acteurs isolés, mais des foyers de diffusion de ressources et de mobilisation des acteurs au sein des établissements,
  - mais aussi la position de l'IFÉ dans la communauté internationale d'éducation mathématique est une condition nécessaire de la dissémination des recherches ; par exemple :
    - l'espace mathématique francophone (EMF), partie française de l'International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) : la dernière conférence à Genève montre l'importance de l'implication des équipes de recherche de l'IFÉ,
    - European Research in Mathematics Education (ERME), dont les chercheurs de l'IFÉ sont des acteurs assidus,
    - la commission pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques (CIEAEM) qui promeut à l'échelle internationale des approches des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage reposant sur des regards issus de différents champs de la recherche (psychologie, didactique, sciences de l'éducation,...) et de la pratique.
- Importance des collaborations : l'enseignement des mathématiques est une affaire complexe demandant des regards différents et des collaborations multiples et, comme il est indiqué sur le site Educmath, « la création de l'Institut Français de l'Education dans l'ENS de Lyon ouvre de nouvelles perspectives pour étudier ces questions, en interactions avec une diversité de communautés scientifiques » :
  - les chercheurs en mathématiques et leur participation dans des équipes mathématiques de l'IFÉ aux journées mathématiques montrent, s'il en est besoin, l'importance de leurs apports,
  - les enseignants de mathématiques sans lesquels les recherches en éducation ne seraient pas possibles,
  - les didacticiens des mathématiques et les chercheurs en éducation dont les travaux font avancer la compréhension des phénomènes complexes de l'apprentissage et de l'enseignement.
- Importance de la formation tant initiale que continue, formation s'appuyant sur la recherche et ancrée dans la réalité, mais aussi de nouvelles formes de formation fondés sur l'utilisation de plate-formes numériques facilitant la production et l'utilisation de ressources en ligne

et le travail collaboratif.

1.1.2 Projets

Les projets de recherche s'ancrent dans les travaux en cours et s'appuient sur les résultats des recherches précédentes et sur les conclusions apportées par la conférence nationale. Ils se déclinent suivant trois axes principaux, sans préjuger du fait que les trois axes sont pris en compte peu ou prou dans toutes les recherches.

- Le premier est directement en lien avec la conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques du 13 mars 2012 et s'appuie et prolonge les conclusions de cette journée en focalisant sur le socle commun des compétences et connaissances ; les recherches sont fondées sur la volonté d'amélioration des apprentissages dans les grands domaines des mathématiques et en particulier dans le domaine du numérique : « c'est ainsi que l'on peut penser développer à l'école obligatoire, école du socle commun, l'intelligence du calcul » (conclusion conférence nationale),
- Le second plus transversal s'appuie sur les nouveaux usages de la technologie dans l'enseignement pour développer des recherches permettant d'examiner les apports et les difficultés inhérentes à l'emploi de nouveaux outils dans l'enseignement des mathématiques. Ces recherches portent à la fois sur les usages de logiciels spécifiques pour l'enseignement mais aussi sur les investigations permises dans l'enseignement et dans la formation par les nouvelles possibilités d'information et de communication,
- Enfin, le troisième axe explore les possibilités de constructions didactiques pour favoriser dans l'enseignement, le sens des constructions mathématiques proposées : « Le travail de constitution des classes de problèmes socialement vifs dans les pratiques d'une époque et qui, à ce titre, doivent être proposés aux élèves pour qu'ils les étudient, doit être organisé comme une tâche collective de la profession, et d'abord des équipes de professeurs dans les établissements d'enseignement. » (conclusion de la conférence nationale).

1.1.3 Conclusion

Comme en témoignent ces actes, les débats des journées mathématiques de l'IFÉ ont été à la hauteur des enjeux pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ! Je souhaite que le lecteur, professeur, mathématicien, didacticien,. . .retrouve dans ces textes des représentations dynamiques des mathématiques.

Chapitre 2

Conférences

2.1 Une présentation de Chaos

Aurélien Alvarez, Université d'Orléans
http ://www.chaos-math.org

Chaos est un film mathématique constitué de neuf chapitres de treize minutes chacun. Il s'agit d'un film tout public autour des systèmes dynamiques, de l'effet papillon et de la théorie du chaos. Tout comme DIMENSIONS, ce film est diffusé sous une licence Creative Commons et a été produit par JOS LEYS, ÉTIENNE GHYS et AURÉLIEN ALVAREZ.

La suite de ce texte est une présentation des grandes lignes de ce film qui devrait être disponible sur internet courant décembre 2012 en français, anglais, italien et néerlandais. D'autres langues et de nombreux sous-titrages seront rendus disponibles au fur et à mesure dans les prochains mois. Ce film n'aurait pu voir le jour sans l'aide de nombreuses personnes que nous remercions nommément dans l'onglet Merci du site. Encore un grand merci à tout le monde.

« Tout s'écoule, tout est mouvement. » Ainsi commence le premier chapitre de Chaos, reprenant l'une des idées principales de la philosophie d'Héraclite d'Éphèse qui vécut à la fin du VIe siècle av. J.-C. L'être est éternellement en devenir, les choses n'ont pas de consistance et tout se meut sans cesse : tout devient tout, tout est tout. La Science peut-elle nous aider à prédire l'avenir ?

Voilà une question qui ne date pas d'aujourd'hui et que l'on peut voir comme un fil conducteur de ce film.

L'idée du déterminisme fut, semble-t-il, esquissée pour la première fois par le baron d'Holbach (1723-1789) avec ces mots :

> « Dans un tourbillon de poussière qu'élève un vent impétueux ; quelque confus qu'il paraisse à nos yeux, dans la plus affreuse tempête excitée par des vents opposés qui soulèvent les flots, il n'y a pas une seule molécule de poussière ou d'eau qui soit placée au hasard, qui n'ait sa cause suffisante pour occuper le lieu où elle se trouve, et qui n'agisse rigoureusement de la manière dont elle doit agir. Un géomètre qui connaîtrait exactement les différentes forces qui agissent dans ces deux cas, et les propriétés des molécules qui sont mues, démontrerait que, d'après les causes données, chaque molécule agit précisément comme elle doit agir, et ne peut agir autrement qu'elle ne fait. »

Le déterminisme est une notion philosophique selon laquelle la succession des événements et des phénomènes est due au principe de causalité, ce lien pouvant parfois être décrit par une loi physico-mathématique qui fonde alors le caractère prédictif de ces derniers. Le déterminisme est donc avant tout une doctrine scientifique qui ne doit surtout pas être confondue avec le fatalisme.

Dans son Essai philosophique sur les probabilités , l'astronome et mathématicien Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) affirme le déterminisme universel dans sa toute grandeur :

> « Nous devons envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur, et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux. »

Comme le souligne Laplace , il faudrait une intelligence infinie... et déjà le déterminisme scientifique semble montrer ses limites lorsque l'on se pose la question de la stabilité du mouvement des planètes. Si la question de savoir où sera précisément la Terre dans un milliard d'années semble assez inaccessible (et peut-être pas si intéressante que ça d'ailleurs...), risque-t-elle un jour d'être éjectée du système solaire ? Ou plutôt que de se demander le temps qu'il fera à Paris dans dix ans, jour pour jour, ne serait-il pas plus intéressant d'essayer de prévoir des moyennes, comme par exemple le nombre de jours de pluie en France pendant une saison ? C'est sur ce changement de point de vue sur la nature du déterminisme scientifique que se termine le premier chapitre de Chaos.

À présent, présentons brièvement les huit autres chapitres de ce film.

i. Mouvement et déterminisme. Panta Rhei.

ii Champs de vecteurs. La course des legos. À la fin du XVIIe siècle, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) et Isaac Newton (1643-1727) mettent indépendamment au point un outil mathématique prodigieux : le calcul infinitésimal ou calcul différentiel et intégral. Il s'agit en quelque sorte d'une boule de cristal incroyablement efficace pour prédire l'avenir, dès lors que le mouvement d'un système est régi par une équation différentielle. Ce deuxième chapitre de Chaos est d'une certaine façon une initiation à ce calcul intégro-différentiel dans le monde des legos.

iii Un peu de mécanique. La pomme et la lune. Pourquoi une pomme tombe du pommier alors que la Lune ne tombe pas sur la Terre ? C'est la question que se pose Newton dès l'âge de 17 ans, l'occasion de revenir dans ce chapitre sur le principe fondamental de la dynamique et la loi de l'attraction gravitationnelle.

iv Oscillations. La balançoire. L'idée que les mouvements finissent toujours par se stabiliser, en s'arrêtant ou en oscillant périodiquement, a longtemps dominé la Science. Dans ce chapitre, on essaie d'expliquer l'idée principale du théorème de Poincaré-Bendixson , le fait qu'il ne peut y avoir de récurrence : une trajectoire qui partirait d'un point P du plan peut tout à fait dans un premier temps revenir pas trop loin de P mais, ensuite, elle est condamnée à ne plus y revenir.

v Billards. Le taureau de Duhem. Au début du XXe siècle, le philosophe des sciences Pierre Duhem (1861-1916) se plaît à présenter les travaux du mathématicien Jacques Hadamard (1865-1963), publiés en 1898 dans un article intitulé *Sur les géodésiques des surfaces à courbures opposées*, d'une manière imagée : il s'agit alors de lancer une bille qui roulerait sans frottement sur le front d'un taureau dont on aurait allongé les cornes jusqu'à l'infini.

Dans ce chapitre, on essaie d'expliquer les idées d'Hadamard sur un exemple différent mais finalement assez proche des géodésiques sur les surfaces à courbures opposées : il s'agit du jeu de billard.

vi Chaos et fer à cheval. Smale à Copacabana. Au début des années 1960, le jeune mathématicien américain Steve Smale (1930-...) travaillait sur la plage de Copacabana lorsqu'il découvrit un fer à cheval : il s'agit d'une transformation du plan qui associe dilatation, contraction et repliement, transformant un carré en une sorte de fer à cheval. Cette dynamique est extrêmement riche, que ce soit dans le futur ou dans le passé, avec une structure qui se reproduit à l'infini. Le fer à cheval est un exemple paradigmatique de système dynamique qui cherche à réduire le chaos à son expression la plus élémentaire.

vii Attracteurs étranges. L'effet papillon. En 1963, Edward Lorenz (1917-2008), qui s'intéressait au problème de la convection dans l'atmosphère terrestre, simplifia drastiquement les équations de Navier-Stokes de la mécanique des fluides, réputées pour leur inextricable complexité. Le modèle atmosphérique de Lorenz est ce que les physiciens appellent un modèle-jouet . Comprendre l'attracteur de Lorenz a un véritable enjeu scientifique. À quoi ressemble-il précisément ? Comment se comporte sa dynamique interne ? C'est pour essayer de répondre à ces questions que, dans les années 1970, Birman, Guckenheimer et Williams ont proposé un modèle simple que l'on peut construire à l'aide de bandes de papier.

viii Statistiques. Le moulin de Lorenz. Face au problème de la sensibilité aux conditions initiales, Lorenz nous propose de recentrer nos ambitions autour de questions statistiques. Le but de cet avant-dernier chapitre de Chaos est de montrer qu'il existe une approche positive et constructive face au problème de la dépendance sensible aux conditions initiales. C'est le véritable message de Lorenz qui, malheureusement, est peu connu du grand public.

ix Chaotique ou pas ? La recherche aujourd'hui. Il y a beaucoup de sortes de dynamiques, certaines sont compliquées, d'autres non. Dans les années 1990, le mathématicien brésilien Jacob Palis (1940-...) a formulé tout un ensemble de problèmes qui, s'ils étaient résolus, permettraient d'avoir une vision globale du chaos. Les conjectures de Palis sont des énoncés mathématiques précis, nécessairement techniques, qui reprennent un certain nombre d'idées présentées dans ce film.

Aujourd'hui, on ne pense plus au déterminisme comme l'évolution d'une trajectoire individuelle, mais bien plus comme tout un ensemble en évolution collective. La sensibilité aux conditions initiales des trajectoires est compensée par une sorte de stabilité statistique de tout un ensemble. Cette image est-elle trop optimiste ? L'avenir le dira.

2.2 Démarches d'investigation et IBME

Michèle Artigue,
LDAR, Université Paris Diderot - Paris 7

2.2.1 Introduction

Les références aux démarches d'investigation, en anglais, à ce que l'on appelle « Inquiry Based Learning » (IBL dans la suite), ou « Inquiry Based Education » (IBE dans la suite) se sont multipliées ces dernières années dans les textes curriculaires et les discours pédagogiques, s'agissant des sciences d'abord puis plus récemment des mathématiques. Ceci amène à s'interroger sur les raisons d'être d'un tel phénomène, sur sa nature exacte, sur ses effets possibles à court ou plus long terme.

Le contexte européen

Si l'on considère l'Europe où il est particulièrement visible, on ne peut manquer de souligner le rôle joué par le rapport connu sous le nom de rapport Rocard publié en 2007 (Rocard, 2007). Ce rapport, élaboré par un groupe d'experts présidé par Michel Rocard, à la demande de la Commission Européenne, a effectivement joué un rôle clef. Partant d'un constat de désaffection pour les études et carrières scientifiques qui met en péril la compétitivité économique de l'Europe, le rapport attribue cette désaffection pour partie à des méthodes d'enseignement des sciences et des mathématiques inadaptées, trop déductives et formelles. Il propose, pour y remédier, de promouvoir un enseignement basé sur les démarches d'investigation en sciences et la résolution de problèmes en mathématiques. Il demande un soutien fort de l'Europe (à hauteur de 60M€) pour des projets visant à assurer la dissémination de telles pratiques, dans la ligne des projets Pollen et Sinus qui avaient été mis en place en 2003 et qui, selon le rapport, ont montré l'efficacité de ces pratiques pédagogiques. La seconde recommandation du rapport reproduite ci-après illustre bien la position adoptée :

« Les améliorations en matière d'enseignement des sciences doivent être menées par le biais de l'introduction de nouvelles formes de pédagogie. L'introduction d'approches basées sur la démarche d'investigation dans les écoles, les programmes de formation des professeurs à l'IBSE et le développement de réseaux de professeurs doivent être activement promus et encouragés. »

On peut légitimement ne pas être convaincu par l'argumentation développée dans ce rapport. Il est bien connu que les choix d'études des étudiants ne sont pas essentiellement pilotés par des raisons pédagogiques, et par ailleurs, en tant que didacticien, on peut sérieusement douter de l'efficacité de stratégies qui se situeraient à ce seul niveau pour améliorer la qualité de l'enseignement des sciences et des mathématiques. A la suite de ce rapport cependant, des appels d'offre ont été lancés et divers projets ont été effectivement financés, comme en témoignent le site www.scientix.eu qui recense les différents projets européens sur l'éducation scientifique (incluant mathématiques et technologie) ou le réseau Proconet (http ://proconet.ph-freiburg.de) qui regroupe les responsables de quinze d'entre eux.

Les projets européens Fibonacci et Primas

Les projets Fibonacci (http ://www.fibonacci-project.eu) et Primas (http ://www.primas-project.eu) mentionnés plus haut sont deux des projets financés dans le cadre du 7e Framework Programme pour la Recherche et le Développement de l'Union Européenne. Tous deux visent à promouvoir les démarches d'investigation dans l'enseignement des mathématiques et des sciences au niveau européen. Ces projets d'une durée de 4 ans, qui ont débuté en 2010, regroupent pour cela de nombreux partenaires (14 institutions dans 11 pays pour Primas, aujourd'hui 62 institutions situées dans 25 pays (22 européens et 3 extérieurs à l'Europe pour Fibonacci) et mettent en place des dispositifs de dissémination spécifiques, accordant une place essentielle à la formation des enseignants et à la création de réseaux, suivant en cela les recommandations du rapport Rocard. Le projet Fibonacci, au nom évocateur, est ainsi basé sur l'idée de jumelage entre des centres de référence, ayant déjà au début du projet une solide expérience de l'IBE et des centres jumelés, moins expérimentés mais désireux de contribuer à la promotion de telles approches. Le projet a débuté avec 12 centres de référence qui ont été jumelés avec 12 centres de niveau 1 et 12 centres de niveau 2 (les centres de niveau étant supposés un peu plus avancés dans l'implémentation de l'IBE en sciences et/ou en mathématiques) et pour lesquels formation et tutorat ont été organisés pendant deux ans. Au fil du projet se sont ajouté un centre jumelé de niveau 2, et plus récemment 25 centres de niveau 3, jumelés avec des centres de référence ou des centres de niveau 1 devenant à leur tour centres de référence.

Pour les concepteurs de ces projets, la réussite du processus de dissémination passe une prise en compte des caractéristiques propres à chaque contexte local, en particulier les caractéristiques des systèmes éducatifs des pays concernés, ceci incluant l'organisation de la formation initiale et continue des enseignants. Dans le projet Primas par exemple, le premier « workpackage » (Dorier, 2012) vise l'analyse de ces différents contextes, en s'appuyant pour ce faire sur la théorie anthropologique du didactique (TAD dans la suite) et notamment la hiérarchie des niveaux de codétermination des conditions et contraintes que propose cette théorie (Chevallard, 2002).

Pour les concepteurs, le succès de la dissémination passe aussi par la mobilisation d'une multiplicité d'acteurs au sein du système scolaire mais aussi au-delà du seul système scolaire. Dans Primas par exemple, deux WP sont consacrés respectivement aux actions de soutien à la dissémination auprès de groupes extérieurs à l'école (WP6) et à la dissémination via l'information des décideurs politiques (WP7). Par ailleurs, dans chaque pays partenaire, a été créé un comité consultatif national NCP (National Consultancy Panel) formé de représentants des responsables éducatifs, d'associations de parents et d'enseignants, d'institutions de formation continue, qui participe au projet en connexion avec les partenaires du pays, les autres comités nationaux et le comité international.

Fibonacci est structuré différemment mais cinq thématiques communes (common topics) traversent le projet, la cinquième concernant plus précisément les relations avec l'extérieur de l'école : Utiliser l'environnement externe de l'école pour l'éducation scientifique et mathématique. Les groupes de travail associés à ces thèmes ont chacun produit un document de synthèse maintenant accessible sur le site du projet.

En dépit de leurs différences, ces deux projets partagent d'autres caractéristiques. Ils concernent tous deux à la fois les sciences et les mathématiques et cherchent à établir des connexions entre leurs enseignements respectifs. Par ailleurs, l'accent y est mis sur : la scolarité de base (de la maternelle au collège) plus que sur l'enseignement au niveau lycée, la production, adaptation et partage de ressources pour l'enseignement et la formation. Celles-ci sont accessibles en ligne sur le site international des projets ou sur les sites qui leur sont associés par certains partenaires avec notamment des ressources traduites ou réalisées directement dans la langue du pays.

L'ambition de dissémination des démarches d'investigation et de l'IBE que portent ces projets et la réussite quantitative qu'ils peuvent aujourd'hui l'un et l'autre afficher [1] laisse cependant un

1. Le projet Fibonacci, par exemple, prévoyait d'atteindre au moins 3 000 enseignants et 45 000 élèves. En décembre 2012, les données recueillies montraient qu'il avait atteint en fait environ 5 800 enseignants et 305 000 élèves, en partie grâce à des financements complémentaires obtenus par le partenaire de Bayreuth qui ont permis

certain nombre de questions largement ouvertes, notamment :

1. sur la nature même de l'IBME, ses rapports avec l'IBSE,
2. sur la solidité des preuves invoquées pour affirmer l'efficacité de l'IBE,
3. sur ce qui est réellement disséminé à grande échelle à travers ces projets sous couvert d'IBME et d'IBSE, et son degré d'adéquation aux visions et intentions des concepteurs.

On pourrait en effet penser que, lorsque ces projets ont débuté, la première question était réglée, que la conceptualisation des approches que l'on souhaitait promouvoir était claire, que par ailleurs il existait des preuves incontestables de l'efficacité de l'IBE, et que les projets se dotaient de moyens efficaces de contrôle de ce qui allait être disséminé. La réalité est sensiblement différente. La participation à ces projets m'a montré que la conceptualisation de l'IBE, notamment pour ce qui concerne les mathématiques, était encore en chantier et y était un thème récurrent de réflexion [2], que le discours utilisé pour présenter l'IBL et l'IBE en mathématiques était souvent un discours qui avait migré depuis le champ des sciences de la nature et de la vie où il s'était initialement constitué sans que les éventuelles spécificités disciplinaires n'aient fait l'objet d'un travail approfondi. J'ai pu aussi percevoir que l'affirmation d'efficacité de l'IBE, même dans le champ des sciences où elle était mieux installée, reposait sur des bases moins solides que ce que d'aucuns affirmaient. La question préliminaire à résoudre pour pouvoir établir des liens convaincants, celle de la caractérisation du degré de proximité de pratiques décrites ou observées avec l'IBSE, restait elle-même partiellement ouverte malgré l'existence de diverses grilles. Enfin, malgré le sérieux avec lequel les projets ont été définis, les efforts manifestes faits pour essayer de contrôler les processus de dissémination engagés, pour recueillir des données permettant d'en évaluer l'impact et pour les traiter footnoteDans le projet Fibonacci, deux évaluateurs externes ont ainsi été contractés qui ont suivi l'ensemble du déroulement, assistant aux visites organisées entre les centres jumelés, aux différents séminaires et conférences, et en organisant l'évaluation, mettant également au point deux questionnaires passés en début et en fin de projet, destinés à apprécier l'impact des actions et formations organisées sur les représentations et pratiques des enseignants touchés, et analysant les réponses recueillies par les différents partenaires. Malgré la qualité de l'organisation de ce suivi, on a constaté des retours variables des questionnaires suivant les partenaires et une représentativité des réponses difficile à contrôler. Par ailleurs, les questionnaires ne donnent pas accès à la réalité des pratiques, simplement à du déclaratif sur ces pratiques et leur interprétation doit donc être faite avec prudence., j'ai aussi constaté que, dans ces projets axés sur la dissémination, ce qui primait c'était l' organisation et l'implémentation des multiples actions programmées, la réalisation des ambitieux objectifs quantitatifs fixés dans des conditions parfois difficiles (effets de la crise dans certains pays, absence de culture et structures de formation continue des enseignants. . .). Ceci se révélait difficilement compatible avec le travail important qu'aurait nécessité, tant pour sa conception que pour sa réalisation, une identification vraiment convaincante de ce qui était exactement disséminé via les formations et actions diverses développées par les différents partenaires, au-delà des traits de surface, quelles sciences et quelles mathématiques y étaient réellement engagées, avec quels effets résultants sur les représentations et pratiques des enseignants, sans même aller jusqu'à considérer les apprentissages des élèves.

En fait, ces projets, et ce n'est pas à mes yeux l'un de leurs moindres mérites, ont contribué à rendre ces questions et difficultés visibles, à les travailler et à progresser. Le nombre et la diversité

de mettre en place un vaste plan de formation continue pour les enseignants de Bavière.

2. Deux des thèmes communs de Fibonacci s'intitulaient dans le projet initial : Approfondissement des spécificités de l'investigation scientifique en mathématiques et Approfondissement des spécificités de l'investigation scientifique dans les sciences de la nature, et par ailleurs, le comité scientifique a produit deux documents intitulés respectivement Inquiry in Science Education et Inquiry in Mathematics Education.

des partenaires, des cultures et des contextes, a rendu ce travail incontournable, montrant clairement à quel point chacun entrait dans ces projets avec sa propre vision de l'IBE, marquée par son contexte éducatif et culturel, son expérience, sa discipline de référence, obligeant à confronter ces visions, à les questionner, pour aller au-delà d'un discours unificateur de façade.

Les programmes

La référence aux démarches d'investigation a aussi pénétré les textes curriculaires de différents pays. C'est le cas par exemple en France où l'introduction commune aux programmes du collège précise que :

« Dans la continuité de l'école primaire, les programmes du collège privilégient pour les disciplines scientifiques et la technologie une démarche d'investigation. Comme l'indiquent les modalités décrites ci-dessous, cette démarche n'est pas unique. Elle n'est pas non plus exclusive et tous les objets d'étude ne se prêtent pas également à sa mise en œuvre. Une présentation par l'enseignant est parfois nécessaire, mais elle ne doit pas, en général, constituer l'essentiel d'une séance dans le cadre d'une démarche qui privilégie la construction du savoir par l'élève. Il appartient au professeur de déterminer les sujets qui feront l'objet d'un exposé et ceux pour lesquels la mise en œuvre d'une démarche d'investigation est pertinente. »

Il est ensuite précisé que :

« Cette démarche s'appuie sur le questionnement des élèves sur le monde réel (en sciences expérimentales et en technologie) et sur la résolution de problèmes (en mathématiques). Les investigations réalisées avec l'aide du professeur, l'élaboration de réponses et la recherche d'-explications ou de justifications débouchent sur l'acquisition de connaissances, de compétences méthodologiques et sur la mise au point de savoir-faire techniques.»

Dans cette démarche, même s'il est souligné qu'il existe des différences entre les démarches d'investigation en sciences et mathématiques, notamment du fait de la nature des objets en jeu et des modes de validation, sept moments essentiels communs sont identifiés : le choix d'une situation problème (par l'enseignant) ; l'appropriation du problème par les élèves ; la formulation de conjectures, d'hypothèses explicatives, de protocoles possibles ; l'investigation ou la résolution du problème conduite par les élèves, l'échange argumenté autour des propositions élaborées ; l'acquisition et la structuration des connaissances ; la mobilisation des connaissances. Il est ajouté que :

« l'ordre dans lequel ils se succèdent ne constitue pas une trame à adopter de manière linéaire. En fonction des sujets, un aller et retour entre ces moments est tout à fait souhaitable, et le temps consacré à chacun doit être adapté au projet pédagogique de l'enseignant. »

Comme tendent à le montrer ces extraits, la description, bien que brève, évite la caricature mais ce qui est décrit et dénommé « démarche d'investigation », est loin d'être vraiment nouveau. On y retrouve des éléments familiers comme le terme de situation problème ou la répartition des rôles entre enseignants et élèves dans les différents moments de l'étude. L'on reconnaît des phases de la démarche d'investigation telle qu'usuellement présentée mais elles se combinent avec des descripteurs usuels tels que « acquisition, structuration et mobilisation de connaissances », dans un discours qui mêle des éléments relatifs aux sciences comme « la formulation d'hypothèses explicatives et de protocoles possibles », ou aux mathématiques comme « la formulation de conjectures ».

Là encore on peut légitimement se demander ce que signifie cette intégration des démarches d'investigation au discours curriculaire officiel. Faut-il y voir plus qu'un effet de conjoncture et l'intégration d'éléments du discours européen par la noosphère ? Qu'en attend-t-on exactement ? Comment est-il reçu, compris ?

Pour y voir plus clair, il n'est pas inutile de revenir aux sources de l'IBE et à son évolution historique. C'est ce que je vais brièvement faire dans la partie suivante en m'appuyant sur un travail réalisé en collaboration avec Morten Blomøj, un chercheur danois participant au projet Primas pour un article à paraître dans un numéro spécial de la revue ZDM, The International Journal on Mathematics Education sur les démarches d'investigation.

2.2.2 Aux sources des démarches d'investigation et de l'IBE

On peut trouver, comme nous le soulignons dans l'article mentionné ci-dessus, chez divers pédagogues, depuis le 18e siècle au moins, des approches pédagogiques qui ne sont pas sans présenter des similarités avec l'IBE, mais une référence dans ce domaine semble incontournable : celle du philosophe pragmatiste et éducateur américain John Dewey (1859-1952) pour qui le processus d'enquête (ou d'investigation) est à la base à la fois de la découverte et de l'apprentissage (Dewey, 1933). L'enquête pour Dewey se développe grâce à l'interaction entre un inconnu qui pose défi ou intrigue et du connu qui permet d'approcher cet inconnu, d'émettre des hypothèses, faire des inférences, de relier les faits à des expériences passées... Une fonction essentielle de l'éducation est alors d'organiser le champ d'expérience des élèves et le développement d'attitudes d'apprentissage basées sur une pratique d'enquête réflexive (Dewey, 1938). Elle doit viser à développer chez les élèves les habitudes de pensée sous-jacentes au processus d'enquête tout autant qu'à transmettre des savoirs. Et c'est ce qu'il met en pratique dans l'école laboratoire qui a été créée à l'université of Chicago.

Comme souligné dans (Fabre, 2009), le processus d'enquête tel que conceptualisé par Dewey, englobe la détermination de l'objet ou du problème sur lequel il porte. Il ne s'agit donc pas selon cette approche pédagogique d'enquêter seulement sur des questions ou de résoudre des problèmes posés par l'enseignant. Le processus combine raisonnement inductif et déductif, et il est de nature réflexive. Il concerne la vie courante, les pratiques professionnelles, les activités scientifiques, et ne change pas substantiellement de nature suivant ces différents contextes. On voit là une vision du développement de la connaissance scientifique en rupture avec celle que propose Gaston Bachelard dont l'épistémologie a fortement influencé les didacticiens des sciences et des mathématiques, notamment en France.

Dewey est un philosophe pragmatique, pour lui la validité des connaissances est d'abord assurée par leur efficacité pragmatique dans l'action, mais il insiste sur le fait que la prise de conscience de cette efficacité n'est pas suffisante à l'apprentissage, pour apprendre il faut accéder aux raisons de l'efficacité. Ce sont elles qui assureront la productivité future de l'expérience vécue. Un autre trait caractéristique de la pédagogie de Dewey est l'importance accordée aux situations de la vie réelle, aux activités manuelles, à l'expérience hors scolaire des élèves et il ne s'agit pas là uniquement de trouver une motivation externe au travail scolaire. L'Ecole de Dewey doit être ouverte sur le monde, le moyen de promouvoir un nouvel ordre social, elle se veut une école de la liberté et de la démocratie, comme en témoigne le titre de l'ouvrage qu'il publie en 1916 : *Education and Democracy.*

Les idées de Dewey rencontreront un écho certain mais les écoles dites « progressistes », qui se développent en donneront souvent une vision caricaturée suscitant de légitimes critiques, comme il le souligne lui-même dans (Dewey, 1938) : « ... *many of the newer schools tend to make little or nothing of organized subject matter of study ; to proceed as if any form of direction or guidance by adults was an invasion of individual freedom, and as if the idea that education should be concerned by the present and future meant that acquaintance with the past has little or no role to play in education.* » (p. 22)

Ceci le conduit à insister sur la difficulté de cette nouvelle voie pour l'éducation et la nécessité de la construire sur une philosophie approfondie de l'expérience, non sur le seul rejet des valeurs et méthodes de l'éducation traditionnelle comme c'est trop souvent le cas.

En dépit des dénaturations et des critiques, la vision d'une éducation plus ouverte et progressiste va faire son chemin sous des dénominations diverses tout au long du 20e siècle. S'agissant de la démarche d'investigation, un changement important intervient cependant en 1996 avec la publication des National Science Education Standards aux Etats-Unis qui promeuvent l' IBSE. L'investigation y est décrite de la façon suivante : « *L'investigation est une activité aux multiples facettes : faire des observations, poser des questions, examiner des livres et d'autres sources d'information pour savoir ce qui est déjà connu, planifier des recherches, utiliser des outils pour recueillir, analyser et interpréter des données, proposer des réponses, des explications, faire des prédictions, et communiquer les résultats. L'investigation requiert l'identification d'hypothèses, l'usage d'une pensée critique et logique, et la considération d'explications alternatives* »... « *L'investigation scientifique fait référence aux façons diverses qu'ont les scientifiques d'étudier le monde naturel et de proposer des explications basées sur les certitudes qui découlent de leur travail.* » (NRC, 1996, p. 23, notre traduction).

C'est cette vision de l'investigation que l'on retrouve dans de nombreux textes relatifs à l'IBSE, souvent accompagnée de schémas tendant à donner de la démarche une vision quasi-algorithmique. Le diagramme suivant, par exemple, synthétise la description détaillée de l'apprentissage via la démarche d'investigation en sciences faite dans le document Inquiry in Science Education produit dans le cadre du projet Fibonacci (Harlen, 2012).

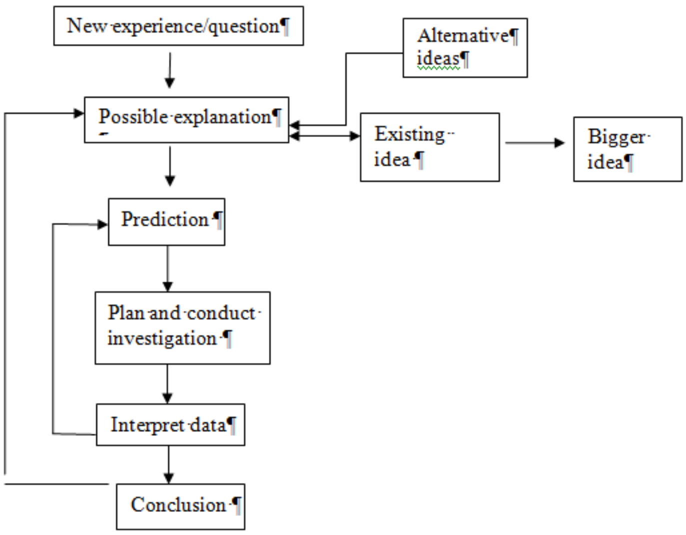


FIGURE 2.1 – Schéma de la démarche d'investigation en sciences (Harlen, 2012, p.5)

Précisons cependant que le texte accompagnant la construction progressive de ce diagramme insiste sur trois caractéristiques qu'un tel schéma peine à rendre visibles. La première concerne la nature cyclique du processus, la répétition nécessaire des expériences pour arriver à des conclusions solides et le fait que ces dernières sont souvent elles-mêmes sources de nouvelles questions. La deuxième est l'importance qui est attachée à la génération progressive de ce que les auteurs appellent de grandes notions ou notions clefs (« big ideas ») [3] :

« *Modéliser la construction de la compréhension de cette façon montre comment de « petites*

3. On pourra sur ce point se référer aussi à (Harlen, 2011)

idées » (celles qui s'appliquent à des observations particulières ou des expériences) se développent progressivement pour devenir de grandes notions (celles qui s'appliquent à un ensemble d'objets et de phénomènes). » (Harlen, 2012, p.5, notre traduction).

La troisième est la reconnaissance de l'existence de possibles obstacles dans les conceptions initiales des élèves :

« *Ce faisant, il est important de reconnaître, et de partir des idées que les élèves ont déjà, car si ces dernières sont simplement laissées de côté, les élèves continueront à se fier à elles parce que ce sont celles qu'ils ont développées eux-mêmes et celles qui font sens pour eux. On doit leur donner la possibilité de voir par eux-mêmes quelles idées sont le plus en accord avec l'évidence*[4] » (Harlen, 2012, p. 5, notre traduction).

Il est clair que la description qui précède de la démarche d'investigation en sciences, ne s'applique qu'imparfaitement aux mathématiques, comme le souligne le pendant pour les mathématiques du texte cité ci-dessus, dans Fibonacci (Artigue & Baptist, 2012). L'IBME y est définie globalement comme une approche de l'enseignement qui veut offrir aux élèves la possibilité d'expérimenter comment les connaissances mathématiques se développent à travers les efforts personnels et collectifs pour répondre à des questions qui concernent le monde. Il est souligné que :

« *comme l'investigation en sciences, l'investigation en mathématiques part d'une question ou d'un problème, et des réponses sont cherchées à travers observation et exploration ; des expériences mentales, matérielles ou virtuelles sont menées ; des connections sont faites avec des questions présentant des similarités intéressantes et auxquelles on a déjà répondu ; des techniques mathématiques connues sont mises en jeu et adaptées si nécessaire. Cette démarche d'investigation est pilotée par, ou conduit à des réponses hypothétiques, appelées souvent conjectures, que l'on cherche à prouver* » (p. 5, notre traduction)

Mais nous insistons aussi dans ce texte sur des différences qui nous paraissent essentielles, notamment celles liées :

- au fait que l'univers des questions est, pour les mathématiques bien plus large qu'il ne l'est pour les sciences de la nature. Il est à la fois interne aux mathématiques elles-mêmes, concernant les objets qui tels les nombres, les formes géométriques, les structures, deviennent progressivement des éléments du réel, et externe concernant non seulement les phénomènes naturels mais aujourd'hui quasiment tous les champs de l'activité humaine, accessibles à un travail mathématique via la modélisation ;
- au caractère particulièrement cumulatif des mathématiques comme science et au rôle essentiel que joue la résolution de problèmes internes aux mathématiques dans la progression et de la structuration de cette science ;
- à la diversité des formes d'enquête et d'expérimentation en mathématiques, et de leurs fonctions, non réductible aux modèles proposés par les sciences de la nature ;
- enfin aux formes de validation spécifiques propres à la rationalité mathématique, qui vise l'établissement de vérités apodictiques que l'expérience ne saurait remettre en cause, même si lorsque les questions initiales sont externes aux mathématiques et que la recherche de réponses engage un processus de modélisation, la rationalité proprement mathématique doit à certains moments se combiner avec d'autres formes de rationalité.

Si l'on se réfère à ce qui précède, on conçoit bien qu'au-delà de l'élucidation de la nature de l'investigation en sciences et en mathématiques, et de la réflexion sur ses transpositions possibles avec des élèves dans une perspective d'apprentissage, conceptualiser l'IBME, c'est aussi prendre en charge théoriquement les valeurs que porte l'IBME depuis ses origines en termes d'émancipation et de démocratie, de développement de l'autonomie, de relations entre les acteurs de l'école,

4. Le mot évidence doit être pris ici avec le sens d'évidence conférée par une preuve scientifique.

entre l'école et son environnement, et que ces valeurs qui vont affecter :

- le champ des questions reconnues comme pertinentes ;
- la manière de les traiter ;
- la façon d'envisager les relations entre les différents acteurs de l'enquête au sein de la classe, de l'école et bien sûr au-delà de l'école.

C'est, me semble-t-il, ce qu'essaie de refléter la représentation multidimensionnelle et non hiérarchisée des ingrédients essentiels de l'IBE sur laquelle se sont mis d'accord les partenaires du projet Primas, reproduite ci-après. Elle est structurée autour de cinq composantes qui concernent respectivement ce que l'on attend de cette éducation, l'accompagnement de l'enseignant, la culture de la classe, les types de questions, l'activité des élèves. Pour chacune de ces dimensions, un petit nombre de points clefs sont mentionnés. On en reste cependant ici à un niveau de description global où par exemple les spécificités des épistémologies disciplinaires ne sont pas visibles.

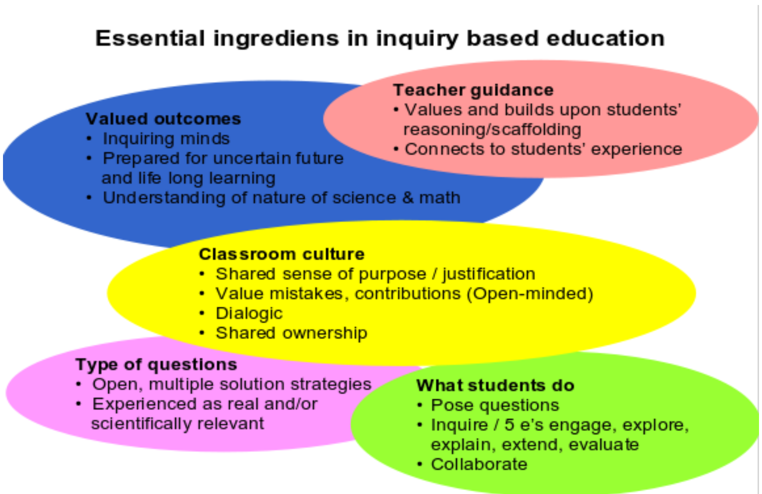


FIGURE 2.2 – Les ingrédients essentiels de l'IBE dans le projet Primas

Remonter aux sources de l'IBE nous a permis, dans cette partie, de mieux circonscrire le réseau de conditions et contraintes dans lequel s'inscrit la migration vers les mathématiques que nous observons aujourd'hui. Mais cette migration ne s'effectue pas vers un monde inhabité. Les mathématiques, au contraire des sciences, sont une des disciplines majeures de l'enseignement dès les débuts de la scolarité, une discipline dont l'enseignement est depuis longtemps objet de réflexions et de travaux. Ce n'est pas un hasard si la Commission internationale de l'enseignement mathématique, aujourd'hui connue sous le nom d'ICMI, a été la première de ce type à être créée, en 1908, ni si elle est encore aujourd'hui la plus active. Envisager la migration vers le champ des mathématiques de l'IBE et des discours associés, ne peut s'effectuer raisonnablement et sans danger en faisant abstraction des efforts déployés depuis des décennies pour comprendre et améliorer les processus d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques, en faisant abstraction de ce que ces efforts nous ont appris, tant par leurs réussites que par leurs échecs. Pour penser ce que peut-être l'IBME, ce qu'une telle forme d'éducation peut apporter et les conditions à réaliser pour ce faire, la recherche didactique existante offre en fait des appuis multiples. C'est à ces appuis que sera consacrée la dernière partie de ce texte.

2.2.3 IBME : quels appuis dans la recherche didactique existante en mathématiques

Lorsque l'on examine l'histoire de la recherche didactique, on ne peut manquer de constater que les principales approches qui ont été développées dans ce champ, partagent toutes, malgré leur diversité, beaucoup de valeurs de l'IBE. Dans l'article écrit avec Morten Blomøj, sans prétendre à l'exhaustivité, nous en avons considéré huit qui nous semblaient refléter la richesse et la diversité des constructions du champ didactique, des appuis qu'elles étaient susceptibles de fournir, des questionnements qu'elle pouvaient soutenir et éclairer. Certaines de ces constructions sont anciennes, d'autres d'apparition plus récente, les réalisations dont elles se sont nourries ou qu'elles ont inspirées sont d'ampleur inégale mais dépassent toutes les frontières d'un unique système éducatif. Elles aident aussi à prendre la mesure de la diversité des cultures didactiques qui se mêlent dans des projets européens tels que Fibonacci et Primas, et de l'importance d'un travail approfondi si l'on veut arriver à une idée claire de ce que sous-tend, pour les uns et les autres, l'usage d'une terminologie commune. Sans reprendre l'analyse détaillée dans l'article cité, je vais essayer de pointer quelques caractéristiques essentielles de chacune d'entre elles par rapport au propos de ce texte.

La première envisagée dans l'article est celle de la résolution de problèmes, plus connue sous son appellation anglaise de « Problem Solving ». Elle s'imposait par son ancienneté, l'ouvrage fondateur de Georges Polya, *How to solve it ?* datant de 1945, mais aussi parce que c'est via cette tradition que le rapport Rocard intègre les mathématiques, hésitant, visiblement, à parler à propos de ces dernières de démarche d'investigation. L'étiquette *Problem Solving* recouvre en fait elle-même une diversité de travaux. Dans certains, l'accent est mis sur le développement de compétences de résolution de problèmes, la métacognition, ce qui peut être rapproché du développement « d'inquiry habits of mind », prôné par Dewey (Schoenfeld, 1992). Ceci conduit souvent à privilégier dans le choix des problèmes proposés aux élèves l'originalité, la nouveauté, le caractère de défi, plutôt que la contribution à la construction des concepts mathématiques, et à situer cette résolution de problèmes en phase d' application, après l'introduction des notions concernées. Mais, de plus en plus, d'autres travaux se réclamant de cette approche envisagent aussi, comme le souligne Cai (2010), une vision du Problem solving où la résolution de problèmes est à la source du processus d'apprentissage, proposant des conditions pour le choix des problèmes (ils doivent être ouverts, admettre plusieurs solutions et/ou démarches de résolution, mais aussi permettre d'apprendre et comprendre des aspects importants d'un concept ou d'une notion) et des scénarios d'implémentation combinant recherche autonome des élèves guidée par l'enseignant, partage et discussion collective des stratégies et solutions, synthèse et mise en relief des éléments importants par l'enseignant (cf. aussi Hiebert & al., 1996).

Une telle conception du Problem solving se rapproche en fait de constructions qui ont émergé en Europe, dès la fin des années soixante et dans l'article, nous en considérons deux emblématiques : la TSD (Théorie des situations didactiques) qui a émergé en France portée par Guy Brousseau (1997) et l'approche RME (Realistic Mathematics Education) qui a émergé au Pays Bas, portée par Hans Freudenthal (Freudenthal, 1983). Pour ces deux approches, la résolution de problèmes est effectivement au cœur de l'apprentissage mais l'accent est mis sur la recherche de problèmes qui expriment l'épistémologie des notions, et l'organisation de l'avancée des connaissances au fil de la progression des problèmes (cf. par exemple la longue ingénierie développée par Guy et Nadine Brousseau pour l'extension du champ des nombres à l'école élémentaire (Brousseau & Brousseau, 1987)). Ce n'est pas un hasard si la notion de situation fondamentale jour un rôle clef dans la TDS et si le choix des problèmes et variables didactiques associées vise à faire que la solution mathématique attendue s'impose à l'élève comme solution optimale au problème posé.

Les deux constructions sont cependant sensiblement différentes et, en particulier, comme l'indique l'acronyme RME, l'accent est mis dans cette approche phénoménologique sur la nécessité de partir de problèmes renvoyant au vécu des élèves (ceci incluant le vécu mathématique mais ne s'y limitant pas), et donc aux processus de modélisation, avec la distinction effectuée entre modélisations horizontale et verticale (Gravemeijer, 1999), associée à l'idée de modèles qui d'outils d'étude deviennent objet d'étude pour reprendre le langage de la dialectique outil-objet (Douady, 1986).

On notera cependant que, dans les approches mentionnées jusqu'ici, la responsabilité accordée aux élèves dans le choix des problèmes, qui doivent remplir des conditions précises pour permettre les apprentissages visés, reste le plus souvent très limitée voire nulle.

C'est certainement moins le cas dans les approches en termes de modélisation qui considèrent essentiel le lien avec le monde externe aux mathématiques (Blum, Galbraith, Henn & Niss, 2007). On y retrouve la tension déjà mentionnée pour le Problem solving, entre des travaux où l'accent est mis en priorité sur le développement de compétences de modélisation, avec une responsabilisation de l'élève dans toutes les phases du cycle de modélisation (Blomhøj & Højgaard Jensen, 2003), et des travaux où l'approche modélisante est mise au service d'apprentissages mathématiques précis à travers le choix de problèmes et questions adaptés, comme cela peut être le cas dans l'approche RME évoquée ci-dessus. A travers l'accent mis sur les connections avec le monde externe, ce sont aussi des questions de société qui émergent dans le travail mathématique, et ce n'est donc pas un hasard si l'on voit là s'exprimer plus directement les ambitions de contribution de l'éducation mathématique à la citoyenneté et à la démocratie. Celle-ci devient centrale dans les approches critiques qui donnent à l'éducation une fonction de questionnement du fonctionnement de nos sociétés et de l'école elle-même comme institution, et pour lesquelles les mathématiques doivent être mises au service de cette visée (Alrø & Skovsmose, 2002).

Les appuis potentiels ne se bornent pas à ces constructions. Les approches socio-culturelles, de façon générale, attirent notre attention sur la dimension sociale et culturelle du processus d'enquête, sur l'importance à accorder à la façon dont est organisée la collaboration au sein des communautés engagées, sur l'importance des interactions dialogiques entre élèves comme entre enseignants et élèves (Bakhtin, 1981). Ce n'est pas un hasard si la conférence plénière de la rencontre Fibonacci centrée sur les rapports entre recherche et pratique confiée à Babara Jaworski portait sur la notion de communauté d'investigation (Jaworski, 2003, 2004).

Dans la dernière approche que je vais évoquer, la TAD (Théorie anthropologique du didactique), beaucoup des sensibilités que j'ai mentionnées jusqu'ici trouvent à s'exprimer, notamment à travers la notion de PER (Parcours d'étude et de recherche), suivant que l'on considère des PER finalisés où le questionnement et ses rebondissements visent un objectif précis, ou des PER ouverts, où c'est la question initiale et son potentiel a priori qui priment sans que l'on puisse exactement dire quel chemin précis va prendre le processus d'enquête, ni où il va mener le collectif d'étude formé de l'enseignant et des élèves (Chevallard, 2011). Dans celles provenant de l'Internet, mais aussi la responsabilité de l'Ecole dans la soumission de ces informations à la critique. Je n'insisterai pas plus, renvoyant à la contribution d'Yves Matheron sur ce thème à de précédentes journées de l'IFé et aux travaux de l'équipe AMPERES (Matheron, 2010).

Malgré sa brieveté, la description qui précède aura montré j'espère que, même si la terminologie des démarches d'investigation et de l'IBE n'est pas utilisée, la didactique des mathématiques a développé de nombreuses approches qui visent à outiller conceptuellement et pratiquement un enseignement des mathématiques qui ne se limite pas à la transmission d'un ensemble de résultats et de techniques, et à l'entraînement à leur usage pour résoudre un certain nombre de problèmes. Elles visent à faire apparaître les constructions mathématiques pour ce qu'elles sont :

des réponses à des questions, à des problèmes, dans des transpositions qui font sens pour les élèves et sont respectueuses de l'épistémologie des concepts, leur donner le goût et la capacité de rechercher de telles réponses pour les problèmes qui se posent à eux, dans et hors de l'Ecole, de développer les moyens d'évaluer et critiquer celles fournies par les médias et la culture. Elles visent aussi à cultiver la dimension sociale et collective de l' apprentissage, les valeurs d'échange et de solidarité.

Mais, comme j'ai essayé de le faire sentir, aucune de ces approches ne donne le même poids à toutes ces dimensions. Elles construisent des hiérarchies de sensibilités différentes :

- à l'authenticité des questions et de l'activité des élèves dans leurs rapports avec le monde extérieur à l'école ;
- à la pertinence épistémologique des questions et au caractère cumulatif des mathématiques. ;
- à la progression des connaissances en relation avec le curriculum ;
- aux questions extra-mathématiques et à la modélisation ;
- à la dimension expérimentale des mathématiques et à l'appui technologique à cette dimension ;
- au développement de modes de pensée et de compétences de résolution de problèmes et de recherche ;
- à l'autonomie et la responsabilité des élèves, de la formulation de questions à la production et validation de réponses ;
- au rôle de guide de l'enseignant et aux interactions dialogiques entre élèves et enseignant ;
- à la dimension collaborative du processus d'investigation ;
- à la dimension critique et émancipatrice du processus d'investigation.

Ces différences dans les hiérarchies de sensibilités conduisent naturellement à des stratégies d'enseignement différentes et dont les logiques ne sont pas nécessairement conciliables. Nous ne pouvons développer ici ce point essentiel et nous bornons à présenter en annexe deux situations qui visiblement répondent à des hiérarchies différentes de sensibilités, mais il est important d'en être conscient. Le désir de fournir une réponse unique, unificatrice ou privilégiant une de ces approches, nous conduirait nécessairement soit à établir un artificiel dénominateur commun dans lequel certaines approches au moins perdraient ce qui fait leur logique interne et leur force, soit à imposer une vision dans une forme d'impérialisme culturel. Il me semble plus utile, aujourd'hui au moins, de respecter cette diversité, en y voyant un moyen d'attirer notre attention sur des facettes de l'IBME que nous pourrions avoir tendance à négliger, faute d'une sensibilité suffisante et d'un outillage conceptuel adapté dans notre propre culture didactique. Il me semble important de mettre nos forces au service d'un besoin bien plus crucial : en s'appuyant sur connaissances et expériences, éviter que démarches d'investigation et IBME ne devienne un slogan éducatif de plus qui, dès lors que les changements attendus ne seront pas constatés, sera rejeté aussi rapidement qu'il a été promu par la sphère politique au profit d'un autre slogan, ou d'un de ces retours de balancier désastreux dont les systèmes éducatifs sont coutumiers. Or les évaluations en cours des projets européens confirment bien que, même si l'on observe des évolutions prometteuses de représentations et de pratiques, d'une part il ne s'agit pas d'évolutions spectaculaires, d'autre part leur résistance à l'achèvement des projets n'est pas assurée même si les réseaux constitués et les ressources développées devraient y aider. L'IFé, à travers les nombreux projets qu'il soutient et actions qu'il développe dans la durée peut, sans aucun doute, y contribuer substantiellement. Préparant cet exposé, je me suis d'ailleurs demandé comment se situaient les projets e-colab, Exprime, CDAmperes, Dream, Edumatics par rapport aux différentes sensibilités mentionnées plus haut, et quelles leçons on pouvait tirer de chacun d'eux séparément et d'eux tous collectivement en ce qui concerne l'IBME. Une question que je laisse ouverte...

Références

Aldon, G., Cahuet, P.Y., Durand-Guerrier, V. Front, M., Krieger, D., Mizony, M., Tardy, C. (2010). *Expérimenter des problèmes innovants en mathématiques à l'école.* Lyon : INRP.

Alrø, H. & Skovsmose, O. (2002). *Dialogue and learning in mathematics education : Intention, reflection, critique.* Dordrecht : Kluwer.

Artigue, M., Baptist, P. (2012). *Inquiry in Mathematics Education.* http ://www.fibonacci-project.eu (page Resources)

Artigue, M., Blomhøj, M. (à paraître). *Conceptualization of inquiry based education in mathematics.* ZDM, The International Journal on Mathematics Education

Bakhtin, M. (1981). *The dialogic imagination : Four essays by M.M. Bakhtin* (M. Holquist & C. Emerson transl.). Austin : University of Texas Press.

Blomhøj, M., Højgaard Jensen, T. (2003) : Developing mathematical modelling competence : Conceptual clarification and educational planning, *Teaching Mathematics and its applications* 22 (3), pp. 123-139.

Blum, W., Galbraith, P., Henn, H-W. & Niss, M. (Eds.) (2007)., *Modelling and applications in mathematics education.* The 14th ICMI Study. New York : Springer.

Brousseau G., Brousseau N. (1987) *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire.* I.R.E.M. de Bordeaux.

Brousseau, G. (1997). *Théorie des situations didactiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Cai. J. (2010). Commentary on Problem Solving Heuristics, Affect, and Discrete Mathematics : A Representational Discussion. In Sriraman B., English L. (Eds.). *Theories of Mathematics Education*, New York : Springer.

Chevallard, Y. (2002) Organiser l'étude 3. Écologie & régulation. In Dorier J.-L., Artaud M., Artigue M., Berthelot R., Floris R. (Eds.) *Actes de la 11e école de didactique des mathématiques* (pp.41-56). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2011). La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. In Margolinas, C., Abboud-Blanchard, M., Bueno-Ravel, L., Douek, N., Fluckiger, A., Gibel, P., Vandebrouck F. & Wozniak F. (Eds.). *En amont et en aval des ingénieries didactiques*, pp. 81-108. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Dewey, J. (1926). *Democracy and education.* New York : Macmillan.

Dewey, J. (1933). *How we think : A restatement of the relation of reflective thinking to the educative process.* Boston : Heath.

Dewey, J. (1938). *Experience & Education.* The Kappa Delta Pi Lecture Series. New York : Touchstone Edition (1997).

Dorier J.L. (coord.)(2012). *PRIMAS context analysis for the implementation of IBL : international synthesis report.* http ://www.primas-project.eu (page Reports and Deliverables)

Douady, R. (1986). *Jeux de cadres et dialectique outil-objet.* Recherches en Didactique des Mathématiques, 7/2, 5-32.

ERMEL (1999). *Vrai ? Faux ?... On en débat !* Paris : INRP.

Fabre M. (2009). *Philosophie et pédagogie du problème.* Paris : Librairie J. Vrin.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K. (1999). *How emergent models may foster the constitution of formal mathematics.* Mathematical Thinking and Learning, 1, 155-177.

Harlen, W. (Coord.) (2011). *10 notions-clés pour enseigner les sciences de la maternelle à la 3e.* Paris : Editions Le Pommier.

Harlen, W. (2012). *Inquiry in Science Education.* http ://www.fibonacci-project.eu (page Resources)

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K., Human, P., Murray, H., Olivier, A. & Wearne, D. (1996) : *Problem Solving as a Basis for Reform in Curriculum and Instruction : The Case of Mathematics.* Educational Researcher, vol 25, 4, 12-21.

Jaworski, B. (2003). *Research practice into/influencing mathematics teaching and learning development : Towards a theoretical framework based on co-learning partnerships.* Educational Studies in Mathematics 54 : 249-282.

Jaworski, B. (2004). *Grappling with complexity : co-learning in inquiry communities in mathematics teaching development.* Plenary address at PME 28.

Matheron Y. (2010). *Démarche d'investigation et Parcours d'Etude et de Recherche en mathématiques : entre injonctions institutionnelles et étude raisonnée des conditions et contraintes de viabilité au sein du système.* Lyon : INRP.

National Research Council (1996). *National science education standards.* Washington, DC : National Academy Press.

National Research Council (2000). *Inquiry and the national science education standards.* Washington, DC : National Academy Press.

Polya G. (1945). *How to Solve it ?* Princeton University Press.

Rocard M, Csermely P., Jorde D., Lenzen D., Walberg-Henriksson H. & Hemmo V. (2007). *L'enseignement scientifique aujourd'hui : une pédagogie renouvelée pour l'avenir de l'Europe.* Commission Européenne, Direction générale de la recherche, Science, économie et société.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically : Problem solving, meta-cognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York : MacMillan, 334-370.

Annexe : deux situations contrastées

Situation 1 : la question du plus grand produit

On retrouve dans différentes publications. Expérimenté d'abord par le groupe ERMEL de l'INRP à l'école élémentaire (ERMEL, 1999), il a été repris dans le projet Exprime et exploité à différents niveaux d'enseignement et en formation d'enseignants (Aldon & al., 2010). Indépendamment de cela, il a été utilisé dans le projet norvégien LCM (Learning Communities in Mathematics) dans une communauté d'investigation regroupant enseignants et chercheurs (Jaworski, 2003)

Le problème : n considère un entier positif N (par exemple N=10)

On le décompose en somme d'entiers positifs (par exemple 10=6+4, 10= 5+3+2)

A chaque décomposition, on associe le produit des termes de la somme (par exemple 6×4, $5 \times 3 \times 2$ pour les décompositions ci-dessus)

A quelle décomposition correspond le plus grand produit ?

Peut-on généraliser ?

Nous reproduisons ci-après en la traduisant la présentation faite dans le document Fibonacci (Inquiry in Mathematics Education) :

« Choisissons le nombre 10. S'il est décomposé en somme de deux entiers, une exploration exhaustive est facile. On peut aisément conclure que le plus grand produit est obtenu avec la décomposition équilibrée 10=5+5, conduisant au produit $5 \times 5 = 25$. Cette conjecture est souvent faite précocement, avant qu'une recherche systématique ait été engagée.

Néanmoins, la conjecture 5+5 ne résiste pas quand 10 est décomposé en somme de trois nombres (par exemple 10=5+3+2, ce qui conduit au produit $5 \times 3 \times 2 = 30$). Dans ce cas, une exploration exhaustive demande de considérer de nombreux cas, et elle ne résout pas le problème, puisque 10 peut être décomposé en plus de trois nombres.

Ainsi s'engage un processus dialectique incluant des essais et l'élaboration progressive de résultats partiels et conjectures. Par exemple, on peut trouver assez vite qu'une décomposition optimale ne peut contenir le nombre 1, ni le nombre 5 (parce que $3 \times 2 = 6$). Ce type de raisonnement permet d'exclure tous les nombres différents de 2, 3 et 4. On peut aussi remarquer que $3 \times 3 > 2 \times 2 \times 2$ et que, dans toute décomposition, 4 peut être remplacé par deux nombres 2 (car $4 = 2 + 2 = 2 \times 2$). On obtient finalement deux décompositions optimales 10=3+3+4 et 10=3+3+2+2, conduisant toutes les deux au produit 36.

En fait, le travail effectué sur ce cas particulier, s'applique au cas de n'importe quel nombre entier, les décompositions optimales étant celles contenant le maximum de nombres 3 mais pas le nombre 1. Il se généralise aussi aux décompositions rationnelles, comme montré par exemple par Perrin (ERMEL, 1996). Dans ce cas, si n est le nombre de termes de la décomposition du nombre S, une propriété de convexité conduit au fait que la décomposition optimale est la décomposition équilibrée en n termes de valeur S/n. On est alors conduit à chercher le maximum de la fonction de n : $(S/n)^n$. En prolongeant cette fonction aux nombres réels et en calculant sa dérivée, on trouve que le maximum de cette fonction est obtenu pour $x = S/e$, et on en déduit que la décomposition rationnelle optimale est celle obtenue avec S/n le plus proche possible de e. Ceci donne un nouvel éclairage sur le résultat obtenu pour $n = 10$ et généralisé ensuite à tous les entiers. 3 est l'entier le plus proche de e ! »

Dans le texte, nous soulignons ensuite le potentiel d'un tel problème pour montrer ce qu'est une démarche d'investigation en mathématiques et ce qu'elle peut produire :

- le rôle joué par l'exploration et sa progressive organisation au fur et à mesure que la familiarité avec le problème augmente ;
- le caractère pragmatique de l'enquête et sa non linéarité ;
- le jeu dialectique entre preuve et réfutation, et le rôle joué par les contre-exemples ;
- la nature définitive (apodictique) des résultats obtenus, mais aussi la satisfaction intellectuelle quand on découvre de nouvelles raisons au résultat obtenu ;
- le désir immédiat de généralisation, portant à la fois sur le résultat et les techniques utilisées ;
- le changement de vision et d'outils que ces généralisations peuvent nécessiter et les nouvelles compréhensions associées.

Il s'agit là d'un problème dont la résolution est susceptible de mettre en jeu des caractéristiques importantes de la démarche d'investigation et peut donc contribuer au développement des compétences associées. Et c'est ce qu'ont confirmé les expérimentations menées. C'est aussi un problème qui permet de travailler des notions au programme dans le domaine des nombres et des opérations, avec des implications différentes en termes de connaissances suivant les niveaux d'enseignement, comme bien souligné dans le cédérom Exprime. Mais c'est aussi un problème qui n'a pas vocation à jouer un rôle clef dans une progression. Il est intéressant de ce point de vue de comparer cette situation avec la situation bien connue du puzzle de Brousseau. Il aura plus tendance, de ce fait, à être vécu comme un objet isolé.

Un deuxième exemple : Étude de risques : le cas de la salmonellose (Alrø & Skovsmose 2002)

Cette situation est présentée à titre d'exemple d'approche critique dans l'article cité écrit avec Blomøj. Il s'agit de la simulation d'une situation réelle vécue au Danemark d'œufs infectés par des salmonelles.

Diverses questions vont être posées et travaillées par les élèves : que faire pour estimer le taux d'infection ? Quelles décisions prendre ? Quelle est la probabilité qu'un plat fabriqué avec un certain nombre d'œufs soit contaminé ? A-t-on plus de chances d'être contaminé en mangeant une crème dans un mariage de 100 personnes ou en mangeant une crème analogue préparée pour 6 personnes ?

Les mathématiques sous-jacentes, on le voit, sont les probabilités élémentaires. Mais elles interviennent ici dans un contexte de risque où les conséquences des décisions prises sur la base de calculs de probabilités peuvent être graves. Et c'est aussi cet aspect du problème qui est enjeu de l'enseignement.

Le potentiel pour l'IBME de cette situation est réel mais très différent de celui de la précédente : le questionnement initial est amené par l'enseignant mais celui-ci est ouvert à des apports des élèves ; il est issu d'une situation réelle et pose des questions socialement vives liées au risque et à la sécurité alimentaire ; une grande autonomie est donnée aux élèves dans l'appropriation de la situation, la recherche d'information, la méthodologie de l'enquête ; un travail de modélisation est nécessaire mettant en jeu des modèles probabilistes et montrant l'utilité de tels modèles.

Mais il s'agit là une situation complexe, nécessitant plusieurs séances, et un traitement par les élèves dont il ne sera pas forcément évident de réguler la pertinence, comme le montre le court extrait de dialogue ci-après.

S1 :. . . I don't think we should take any samples.
S2 : No . . . we could just save the money.
S3 : Would you just sell the eggs ?
S1 : Yes, we can not be sure any way. So why not just sell a lot of cheap eggs ?
S2 :. . . and get very rich.
S3 : Oh you are wicked. . . what if some gets salmonella infected !
S4 : At least one can be a bit sure with samples. . .
S2 : Right, then we should take two samples [of ten eggs each] This will cost twenty kroner.
S1 : No. . . the eggs also cost 0,50 kroner.
S3 : Would you then just write "Tested" on the declaration ?
S4 : Then, I will not buy any of those eggs.
S2 : Yes, . . . then we just write : "Tested for salmonella".
S3 : God knows if anybody is doing this.
S1 : Don't you think that is illegal ?

2.3 Contribution à l'étude de la culture scolaire

Exemples de deux environnements pour l'enseignement des mathématiques

Jarmila Novotná,
Université Charles, Faculté de Pédagogie, Prague ;
LACES, Univ. Bordeaux 2, EA 41401 [5]

2.3.1 Introduction

Cet exposé se centrera sur l'analyse du point de vue de la théorie des situations (Brousseau, 1998) de deux ingénieries didactiques dans la préparation des situations d'enseignement. Nous nous proposons ici de comparer et d'analyser deux situations et d'examiner leur zone de convergence.

La première situation vise la construction d'une culture scolaire des élèves (Brousseau, Novotná, 2008), (Novotná, 2009). Cette recherche a été initialement développée dans le cadre d'une coopération entre un groupe de recherche pragois (Université Charles, Faculté de Pédagogie) et un groupe bordelais (Université Bordeaux Segalen, LACES). Nous sommes partis du constat selon lequel les problèmes sont vécus par les professeurs mais aussi par les élèves comme des épreuves pour contrôler leurs acquisitions et plus rarement comme des occasions d'apprendre des mathématiques. Les erreurs sont considérées comme des manifestations des connaissances des élèves, même parfois comme des indices de leur échec. En conséquence, les élèves considèrent souvent les problèmes comme les instruments d'évaluation au détriment d'une occasion d'apprendre des mathématiques. Cette recherche visait à opérer un renversement de cette conception en recentrant l'activité du professeur et celle des élèves sur les problèmes eux-mêmes afin de développer chez les élèves une culture « vivante » des problèmes, d'en faire des « connaisseurs de problèmes » afin qu'ils considèrent les problèmes comme des instruments nécessaires à leur apprentissage et connaissance des occasions de visiter collectivement certaines contrées des mathématiques. (cf. Novotná, 2009).

La seconde situation concerne les Technologies de l'Information et de la Communication pour l'Enseignement (TICE) pour l'apprentissage des fonctions et plus spécifiquement sur leur rôle comme instruments de modélisation ; si l'usage didactique de l'informatique est devenu un des sujets les plus discutés dans la communauté internationale, après des décades depuis son introduction dans les classes, beaucoup de questions relatives à l'apprentissage restent encore sans réponse (Cox, Marshall, 2007). Cette recherche s'inscrit dans le cadre d'un projet européen EdUmatics mené en coopération entre un groupe pragois (Université Charles, Faculté de Pédagogie) et un groupe parisien (Université Paris - Diderot).

2.3.2 Modèle mathématique du problème

Cette notion est souvent utilisée dans la littérature mais elle est rarement définie. Nous en proposons deux définitions qui nous paraissent adaptées à notre perspective :

5. Le travail présenté dans cet article est fait en coopération avec Guy Brousseau, Bernard Sarrazy (LACES), Antonín Jančařík (Université Charles, Faculté de Pédagogie, et le team de Module 3, EdUmatics, - European Development for the Use of Mathematics Technology in Classrooms, 503254-LLP-1-2009-1-UK-COMENIUS-CMP (Michèle Artigue, Fabrice Vandebrouck, Claire Cazes, Françoise Hérault, Gilles Marbeuf).

– Un modèle mathématique est une traduction d'une réalité adaptée à certains outils, techniques et théories mathématiques ; réciproquement, il permet la traduction des résultats mathématiques dans le monde réel. Un modèle est pertinent s'il couvre bien le champ du problème réel, s'il permet d'obtenir le résultat escompté (description du phénomène avec le niveau de détail ou de synthèse souhaité, ou prévisions se révélant justes a posteriori, dans le délai souhaité et s'il est réutilisable). [6]
– Le processus d'identification d'une partie de la réalité procède d'un mouvement allant de la totalité non-analysée vers une séparation de certains éléments, et consiste à examiner leurs relations (binaires, ternaires) et leurs propriétés ; il est alors possible de décrire cette partie de la réalité dans un langage qui utilise un ensemble de constantes (étiquetage des éléments) et de relations. Nous appelons cette description un « modèle de la réalité ». Ce modèle de la réalité est déterminé par une trinité ordonnée [K, R, V], où K est l'ensemble de symboles que nous utilisons pour étiqueter les objets de la partie de la réalité, R est l'ensemble de relations correspondantes avec les relations discernées, V est l'ensemble des propositions des propriétés de la réalité que nous déjà connaissons, formulées dans un langage pertinent. (Kuřina, 1989)

Mais comment introduire les élèves la culture telle que nous l'avons définie plus haut sans la leur enseigner directement ? L'écueil du glissement méta-didactique [7] est ici tout à fait patent : il est en effet possible que le professeur puisse enseigner le modèle mathématique à la place des connaissances et savoirs utiles pour la résolution. La question centrale du projet est suivante : dans quelle mesure cette approche a un effet bénéfique non seulement sur les dispositions des élèves à l'égard des problèmes mais évidemment aussi sur leurs connaissances et sur leurs capacités à résoudre des problèmes et, dans l'affirmative, à quel prix ?

L'organisation des activités [8]

Le protocole expérimental est structuré en cinq phases qui se développent dans la façon suivante :

La première vise à réunir les conditions de transformation des rapports des élèves aux problèmes de mathématiques : du problème conçu comme un instrument d'évaluation au problème comme un objet d'évaluation par les élèves.

Les activités qui suivent sont centrées sur les conditions de prise de conscience par les élèves des similarités et des différences mathématiques entre les problèmes qu'ils ont à résoudre. Il s'agit pour les élèves d'agréger des problèmes à des catégories de problèmes en tenant compte de l'organisation de la solution et des opérations mathématiques à effectuer.

Les activités finales ont pour but de transformer la culture des problèmes en se centrant sur l'attention des élèves aux modèles mathématiques des problèmes et leurs similitudes.

Nous décrivons maintenant les cinq phases telles qu'elles ont été réalisées depuis l'année scolaire 2008/2009 dans les écoles tchèques et slovaques avec les élèves de l'âge 12-15 ans. L'organisation dans toutes les classes était la même, seuls différaient les problèmes utilisés et le

6. http ://fr.wikipedia.org/

7. Cet effet de contrat consiste en un remplacement d'une connaissance par un de ses modèles, par une description en métalangage (Brousseau, 1998). Les glissements méta-didactiques peuvent prendre des formes différentes ; ils peuvent se présenter comme une heuristique, comme des moyens mnémotechniques, ils peuvent se manifester par l'utilisation des métaphores, ou par l'enseignement de la résolution elle-même (d'un algorithme) (Sarrazy, 1997).

8. Remerciements : La recherche a commencé en 2006 par G. Brousseau et J. Novotná. Actuellement l'équipe est composé de G. Brousseau and B. Sarrazy de l'université de Bordeaux 2, J. Novotná de l'Université Charles, et les professeurs suivants : A. Pelantová and P. Švrčková (Basic School Na Slovance), J. Bureš (Gymnázium Jana Nerudy, Prague), H. Nováková (Gymnázium Josefská, Prague), L. Tejkalová (Lauderovy školy, Prague) et H. Tichá (Bratislava, Slovaquie).

domaine mathématique considéré.

1ère phase (pour plus de détails, voir Brousseau, Novotná, 2008)

Ici il s'agit de savoir s'il y a ou non accord des élèves dans des rangements des problèmes selon différents critères : difficulté, longueur de l'énoncé, longueur de la résolution, intérêt, clarté, utilité ? Est-ce que les élèves perçoivent (de façon peut être implicite) certains caractères « non-scolaires » des problèmes qui leur sont proposés ?

Le critère de longueur de l'énoncé est un seul critère objectif parmi les six critères. La difficulté des problèmes est un des critères retenus qui devrait apparaître le plus fréquemment aussi bien dans le discours du professeur que dans celui des élèves. L'intérêt d'un problème est un critère dépendant de l'orientation des intérêts de chaque élève. Le sens de l'utilité d'un problème joue sans doute un rôle utile mais faible. La clarté est aussi un critère subjectif. Le critère de longueur de la résolution a été ajouté récemment pour évaluer le type de rapport des élèves à la résolution elle-même (soit les élèves se limitent à appliquer les algorithmes enseignés, soit ils cherchent à conceptualiser le problème et à construire leurs propres algorithmes). Notons enfin qu'un accord significatif sur un rangement pour une variable donnée signifie que les élèves sont sensibles à cette variable.

Déroulement

Dans chaque classe, le professeur choisi cinq problèmes déjà abordés avec ses élèves et leur demande de les résoudre. Chaque élève dispose d'un tableau (cf. tableau 2.1) pour ranger les problèmes suivant les critères proposés. Dans cette phase, une coopération des élèves n'est pas autorisée. Le professeur recueille les réponses sans faire de commentaires. Puis un traitement statistique des réponses est effectué (test de Kendall) afin d'estimer la concordance des rangements ; un compte-rendu des divers rangements est ensuite communiqué aux élèves portant sur l'homogénéité ou la dispersion de leurs choix, les explications (sans jugement) sur les réponses etc. sur lequel s'engage une discussion avec les élèves.

Bilan

Il n'y a pas ni de bonne, ni de mauvaise réponse. L'expérience a fait apparaître quelques concordances sur les opinions ; on a aussi constaté que ces concordances étaient liées à des facteurs propres à chaque classe (un effet du statut ? du professeur ? à l'hétérogénéité des classes ?).

Remarque : Deux lignes supplémentaires permettent aux élèves qui le veulent de proposer des critères de leur choix et un rangement afférent, et une colonne pour des commentaires libres.

2ième phase

Le but de cette phase est d'attirer l'attention des élèves sur le modèle mathématique (plusieurs problèmes proposés ont effet le même modèle mathématique).

Est-il POSSIBLE (mais pas NÉCESSAIRE) de les résoudre de la même façon ? Bien sûr, la notion de modèle mathématique du problème n'est pas explicitement évoquée dans les discussions. Néanmoins nous pensons que la compréhension du modèle mathématique pourrait simplifier le travail des élèves dans les prochaines phases.

Déroulement

Cette deuxième phase consiste en une leçon : le problème préparé par le professeur est résolu collectivement au tableau. Le modèle mathématique de ce problème est facilement identifiable pour des élèves de ce niveau d'études.

Les élèves travaillent par groupes (de 2 à 4 par groupe) et ont pour consigne de fabriquer un ou deux problèmes qui peuvent être résolus « de même façon » que le problème initial. Chaque groupe présente ensuite son (ses) problème(s) et leur(s) solution(s). Cette présentation est collectivement discutée.

Bilan

Critère	Rangement de problèmes					Notes
Difficulté	Le plus facile				Le moins facile	
Intéressant	Le plus intéressant				Le moins intéressant	
Longueur de texte	Le plus court				Le plus long	
Longueur de résolution	Le plus court				Le plus long	
Clarté	Le plus clair				Le moins clair	
Utilité	Le plus utile				Le moins utile	

TABLE 2.1 – Tableau pour ranger les problèmes.

Au final, il nous est apparu que pour favoriser la sensibilité des élèves aux problèmes ayant un même modèle mathématique, une synthèse de l'activité s'avérait importante (elle a été réalisée sous des formes différentes). La discussion entre élèves (avec une faible participation du professeur) est aussi un aspect qui nous est apparu important. Enfin, afin de favoriser la dévolution de l'activité, le professeur peut montrer quelques problèmes qu'il a lui même conçus ayant le même modèle mathématique.

3ième phase

Le but de cette phase est de préparer un milieu dans lequel la notion du modèle mathématique du problème apparaisse naturellement et clairement. Un ensemble de problèmes est proposé aux élèves ; on leur demande de les classer selon leur « similitude » mathématique. Pour ce faire, des « problèmes - types » (de modèles différents) sont préparés. Quinze problèmes verbaux sont proposés par le professeur : plusieurs problèmes pour chaque type et quelques autres qui ne présentent aucun lien avec les « problèmes - types ».

Déroulement

La première partie de cette phase - la résolution des « problèmes types » et des quinze problèmes verbaux - est réalisée par les élèves en dehors du temps scolaire (chez eux).

La deuxième partie a lieu à l'école pendant de deux leçons consécutives.

Pendant la première, les élèves travaillent par groupe de trois ou quatre. Ils doivent regrouper les problèmes par « problèmes-types ». Dans la seconde leçon, une discussion collective est organisée afin de s'accorder sur une classification finale des problèmes selon les modèles mathématiques et d'exclure des ressemblances non-mathématiques (par exemple celles attachées à « l'environnement » de l'énoncé, aux mots-signaux etc.). Pour favoriser l'investissement des élèves, cette activité peut être organisée sous la forme d'une compétition (des points sont attribués aux groupes pour chaque problème verbal classé correctement). Dans le cas où les élèves ne parviennent pas à établir un consensus sur la classification d'un problème, le professeur intervient et aide les élèves à le classer (dans ce cas, aucun point n'est attribué).

Bilan

L'algorithme pour établir la relation entre deux problèmes est assez complexe. Le professeur peut être conduit d'indiquer explicitement l'appartenance (ou non) d'un ou plusieurs problèmes à une classe de « problèmes-type » sans que cette intervention soit institutionnalisée. Le professeur ne cherche pas en effet (pour l'instant) à enseigner une méthode mais doit seulement s'assurer que les élèves (en particulier les faibles) participent en donnant leur opinion.

4ième phase

Nous conviendrons ici de la terminologie suivante : deux problèmes sont appelés « équivalents » s'il suffit de substituer les nombres de l'un dans les calculs de l'autre pour obtenir la solution. Le problème original est un problème dont le modèle mathématique diffère des autres. Les problèmes de la même famille sont les problèmes dont le modèle mathématique est partiellement ou totalement pareil. Le classement est toujours relatif à un groupe spécifique de problèmes et, dans certains groupes de problèmes, plusieurs variantes de classement peuvent apparaître (Bureš, Hrabáková, 2008).

On l'aura compris, le but de cette phase est permettre aux élèves de découvrir des problèmes originaux (ou de même type) et de les reconnaître comme des problèmes utiles pour la résolution des problèmes. Autrement dit, nous pensons que cette activité leur permettra de comprendre qu'il « est possible de produire la solution d'un problème en donnant la solution d'un autre ». Précisons que notre but ici n'était pas de réaliser une « activité scolaire classique » mais d'offrir aux élèves un espace de réflexion sur la résolution de problèmes ; autrement dit, nous visons un développement des connaissances et pas des savoirs. C'est la raison pour laquelle, nous n'avons pas utilisé une terminologie précise et des problèmes équivalent (de la même famille) ce qui aurait pu être contre-productif.

Déroulement

Le professeur prépare six problèmes verbaux d'un domaine de mathématique connu des élèves. Les élèves résolvent ces problèmes comme ils ont l'habitude de la faire.

La séance commence par une phase de travail en groupes puis alterne cette forme de travail avec des phases collectives avec la totalité du groupe classe. En groupes, les élèves cherchent des similarités entre ces six problèmes. Les critères de similarités ne sont pas donnés. Les groupes formulent par écrit les groupements réalisés et justifient leurs classifications.

Dans la phase collective, chaque groupe présente à l'ensemble de la classe les similarités repérées. Les groupements proposés sont ensuite notés au tableau (cf. 2.2) qui résume ainsi les différents groupements obtenus selon des différents critères. Le professeur se limite à remarquer l'existence des critères différents sans se prononcer sur leur pertinence.

Groupe	Problèmes similaires	Critère appliqué	Problèmes similaires	Critère appliqué	Problèmes similaires	Critère appliqué	...
1							
2							
...							

TABLE 2.2 – Groupements proposés.

Puis, une phase en grand groupe reprend. Cette fois, le professeur indique un de six problèmes et demande les élèves de choisir parmi les autres les problèmes qui pourraient aider leur frère, leur sœur ou un ami à résoudre le problème indiqué par le professeur. Chaque groupe note son choix et sa justification. Ces choix sont ensuite collectivement présentés et discutés. Ces deux phases peuvent être répétées en cas de nécessité.

Bilan

Le but de cette phase a bien été atteint : elle a effectivement permis d'orienter l'attention des élèves vers les similitudes et différences des modèles mathématiques des divers problèmes sans pour autant utiliser des définitions complexes pour les élèves[9]. Si les critères liés aux modèles mathématiques ont été largement utilisés, d'autres critères non-mathématiques l'ont été aussi. La deuxième activité (en groupe) a permis de recentrer l'attention des élèves vers les critères mathématiques.

5ième phase

Le but de cette phase est de résumer et de préciser les connaissances acquises pendant les trois phases précédentes. Elle est organisée sous la forme d'une activité de création des problèmes par les élèves[10].

Déroulement

Les élèves devaient créer des problèmes avec une thématique (non-mathématique) commune (par exemple, le « supermarché »). Chaque groupe choisit un de ces problèmes, l'ensemble de ces problèmes est ensuite reproduit par le professeur et chaque élève doit les résoudre individuellement. Pendant la première séance, les élèves travaillent en groupes : ils comparent les énoncés (cherchent les similitudes des méthodes de solution) et s'accordent sur le fait que le problème qu'ils ont produit est susceptible d'être utile à la résolution d'un ou de plusieurs autres problèmes de la liste. Si c'est le cas, ils ont la possibilité de le remplacer par un autre ; ils doivent rendre le nouveau problème au professeur avant la séance suivante. Pendant la seconde séance, chaque groupe présente à l'ensemble de la classe son problème (le premier ou le nouveau), la méthode de résolution et justifie le fait que leur problème ne peut pas aider (ni même partiellement) à la résolution d'un autre problème de la liste. Les autres élèves ont la possibilité de discuter et de réagir à ces propositions.

Bilan

Cette activité a été assez bien acceptée par les élèves. Les questionnaires d'évaluation que les élèves ont renseigné après l'activité ont permis de montrer qu'ils ont particulièrement apprécié la possibilité qui leur était offerte de communiquer et de débattre, de devoir justifier leurs décisions, de pouvoir réviser leur résolution et surtout d'avoir un espace destiné à réfléchir sur les diverses procédures de résolution - et pas seulement de présenter les solutions des problèmes comme ils ont l'habitude de le faire. Pour l'ensemble de ces raisons, on peut considérer notre objectif comme atteint.

Conclusion

Nous l'avons vu, la transformation du rapport des élèves aux problèmes, et le développement de la culture des problèmes, suppose un regard plus technique sur la résolution et différent de celui qu'ils portent habituellement sur cette activité. Même si nos premiers résultats sont encourageants, restent encore plusieurs questions, comme celle de l'évaluation de cette activité : Que peut-on mesurer / évaluer ? Quelles sont les relations de ce type d'activité avec les connaissances mathématiques préalables des élèves, leur degré de maîtrise de la langue maternelle, etc. ?

2.3.3 Fonctions et leurs propriétés

La situation vise à développer la compréhension des fonctions et de leurs propriétés - elle est issue du Module 3 du projet EdUmatics. Elle utilise l'informatique pour permettre une meilleure compréhension des fonctions ici envisagées comme les instruments utiles pour la modélisation dans le monde mathématique.

Un des buts de ce module est de proposer aux étudiants un environnement particulier pour étudier les propriétés des fonctions de façon indirecte. L'activité débute par l'examen d'un prob-

9. On a pu noter, plusieurs fois, l'usage de ce terme spontanément par quelques élèves.
10. Notons que la création d'énoncés de problèmes représente une partie essentielle du travail des mathématiciens.

lème complexe sans l'usage de l'ordinateur, puis l'informatique est introduite comme un milieu favorable aux découvertes par les élèves et leur l'institutionnalisation des connaissances ainsi construites. [11]

La difficulté des activités proposées aux élèves est croissante : au début de l'activité, les élèves travaillent sur les variations qui peuvent être résolues avec les mathématiques enseignées au collège sans usage de l'informatique. Notons que le problème proposé peut engendrer des activités mathématiques relevant du niveau universitaire.

L'expérience a été réalisée dans les écoles tchèques (avec des élèves de 14-15 ans) et françaises (élèves de 16-17 ans) en 2009/2010.

Le protocole expérimental est structuré en trois phases :

1ère phase (pour plus de détails, voir Jančařík, Novotná, 2011)

Cette phase est une introduction dans l'activité : on y propose une suite de problèmes de difficulté croissante. Elle vise à dériver la formule décrivant la fonction de trajectoire de prédateur pour les différents types de poursuites (proie et prédateur sont ou ne sont pas sur une même droite). Les élèves doivent simuler une trajectoire optimale de prédateur sous un ensemble des conditions données - le point initial, la vitesse du prédateur et la vitesse et la trajectoire de la proie.

Déroulement

Dans cette première phase, 3 problèmes sont proposés (les problèmes 1-3), puis 2 extensions de ces problèmes à portée plus générale et dans des domaines différents (vie et science) :

Problème 1 : (La proie et le prédateur sont sur une même droite.) Deux coureurs courent l'un après l'autre avec les vitesses différentes (figure 2.3).

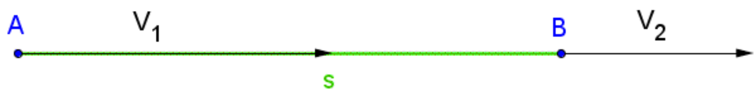


FIGURE 2.3 – Quand le deuxième rattrape-t-il le premier ?

Problème 2 et 3 : La proie et le prédateur ne sont pas sur une même trajectoire : quelle stratégie de poursuite est possible pour le prédateur ? La proie se déplace à vitesse constante sur une droite toujours dans la même direction sans se soucier du prédateur (le prédateur devant rattraper la proie dans un certain délai).

Problème 2 : Le premier coureur court après l'autre dans la distance s avec la vitesse v_1 (figure 2.4) ; où est-ce que le deuxième devrait se diriger s'il court avec la vitesse v_2 et veut rattraper le premier ?

Problème 3 : Le premier coureur dépasse le deuxième avec la vitesse v sur un cercle du rayon r (figure 2.5). Où est-ce que le deuxième devrait se diriger s'il se déplace à une vitesse v_2 et veut rattraper le premier ?

Cette activité sollicite les notions mathématiques suivantes : fonctions linéaires, le théorème de Pythagore, cercle, longueur de l'arc circulaire. Notons enfin que les élèves travaillent avec les nombres concrets.

Le résultat attendu est la formule décrivant la position de prédateur pour le temps donné. Cette formule est trouvée d'abord pour une position concrète, puis pour un pas dans le cas de la position générale. Voici une illustration du processus pour découvrir la formule utile à la programmation de la trajectoire du prédateur :

11. Pour des exemples d'approche similaire voir (Jančařík, 2007).

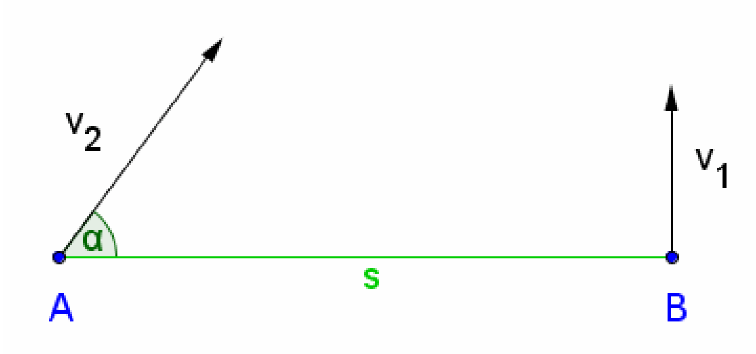


FIGURE 2.4 – Où faut-il se diriger ?

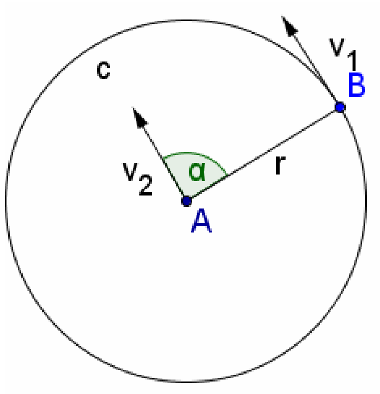


FIGURE 2.5 – Sur un cercle

Pas 1 : De l'origine ([0, 0]) vers, par exemple, le point ([3, 1]) avec la vitesse 1. Où est-ce que le coureur sera après le premier pas (l'intervalle de la longueur 1) ?

Pas 2 : Le changement de l'origine par un autre point (translation).

Pas 3 : Du point général vers un point général.

L'activité peut être introduite par les questions suivantes : Qu'est-ce qui se passe avec les trajectoires si la proie change sa direction ? Comment est-ce que le prédateur devrait se comporter ? Quelles sont-elles les conditions pour qu'il puisse rattraper la proie ? Où est-ce que le prédateur doit se diriger ?

Bilan

L'usage des TICE n'est pas nécessaire pour cette phase (on peut s'en servir par exemple quand il faut résoudre les équations quadratiques). Les simulations informatiques peuvent être utilisées comme motivation ou illustration des situations plus complexes.

Extension 1 : La fusée doit être envoyée vers une station orbitale. Trouvez la vitesse de la fusée, son orbite et d'autres données sur Internet.

Extension 2 : Discutez à propos du problème d'Achille et de la tortue.

2ième phase

Pendant la deuxième phase les élèves travaillent avec les trajectoires de la proie plus complexes, cherchent la stratégie de poursuite la plus optimale pour le prédateur ; la résolution numérique étant assez difficile, les élèves utilisent les modélisations par les logiciels.

Déroulement

Les élèves entrent la position de la proie, d'abord manuellement puis ils le programment sous la forme d'une dépendance fonctionnelle. En utilisant la formule obtenue pendant la première phase, ils entrent la position de la proie et le programme calcule la position du prédateur ; le logiciel dessine les trajectoires de la proie et du prédateur - voir par exemple la simulation suivante du problème 3 faite avec le logiciel GeoGebra (figure 2.6) et Excel (figure 2.7).

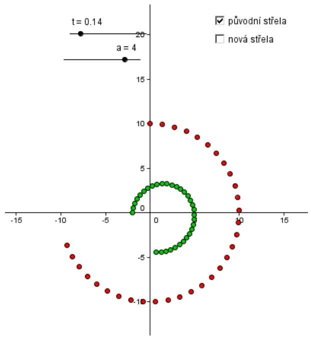


FIGURE 2.6 – Geogebra

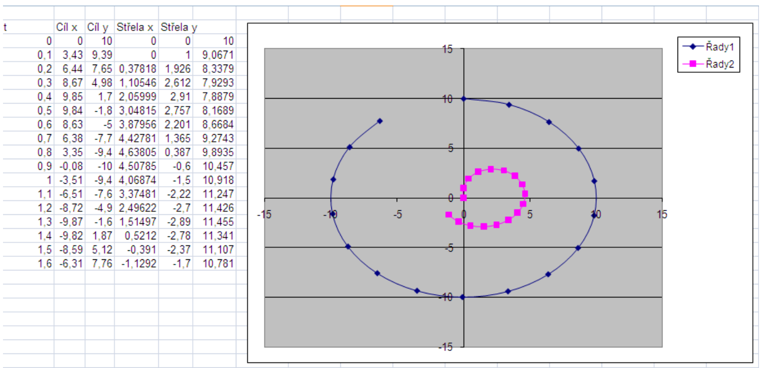


FIGURE 2.7 – Excel

Les élèves proposent les trajectoires différentes de la proie et les représentent par des fonctions (par exemple valeur absolue, fonctions affines par morceaux, fonctions trigonométriques avec des paramètres différents) ; par exemple sur la figure 2.8, la proie bouge sur une sinusoïde. Les élèves observent les changements des trajectoires du prédateur sur les graphes et discutent par exemple sur la manière d'obtenir une trajectoire plus « haute », plus « dense » etc.

Bilan

L'activité s'est avérée très riche : elle consiste un milieu propice aux discussions et interrogations des élèves ; elle a conduit à des modifications de l'énoncé selon les diverses propositions des élèves.

3ième phase

La troisième phase propose des extensions de la situation de base. Par exemple, les élèves peuvent observer les différences selon que la vitesse soit constante ou variable, l'influence d'inclinaison de la fonction, la relation entre la tangente et la vitesse instantanée etc.

Déroulement

Plusieurs questions peuvent ici être analysées, comme par exemple : le prédateur se déplace à vitesse constante, quelle est la vitesse de la proie ? Est-ce qu'il est possible de la calculer ? Quand est-ce que cette vitesse est la plus petite ? la plus élevée ? Quelle est l'accélération quand la vitesse change ?

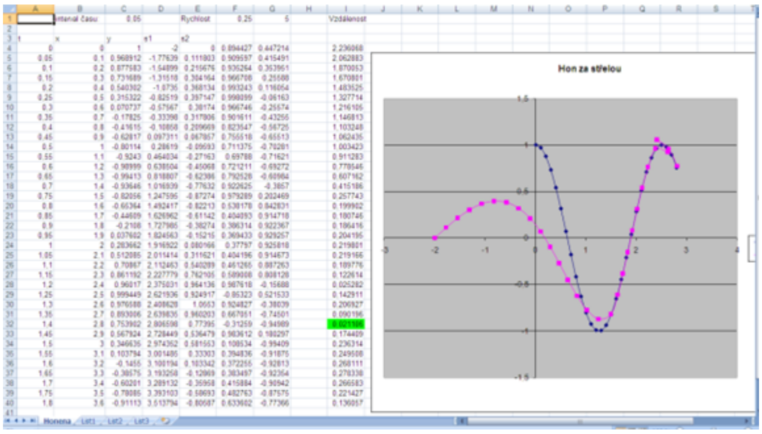


FIGURE 2.8 – Sur une sinusoïde

Bilan

Pour les divers calculs, les TICE peuvent être utilisées et les élèves ont la possibilité de faire les expérimentations. Ils ont ainsi pu étudier les propriétés des fonctions de façon beaucoup détaillée. Cette activité a plusieurs possibilités de prolongement ; quelques-unes d'entre d'elles relèvent des mathématiques universitaires comme par exemple : la différence entre une vitesse constante et variable, l'influence de l'inclinaison de la fonction, la relation entre la tangente et la vitesse instantanée, les points d'inflexion (la vitesse augmentant et diminuant). Il est aussi possible travailler avec la vitesse moyenne.

Conclusion

Ces expériences ont montré que les élèves qui y ont participé ont été amenés à analyser et étudier différents types de fonctions et à se confronter à des questions dépassant celles de leur programme ; ils ont par exemple été conduits à combiner des approches géométriques, graphiques, numériques et algébriques que ce soit en « papier-crayon » ou avec le logiciel. Mathématiquement, ces activités se sont avérées très riches. Les liens fonctionnels entre différentes grandeurs ont été établis d'abord par l'expérimentation (avec l'animation offerte par l'usage des TICE), puis dans un second temps par la confirmation théorique.

2.3.4 Note finale

Les deux activités, bien qu'ayant des caractéristiques différentes, satisfont les conditions importantes des situations didactiques dans le cadre de la TSD : elles contribuent ainsi à l'amélioration de la culture scolaire des élèves dans le cas de la résolution de problèmes dans l'enseignement des mathématiques dans la scolarité obligatoire.

Nous avons présenté quelques aspects de ce que nous avons appelé « une culture scolaire des problèmes » ; il reste maintenant examiner les raisons des différences de cultures entre classes et leurs effets didactiques aussi bien du côté des professeurs que de celui des élèves. L'ensemble de nos résultats nous incite à un certain optimisme. En effet, les élèves qui savent résoudre un problème peuvent (souvent) faire des rapprochements utiles ; en revanche, pour ceux qui ne le savent pas, ceux ne reconnaissent pas les caractères qui pourraient être utiles, il s'avère inutile de les leur montrer directement. En effet, pour résoudre un problème il est nécessaire de comprendre pourquoi cette solution s'impose et cela ne peut pas dériver du fait qu'elle ressemble à une autre car les ressemblances sont utiles quand on « sait » contrôler la valeur de ces ressemblances.

Notons pour finir, que les deux dispositifs sont exigeants du point de vue de l'investissement des professeurs : explication des consignes, choix et préparation des situations, évaluations des résultats etc. Il convient aussi d'être vigilant à certains glissements méta-didactiques, ou plus généralement quelques autres effets liés aux paradoxes du contrat. Enfin, nous voudrions aussi souligner l'importance de l'institutionnalisation des diverses découvertes des élèves.

Références

Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques. Recueil de textes de Didactique des mathématiques 1970-1990.* Présentés par M. Cooper, N. Balacheff, R. Sutherland et V. Warfield. Grenoble : La pensée sauvage.

Brousseau, G., Novotná, J. (2008). *La culture scolaire des problèmes de mathématiques. In Les didactiques et leurs rapports à l' enseignement et à la formation. Quel statut épistémologique de leurs modèles et de leurs résultats ?* Ed. Bernard Sarrazy. Bordeaux : AFIRSE, IUFM d'Aquitaine - Université Montesquieu Bordeaux IV, LACES - Université Victor Segalen Bordeaux 2. [CD ROM]

Bureš, J., Hrabáková, H. (2008). Création d'énoncés de problèmes par les élèves. In *Actes du XXXVe colloque COPIRELEM.* Bordeaux.

Cox, M.J., Marshall, G. (2007). *Effects of ICT : Do we know what we should know ?* Education and information technologies, 12(2), 59-70.

Jančařík, A. (2007). *Algorithms and Solving Strategies.* Praha : UK v Praze, Pedagogická fakulta.

Jančařík, A., Novotná, J. (2011). Potential of CAS for development of mathematical thinking. In *Aplimat 2011*, Ed. Monika Kováčová, Bratislava : STU in Bratislava, p. 1375- 1384.

Kuřina, F. (1989). *Umění vidět v matematice.* Praha : SPN. (L'art de voir en mathématiques ; en tchèque)

Novotná, J. (2009). Contribution à l'étude de la culture scolaire. Cas de la résolution de problèmes dans l'enseignement des mathématiques. In Spagnolo, F. (Ed.), *Proceedings CIEAEM 61* (pp. 19-31). "QUADERNI DI RICERCA IN DIDATTICA (Scienze Matematiche)" of G.R.I.M., Supplemento n. 2 al N.19. Accessible online de
http ://math.unipa.it/ grim/cieaem/Proceedings_cieaem_QRDM_Montreal_09_plenieres.pdf

Sarrazy, B. (1997). *Sens et situations : une mise en question de l'enseignement des stratégies métacognitives en mathématiques.* Recherches en didactique des mathématiques. 17/2. 135-166.

Remerciements :

Cette recherche a été partiellement soutenue par le projet GACR P407/12/1939 et EdUmatics - European Development for the Use of Mathematics Technology in Classrooms, 503254-LLP-1-2009-1-UK-COMENIUS-CMP.

Appendice : Quelques notions du cadre théorique

Les recherches présentées s'inscrivent dans le cadre de la Théorie des situations didactiques en mathématiques (TSDM) (Brousseau, 1998). Les principes qui ont guidé le protocole, les préparations des activités et des situations proposées dans les classes prendre sens au sein de ce cadre théorique. C'est la raison pour laquelle, nous rappellerons rapidement quelques concepts essentiels tels : la distinction « savoirs/connaissances », la situation didactique, le contrat didactique et ses paradoxes, le glissement méta-didactique et bien sûr l'analyse a priori et a posteriori.

Savoirs et connaissances

Les connaissances peuvent être caractérisés comme des moyens de prendre une décision, de choisir une action, une formulation, une preuve etc. Dans les situations où un sujet manipule des savoirs, il utilise des connaissances qui ne sont pas son objet d'études mais ses moyens. Ainsi un même énoncé peut être une connaissance ou un savoir suivant son rôle dans une situation donnée. Par exemple les modèles spontanés en dynamique élémentaire sont des formes de connaissance des situations qualitatives, opposées aux savoirs qui se manifestent dans les calculs. Pour l'observateur, un savoir est un moyen de reconnaître et de traiter des connaissances et des rapports entre connaissances. La conversion d'une connaissance - c'est-à-dire d'un moyen de décision - en savoir, et celle d'un savoir en moyen de décision peuvent paraître comme évidentes et mécaniques ou comme le résultat d'un simple changement de point de vue. Les connaissances sont indispensables à la mise en œuvre des savoirs. (Brousseau, Sarrazy, 2002)

L'environnement d'un problème ne fonctionne pas suivant le schéma naïf de la mémoire des savoirs ; autrement dit, il ne sert pas à retrouver une solution « déjà-là ». Il tend plutôt à faire envisager des possibilités, à faire interroger la situation nouvelle jusqu'à faire émerger et construire ou reconstruire le bon point de vue et à établir la solution adéquate. Cet environnement est beaucoup plus varié et beaucoup plus complexe que la seule collection de savoirs tenus pour « vrais ». Cet environnement est fait de souvenirs plus ou moins précis, de « connaissances » parfois incertaines, de questions pertinentes mais sans réponses fermes, de formulations ambiguës ou même franchement inappropriées. Autrement dit, dans une situation certaine (c'est-à-dire dans laquelle il n'y a aucune incertitude), l'énoncé tient la fonction d'un savoir ; inversement, dans une situation incertaine, le problème tient la fonction plus modeste de connaissance.

Nous envisageons les problèmes non seulement comme des tâches où l'élève met en œuvre le savoir enseigné mais aussi comme une incitation à une activité individuelle qui doit simuler des activités mathématiques réelles ou supposées qui accompagnent et fondent ces savoirs. Ainsi, les problèmes sont des instruments essentiels permettant une acculturation des élèves à une pratique culturelle, plus cachée, car plus profonde, que la pratique des langages mais, du même coup, plus difficile à transmettre.

Ces dimensions épistémologiques, sociales et culturelles que nous venons d'évoquer sont trop souvent écrasées par la réification naïve des modèles issus de la psychologie cognitive qui réduit les connaissances aux savoirs institutionnalisés et culturellement organisés (cf. Sarrazy, 2006) Dans cette perspective, le professeur et les élèves sont tenus de n'utiliser ostensiblement que les savoirs institutionnalisés c'est-à-dire reconnus comme vrais et comme ayant été explicitement enseignés à l'ensemble de la classe. Mais, comme nous l'avons montré par ailleurs (cf. Brousseau, Novotná, 2008), la capacité de résoudre un problème dépend aussi de connaissances non institutionnalisées et parfois inconscientes développées par les élèves au cours d'activités antérieures. Elles sont faites de souvenirs de situations ou de contextes plus ou moins précis ou exacts, de bribes d'algorithmes ou de preuves, de formulations personnelles, d'habitudes inanalysées, de sentiments personnels, etc. Le savoir est le moyen d' identifier parmi les connaissances celles qui sont reconnues vraies, mais aussi une partie des connaissances communes incertaines ou fausses mais notables.

Remarquons enfin, que dans la conduite des activités, le professeur utilise aussi des connaissances communes aux élèves pour leur faire produire ou admettre les propositions vraies. Il les utilise à l'aide d'un ensemble de préceptes et d'habitudes épistémologiques et heuristiques qui ne peuvent pas être des savoirs mais qui, pourtant, lui sont indispensables. L'ensemble de ces connaissances est indispensable au fonctionnement des classes et constitue une culture assez spécifique à chacune d'elle.

Le contrat didactique

Même si le concept est aujourd'hui bien connu (Brousseau, 1998 ; Brousseau, Sarrazy, 2002 ; Sarrazy, 1995) rappelons que le contrat didactique est défini comme :

L'ensemble des obligations réciproques et des « sanctions » que chaque partenaire de la situation didactique impose ou croit imposer, explicitement ou implicitement, aux autres, et celles qu'on lui impose ou qu'il croit qu'on lui impose, à propos de la connaissance en cause. Le contrat didactique est le résultat d'une « négociation » souvent implicite des modalités d'établissement des rapports entre un élève ou un groupe d'élèves, un certain milieu et un système éducatif. On peut considérer que les obligations du professeur vis à vis de la société qui lui délègue sa légitimité didactique sont aussi une partie déterminante du contrat didactique.

Le contrat didactique n'est pas un vrai contrat ; il n'est pas explicite, les conditions de ruptures et les sanctions ne peuvent être données à l'avance. En fait le contrat doit être considéré comme une forme de définition d'une situation didactique. Plus précisément, une situation didactique permet de dresser un inventaire des contrats suivant la répartition des responsabilités entre l'enseignant et l'élève.

Glissement méta-didactique

Le glissement méta-didactique est le processus didactique qui conduit à l'utilisation didactique effrénée du glissement métacognitif c'est-à-dire au remplacement d'une connaissance par un de ses modèles par une description en métalangage. Lorsqu'une activité d'enseignement a échoué, le professeur peut être conduit à se justifier et, pour continuer son action, à prendre ses propres explications et ses moyens heuristiques comme objets d'étude à la place de la véritable connaissance mathématique. D'objets d'études ils deviennent par le même processus objets d'enseignement ; la forme se substitue au fond. (Brousseau, 1998). Cet effet peut se réitérer, se cumuler plusieurs fois, concerner toute une communauté et constituer un véritable processus échappant au contrôle de ses acteurs (Brousseau, Sarrazy, 2002)

Les glissements méta-didactiques peuvent prendre des formes différentes ; ils peuvent se présenter comme une heuristique, comme des moyens mnémotechniques, ils peuvent se manifester par l'utilisation des métaphores, ou par l'enseignement de la résolution elle-même (d'un algorithme) (Sarrazy, 1997).

Chapitre 3

Communications

3.1 Dynamique des interactions entre mathématiciens, didacticiens et enseignants

Gilles Aldon*

*IFÉ, ENS de Lyon
S2HEP (EA 4148)
19 allée de Fontenay
69347 Lyon

Dans l'Institut Français de l'Éducation, les recherches sur les questions vives concernant l'enseignement, l'apprentissage et la formation en mathématiques occupent une place importante. Ces recherches impliquent un ensemble de communautés scientifiques - des chercheurs en mathématiques, en didactique, histoire et épistémologie des mathématiques, mais également d'autres disciplines scientifiques dans une perspective pluridisciplinaire, et institutionnelles - des rectorats, l'inspection générale et les IA-IPR des académies concernées. Nous faisons l'hypothèse que les interactions entre ces différents acteurs permettent une meilleure compréhension des phénomènes liés à l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques à tous les niveaux d'enseignement et participent à l'amélioration de l'enseignement de la discipline. Il serait impossible de mener des recherches qui reposent sur une interaction étroite entre chercheurs et praticiens sans les équipes d'enseignants associés qui sont impliquées dans toutes les étapes des recherches - construction des questions, conception des méthodologies, recueil et analyse des données, communications et publications.

3.2 En apprenant de la statistique dans des contextes réels et simulés

Carranza, Pablo*, Fuentealba, Jenny*, Micheli, Elda**

* Université Nationale de Rio Negro,
476, Mitre,
8328, Allen
Rio Negro, Argentine
pfcarranza@gmail.com

** Université Nationale du Comahue
1400, Buenos Aires,
8300 Neuquén, Argentine
eldabeatrizmicheli@gmail.com

RÉSUMÉ. *Dans cette proposition nous nous intéressons aux possibles difficultés dans l'apprentissage de notions de Statistique pouvant se manifester chez les élèves lorsqu'ils travaillent dans des environnements entièrement simulés.*

ABSTRACT. *In this proposal we focus on the possible difficulties in learning concepts of Statistics that may occur in students when they work in entirely simulated environments .*

MOTS-CLÉS. *statistique, didactique ; simulation, probabilité*

KEYWORDS. *statistics, didactics, simulation, probability*

3.2.1 Introduction

L'enseignement de la Statistique au niveau secondaire est devenu un sujet de fort intérêt en plusieurs pays. Il est possible de constater la place de plus en plus importante consacrée aux notions de Statistique dans les programmes de collège et de lycée en Argentine. Cette présence de la Statistique dans l'enseignement ne cesse d'évoluer et prend des formes différentes selon les pays.

Malgré cette non uniformité, les propositions officielles (ainsi que les manuels pour une bonne part) semblent garder quelques éléments en commun, parmi eux, celui du choix de l'approche inférentielle retenue pour l'enseignement secondaire. Restant caché en tant que tel par l'absence de toute mention à d'autres approches, il place à l'approche fréquentiste comme étant la seule approche inférentielle pouvant être enseignée. Ce choix, corrélé avec celui de l'interprétation de la probabilité, masque l'existence d'une autre interprétation pour ce terme, bayesienne, pour laquelle la probabilité devient une mesure de certitude. En effet, pour des raisons diverses l'enseignement de la Statistique au niveau secondaire se trouve fortement circonscrit à ce que l'on pourrait appeler l'école classique, approche selon laquelle la probabilité est atteinte à long terme de la proportion de l'apparition d'un certain événement (Carranza 2009).

Un deuxième élément commun dans l'enseignement de la Statistique, et fortement promu d'ailleurs par les documents officiels, est celui de l'intégration de nouvelles technologies dans les classes (Nicholson and Mulhern ; Blejec 2003 ; Lane and Peres 2007). Ainsi, l'utilisation d'ordinateurs est encouragée pour, par exemple, traiter des notions telles que les mesures de position centrale, celles de dispersion et même celle de la probabilité, dans son versant fréquentiste, bien entendu.

Un troisième élément commun, mais cette fois-ci plus facile à repérer dans les manuels, consiste en le choix didactique d'introduire les principes de la notion fréquentiste de la probabilité par le moyen des simulations. De cette manière, en donnant une réponse d'une part à la consigne d'attribuer à la probabilité l'interprétation fréquentiste et d'autre part à celle d'introduire les nouvelles technologies, un bon nombre de manuels ajouteraient implicitement un troisième élément, celui de proposer la construction de cette notion par l'utilisation exclusivement de simulations et ceci sans lien direct avec la réalité à laquelle cette simulation fait référence, autre que son évocation.

Étant donné cette tendance consistant à substituer la réalité par une simulation, il nous semble intéressant de nous interroger sur des possibles difficultés que cette décision peut entraîner chez les élèves.

Un tel choix devrait d'abord s'appuyer sur quelques conclusions qui ne nous semblent pas vraiment confirmées pour l'instant. Par exemple, le fait d'accepter la substitution de manipulations réelles par des simulations signifierait que les deux environnements sont équivalents pour les élèves. De cette manière, un apprentissage construit sur un environnement simulé devrait pouvoir être transposé sans difficulté majeure dans un autre s'appuyant sur le réel. Et même plus, si c'est le cas, les environnements simulés, devraient être suffisants pour faire émerger les conditions de construction de telles connaissances. Enfin, ils devraient permettre de reconnaître les limites d'un raisonnement déterministe pour laisser la place à un autre du type indéterministe. Ce changement de paradigme, d'ailleurs devient nécessaire à la construction de la notion fréquentiste de la probabilité.

Dans cette communication, nous nous sommes centrés sur quelques difficultés possibles pouvant être repérées chez des élèves au moment de devoir investir dans un contexte réel, des notions construites au sein d'un contexte simulé. Pour cela, nous avons mené une expérimentation dans une classe de niveau scolaire primaire.

3.2.2 L'architecture de l'expérimentation

Plus précisément, nous avons demandé à un enseignant de la dernière année de l'école primaire (élèves âgés d'environ 11 ans) de proposer à ses élèves deux problèmes reliés, le premier se déroulerait dans un contexte virtuel, le deuxième dans un réel. Les conclusions à tirer du premier seraient d'utilité pour le deuxième. De cette manière, nous avons voulu observer des possibles difficultés chez les élèves à investir dans le deuxième problème les conclusions construites lors de la résolution du premier problème.

Afin d'essayer de repérer des effets possibles dus au changement de type d'environnement (virtuel vers réel) nous avons demandé à l'enseignant d'organiser la classe en deux grands groupes. Un groupe ferait les deux problèmes en restant toujours dans des environnements de type réel (Parcours R-R). L'autre subirait un changement de type d'environnement, en passant d'un de type virtuel (premier problème) vers un autre de type réel (deuxième problème) (Parcours V-R). La seule différence proposée aux élèves résiderait en principe en le type d'environnement dans lequel se résoudrait le premier problème. Dans les deux cas, les élèves auraient les mêmes consignes générales et travailleraient toujours par binôme (Figure 3.1).

3.2.3 Les problèmes

Problèmes A et A'

Matériel par binôme :

a) Une feuille contenant la table suivante imprimée :

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

b) Deux dés et 20 jetons ;

c) Un ordinateur avec logiciel du type feuille de calcul installé.

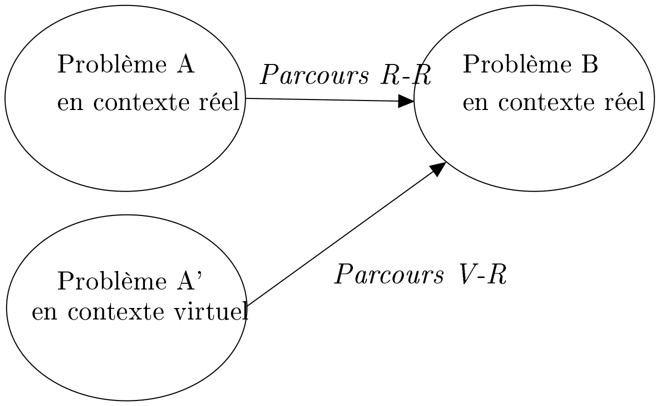


FIGURE 3.1 – Schéma des situations proposées aux élèves

Consignes générales :

Il s'agit d'abord de distribuer les 20 jetons sur les 11 caisses de la table et puis de récupérer le maximum possible de jetons selon la règle suivante : On lance les deux dés. On fait la somme des faces supérieures. On récupère un jeton de la caisse correspondant à la somme des deux dés trouvée. A votre tour vous pouvez continuer à jouer en récupérant un jeton par lancer. Le jeu s'arrête pour vous lorsque la caisse dont vous voulez récupérer un jeton est déjà vide. Gagne celui qu'est arrivé à récupérer le plus de jetons.

Proposez une stratégie de distribution des 20 jetons vous donnant le plus de chances de gagner le jeu.

Observation : Les binômes travaillant sur le problème A (Parcours R-R) effectuent leurs lancers avec des dés réels, ceux travaillant sur le problème A' (Parcous V-R) utilisent une simulation simple effectuée sur un logiciel du type feuille de calcul.

Problème B

Matériel par binôme :

1. Une feuille contenant la table suivante imprimée :

0	1	2	3	4	5

b) Deux dés et 20 jetons

Consignes générales :

Il s'agit d'abord de distribuer les 20 jetons sur les 6 caisses de la table et puis de récupérer le maximum possible de jetons selon la règle suivante :

On lance les deux dés. On fait la valeur absolue de la différence des faces supérieures. On récupère un jeton de la caisse correspondant.

A votre tour vous pouvez continuer à jouer en récupérant un jeton par lancer. Le jeu s'arrête pour vous lorsque la caisse dont vous voulez récupérer un jeton est déjà vide. Gagne celui qu'est arrivé à récupérer le plus de jetons.

Proposez une stratégie de distribution des 20 jetons vous donnant le plus de chances de gagner le jeu.

3.2.4 Quelques phénomènes repérés

La séquence avait été proposée à un enseignant d'école primaire de l'Argentine et expérimentée dans sa classe en avril de l'année 2012 pendant une séance de 80 minutes.

L'enseignant nous avait appris que les élevés avaient peu ou nulle expérience avec des logiciel du type feuille de calcul. Cela nous a mené à simplifier au maximum les conditions d'usage de la simulation. De fait, les interactions avec l'ordinateur se sont restreintes à appuyer sur la touche F9 du clavier des ordinateurs portables et ceci, afin de relancer la simulation. Le reste des taches étaient semblables à celles effectuées par les élèves travaillant sur un environnement réel (calculer la somme ou la reste, etc.).

Celle-ci n'était pas la première fois que nous expérimentions des situations de ce genre. Ces situations plus ou moins adaptées, nous l'avions déjà testées dans une classe de niveau secondaire en Argentine (année 2011, élèves âgés de 15 ans environ). Les phénomènes observés ont été relativement proches à ceux que nous présenterons ici. D'ailleurs, l'année 2009 en France nous avons mené une autre expérimentation, cette fois-là avec des élèves de la dernière année de lycée (17 ans environ). Les principales différences de cette dernière (testée en France) par rapport à celle que nous proposons ici (testée en Argentine) résident d'une part en l'inversion de l'ordre des environnements de travail (le sens avait été d'un environnement réel vers un autre virtuel) ; et d'autre part, que le passage d'environnement s'est produit au sein du déroulement de la résolution du même problème. En effet, c'était au moment que les élevés avaient plus ou moins avancé sur la résolution que nous avions proposé de continuer le travail sur l'ordinateur. A l'occasion, la réaction des élèves fut quelque part accablante : de manière explicite et presque unanime, ils avaient refusé d'accepter le travail sur l'ordinateur comme étant une sorte de continuité de celui effectué quelques minutes auparavant avec les dés.

C'est précisément ce si fort refus à accepter l'équivalence d'environnements de la part de ces élèves de lycée qui avait renforcé notre soupçon sur la non immédiate équivalence d'environnements. Par la suite, nous présenterons quelques-uns des phénomènes observés relatifs à la dernière expérimentation suivis de quelques réflexions sur le sujet.

3.2.5 Sur la crédibilité des données simulées

Lors de la séance menée en Argentine, un des phénomènes repérés a été celui que nous avons appelé « consultation ». Ce phénomène a été observé dans les groupes travaillant sur les ordinateurs. Plus précisément, la plus part des groupes ayant produit leurs données à partir de simulations ont cherché à comparer leurs suites de données avec celles des autres groupes dont les données avaient été obtenues à partir de lancers de dés. Les entretiens menés immédiatement après la séance avec quelques élèves nous ont permis de conclure que cette consultation cherchait à valider la série obtenue par simulation en fonction de sa ressemblance à celles provenant des lancers réels.

Parmi les critères de validation utilisés, les élèves ont cité des notions telles que la variabilité des séries et la fréquence d'apparition des valeurs possibles. Si une série simulée leur donnait l'impression d'avoir la même variabilité (ou entropie de la série (Carranza 2009)) qu'une série obtenue par lancers de dés et s'ils pouvaient observer des distributions de fréquences proches entre une série simulée et une réelle, alors ils se rassuraient et continuaient à travailler. Mais étant donné le faible échantillon généré par chaque groupe, les critères restaient parfois insuffisants pour les élèves. C'est finalement le contrat didactique qui a tranché en faveur de la crédibilité des données simulées. Cela a été une des fonctions du contrat, nous reviendrons plus tard sur ce sujet en particulier.

3.2.6 Sur le hasard des données simulées

Relié à la consultation, nous avons identifié un autre phénomène chez les groupes allant travailler sur les ordinateurs. Ce phénomène a pu être mieux repéré lors des entretiens après la séance. En nous faisant partager leurs avis sur les données provenant des ordinateurs, les élèves nous ont manifesté ne pas avoir tellement eu confiance en la manière dont l'ordinateur avait produit leurs données. Ils y avaient des doutes sur le « hasard à l'intérieur de la machine » et sur « les possibilités de l'ordinateur d'imiter la manière dont un être humain lance un dé ». Encore une fois, si les élèves ont continué leur travail malgré leurs doutes, cela a été grâce a la puissance du contrat didactique régnant dans la classe.

3.2.7 Sur le réinvestissement de propositions

Le décryptage des échanges entretenus par les élèves nous indique une différence de réinvestissement dans le deuxième problème des propositions et conjectures élaborées lors du premier problème et ceci selon l'environnement de travail. Plus précisément, les élèves ayant travaillé le premier problème sur l'ordinateur ont eu du mal (par rapport aux autres) à se servir dans le deuxième problème de ce qu'ils avaient conclu lors du premier. Par exemple, appliquer les principes des notions de cas favorables et de cas possibles pour estimer les résultats plus probables lors du deuxième problème a été plus difficile pour les élèves ayant fait le premier problème sur l'ordinateur que pour ceux ayant utilisé leurs dés. Il est arrivé même des cas dont certains binômes ayant fait le premier problème sur l'ordinateur, dont ils sembleraient lors du deuxième problème ne pas faire recours au vécu lors du premier. Dans ces cas, ces élèves dans la deuxième partie semblaient débattre pour la première fois des notions telles que la stabilisation de fréquences.

3.2.8 Premières réflexions

Une des premières réflexions concerne ce que l'on pourrait appeler la transparence entre type d'environnement. L'ensemble des expérimentations nous font penser qu'une telle transparence caractérisée par l'équivalence entre un environnement simulé et un autre réel n'est pas si évidente, au moins lorsque les premières notions liées au hasard et à la probabilité (fréquentiste dans notre cas) sont en train d'être construites. En effet, il parait qu'à ce stade, ce que les élèves ont construit dans un environnement simulé n'est pas suffisamment plausible pour pouvoir se généraliser, et en particulier de se transposer sur un environnement réel. Nous avons pu observer que ce qui a été élaboré dans un environnement simulé en termes de propositions a du mal à être transposé sur un autre environnement, réel celui-là. Plus précisément, les élèves ont eu des difficultés à trouver des arguments pour soutenir une telle transposition.

En général les arguments proposés par les élèves en faveur d'une équivalence entre environnements se fondent sur les caractéristiques des séries, autrement dit sur l'image du hasard qu'elles leurs donnent. Mais à ce stade-là, la classe est encore en train de débattre sur l'impossibilité de trouver des causes à des telles variations et les principes d'un raisonnement indéterministe sont encore en construction collective. Beaucoup d'élèves cherchent encore à trouver les causes sur les effets observés. De cette manière, ils cherchent à essayer de contrôler les mouvements de leurs mains pour voir s'ils arrivent à obtenir les mêmes résultats On dirait qu'il est trop tôt pour introduire une simulation si les premières conclusions sur les limites du déterministe ne sont pas ni construites ni partagées (institutionnalisées).

Dans ce sens, il semblerait que les limites d'un tel paradigme ne peuvent pas suffisamment être discutées dans un environnement simulé par son impossibilité d'épuiser les arguments déterministes (Brousseau, Brousseau et al. 2001 ; Carranza 2009). En d'autres termes, tant l'émergence de positions déterministes comme l'abandon de celles-ci, deviennent difficile voire impossibles dans un environnement simulé. L'ordinateur fonctionne pour les élèves comme une sorte de boite noire dont l'exploration est inaccessible.

Il semblerait donc qu'un travail sur un environnement simulé requiert d'abord un autre sur un environnement réel dont les limites du déterminisme puissent être discutés et institutionnalisés et dont les régularités telles que la stabilisation de fréquences puisse trouver un consensus chez les élèves. Il semblerait aussi qu'un travail sur un environnement simulé requiert d'être validé. Validation qui se fonderait sur les caractéristiques de la série simulée exclusivement. Ce qui implique donc la nécessité d'avoir au préalable construit le concept de stabilisation de fréquence ainsi que celui du hasard.

Malgré ces conclusions, on pourrait se questionner sur l'apparente absence de conflits chez les élèves lorsque ils sont invités à découvrir les notions les plus élémentaires de Statistique en simulant sur un ordinateur. Sans doutes, les raisons sont variées, mais une d'entre elles nous semble importante. Nous l'avons repérée lors de nos expérimentations : elle concerne le contrat didactique (Brousseau 1988).

Dans notre expérimentation il y a eu une équivalence d'environnements induite par l'enseignant, et cela s'est produit lors de la présentation du problème. Le fait de proposer la même consigne à tous, de donner le même temps de travail indistinctement à ceux qui travaillaient sur ordinateurs et à ceux qui lançaient les dés, etc., est une sorte de mise en équivalence des deux environnements. En ne faisant aucune distinction entre les élèves travaillant sur des environnements différents, l'enseignant induisait l'équivalence entre eux. Pour des raisons de contrat didactique, il est évidement à attendre que les élèves acceptent, au moins en l'apparence cette supposée équivalence entre environnements.

Il a fallu un entretien à la fin de la séance, dans une ambiance décompressée entre les chercheurs et les élèves pour qu'ils nous confient leur désaccord à accepter le travail sur l'ordinateur comme étant équivalent au travail avec les dés.

Probablement donc, des phénomènes liés au contrat didactique peuvent expliquer la non apparition de conflits dans une classe ordinaire. Même plus, ce conflit aurait de fortes chances de ne pas émerger si les deux environnements n'étaient pas confrontés en classe, ce qui serait rare vue la tendance à substituer les réels par les simulés. En effet, la tendance semble être la substitution des environnements réels par des simulations et non pas la cohabitation entre eux. Ainsi, les possibles conflits dus au passage entre les deux environnements disparaîtraient à cause de l'élimination d'une d'entre eux.

Enfin, il nous semble que l'introduction de l'ordinateur est susceptible de poser des difficultés chez les élèves au moment de la construction des premières notions de Statistique telles que celle de hasard, celle de probabilité fréquentiste (au moins) et plus particulièrement à l'heure de la construction des premiers outils d'une approche indéterministe.

La non transparence entre environnements simulés et réels observée lors de nos expérimentations semble montrer qu'un environnement simulé ne réunirait pas toutes conditions pour une construction des premières notions mentionnées et que pour autant, ils ne pourraient pas se substituer entièrement aux environnements réels, principalement lors de la construction de ces notions. Des futures recherches devraient nous permettre d'approfondir ce sujet.

Références

Blejec, A. (2003). *Teaching statistics by using simulations on the Internet.* IASE/ISI Satelite, Ljubljana, Slovenia.

Brousseau, G. (1988). *Le Contrat Didactique.* Recherche en didactiques des mathématiques

9(3) : 309-336.

Brousseau, G., N. Brousseau, et al. (2001). *An experiment on the teaching of statistics and probability.*, The Journal of Mathematical Behavior 20(3) : 363-411.

Carranza, P. (2009). La dualité de la Probabilité et enseignement de la statistique. Une experience en BTS. Savoirs Scientifiques : Epistemologie, histoire des sciences, didactique des disciplines, *Université Paris VII Denis Diderot*. Docteur : 455.

Lane, D. and C. Peres (2007). *Interactive simulations in the teaching of Statistics : promise and pitfalls*. ICOTS 7, Brasil.

Nicholson, J. and G. Mulhern (2002). *Supporting statistics teaching and learning at A-level : Using computer-based materials.* U. Neville Hunt of Coventry University, Nuffield Foundation. 2002.

3.3 Algèbre dynamique, glisser-déposer par équivalence

Jean-François Nicaud*, Christian Mercat**

* ARISTOD
217 rue de Paris
91120 Palaiseau
jeanfrancois.nicaud@laposte.net

** S2HEP EA4148 - IREM - Université Claude Bernard Lyon 1
Bât. Braconnier ; 43 bd du 11 Nov. 1918
69622 Villeurbanne Cedex
christian.mercat@math.univ-lyon1.fr

RÉSUMÉ. *Nous proposons une transposition du concept de manipulation directe mise en œuvre dans la géométrie interactive à celui de l'algèbre. La manipulation directe construit et manipule un objet mathématique, en déformant sa représentation mais en conservant sa sémantique. Nous décrivons ici une implémentation du glisser-déposer par équivalence d'une expression algébrique. Nous donnons quelques exemples comme la mise en facteur, le développement, le calcul à la souris, le calcul sur les fractions, la résolution d'équations, linéaires ou quadratiques par complétion du carré. Chaque étape est commentée par la règle appliquée qui garantit l'équivalence, avec une verbosité ajustable. Nous concluons par une ouverture à d'autres opérations, ne respectant pas l'équivalence, comme l'application de « théorèmes élèves » inopérants, ou les transformations de calcul formel.*

ABSTRACT. *We describe a transposition of direct manipulation, historically defined and implemented in interactive geometry, to algebra. A mathematical object is constructed and manipulated by user's input, different representations of that same object are shown on a computer screen, preserving the semantic of the object. We describe here an implementation of these ideas through the use of the drag and drop gesture, deforming algebraic expressions by equivalence. We give a few examples, factorization, expansion, calculation, fraction manipulation, linear and quadratic equation resolution. Each step is commented by a rule that guarantees equivalence with a tunable verbosity. We conclude by questioning other operations, which don't preserve equivalence, such as the application of buggy rules or symbolic Computer Algebra System operations.*

MOTS-CLÉS. *manipulation directe, algèbre, calcul formel, représentations, équivalence.*
KEYWORDS. *direct manipulation, algebra, symbolic calculation, representations, equivalence*

3.3.1 Introduction

La géométrie interactive s'intéresse aux figures géométriques sur lesquelles l'utilisateur agit directement, en opérant sur la figure, en lui ajoutant d'une manière structurée des objets, reliés aux précédents par une syntaxe stricte et en modifiant les paramètres libres de la figure. La représentation à l'écran change, mais c'est toujours le même objet mathématique qui est représenté, les relations entre les parties qui composent le tout restent les mêmes. Cet outil promeut l'émergence d'une représentation mentale de la situation dans l'esprit de l'utilisateur en anticipant les « réactions » de la représentation de la figure face aux modifications de ses paramètres. En identifiant les invariants de la construction, ceux qui sont tautologiques et ceux qui sont surprenants, ce qui reste pareil quand tout change, l'utilisateur se forge une conception robuste des phénomènes mis en jeu.

Nous proposons dans cet article une transposition de l'idée de manipulation directe à l'algèbre, où les objets manipulés ne sont plus des figures géométriques composées d'éléments graphiques comme des points, des cercles et des droites, reliés par des relations d'incidence, de parallélisme ou de métrique, mais des expressions algébriques composées de variables, de constantes, d'opérateurs (+ - * / = $\leq$ etc.), reliées par la sémantique et les règles du calcul. Nous n'aborderons qu'en conclusion la modification des objets ne respectant pas l'équivalence, qui sont nécessaires pour « construire » une expression algébrique par opérations sur une expression vide, comme on construit une figure de géométrie par ajouts successifs d'éléments reliés aux précédents. Nous nous concentrerons sur la description de l'expressivité du glisser-déposer par équivalence et du calcul à la souris, c'est-à-dire la modification de la représentation d'un objet mathématique donné.

Cette réflexion n'est pas achevée, mais l'implémentation effective dans le logiciel epsilonwriter, qui permet la création automatique d'une suite commentée de manipulations d'une expression algébrique, laisse à penser que l'algèbre dynamique peut devenir un champ d'activité de l'enseignement des mathématiques et un champ de recherche pour la didactique des mathématiques.

Plus de détails sur http ://epsilonwriter.com et http ://www.epsilon-publi.net

3.3.2 Une figure reste une figure, un polynôme reste un polynôme

La question du « même » est centrale en mathématique. Les gestes fondamentaux du mathématicien sont de considérer comme égaux des objets différents mais en relation (le quotient par équivalence), et de considérer comme différents deux copies du même objet. Un objectif majeur de l'enseignement en mathématique est l'apprentissage des relations d'équivalence permettant de définir les couples de représentations qu'il est légitime de considérer comme un même objet dans un cadre théorique donné et ceux qui doivent être considérés (parfois momentanément) comme différents. Cet apprentissage s'appuie sur l'identification des invariants associés à l'objet sous-jacent, « ce qui reste même quand tout change ».

En géométrie, les cas d'égalité du triangle, par exemple, définissent strictement ce qu'est un triangle. Les logiciels de géométrie permettent aux élèves d'explorer ce qu'est une figure donnée en manipulant ses paramètres contingents (comme l'axe de visualisation d'une figure tridimensionnelle) de manière à se forger une conception robuste de la manière dont réagit sa représentation quand on interagit avec elle.

Ces interactions passent, dans les logiciels actuels par la manipulation directe d'éléments graphiques réifiant métaphoriquement des objets mathématiques définissant la figure, comme des points, des angles, des longueurs ? Ces objets sont reliés entre eux par des co-variations fonctionnelles, induites par des conditions d'incidence, ou de métrique, si bien que la modification d'un objet induit en général la modification d'autres objets et la représentation de la figure. La compréhension de ces relations et l'identification des invariants de la figure (« ces trois points sont toujours alignés » par exemple) est le but essentiel de la géométrie interactive, qui fait exister la figure, principe unificateur de toutes ses représentations, en tant qu'objet mathématique dans l'esprit de l'élève. Celui-ci *joue* dans le sens où il fait « l'exercice des possibles » (Jacques Henriot) de la figure. Le projet européen Inter2geo[1], visant à rapprocher les logiciels de géométrie dynamique en Europe, a permis de mettre en lumière les différentes conceptions des objets géométriques et de la place de l'utilisateur par rapport au savoir mis en médiation par les différents logiciels.

Ces subtilités sont également au cœur du calcul algébrique qui considère comme faisant référence au même objet mathématique des expressions diverses tant qu'elles sont transformées selon des règles précises respectant l'équivalence. Les objets visualisés et manipulés ne sont pas des objets géométriques mais des lettres, des symboles d'opérateurs, formant des expressions reliant ces objets selon une syntaxe bien précise dans un langage mathématique, un modèle sémantique, assignant un sens aux expressions bien formées, appelées nombres, fonctions, polynômes, équations... Des règles de modification élémentaires définissent une équivalence entre expressions, assimilées à un objet mathématique unifiant ces différentes représentations, comme « $11+1$ », « 3×4 », « $012{,}0$ » font référence au douzième entier naturel dont la forme usuelle est « 12 », qu'on appelle sa *dénotation*.

Ces règles et leur portée dépendent de la théorie en question et de son modèle sémantique, par exemple la somme de deux rationnels $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ sera un rationnel dans le cadre de l'apprentissage des fractions mais pourra être directement assimilé à un entier dans le cadre usuel, un réel à une fonction constante, un polynôme à une fonction... Bien que définissant des relations d'équivalence, ces règles de réécriture, par exemple le calcul arithmétique remplaçant une expression par l'évaluation canonique de ses termes, sont en général orientées.

Un système informatique manipulant des expressions algébriques dans un but pédagogique doit donc *explicitement* connaître le modèle sémantique approprié à l'utilisateur.

1. http ://i2geo.net

3.3.3 Le glisser déposer par équivalence

Cet article s'intéresse principalement à la manipulation directe d'une expression par glisser-déposer conservant l'équivalence, *equivalent drag and drop* en anglais. Les mouvements principaux sont justifiés par la définition des opérations, leur commutativité, associativité et distributivité.

Les objets manipulés

Une expression algébrique bien formée est définie de manière récursive comme un élément atomique (lettre, chiffre, symbole comme $\mathbb{R}$) ou un opérateur appliqué à des expressions algébriques. Les expressions que nous considérons sont relativement générales, des équations, des polynômes, des expressions logiques comme « $x = 3$ ou $x = 5$ », ou encore des expressions ensemblistes comme $]\infty, 2] \cup [4, 6]$. Les objets sélectionnés pour le glisser-déposer sont des sous-expressions ou des opérateurs. On les fait ensuite glisser en bougeant le pointeur tout en gardant la sélection puis en les déposant entre ou sur des éléments de l'expression, en relâchant le pointeur.

Le geste physique a un but mathématique qui est d'obtenir une autre représentation de l'objet manipulé plus adaptée à un objectif poursuivi comme la résolution d'une équation. L'équivalence doit être justifiée par une règle que la transformation respecte et cette règle peut être implicite ou au contraire explicitée à l'utilisateur si l'apprentissage de la règle est un but visé par la manipulation. Le geste doit avoir un sens et être en lien avec sa justification.

Exemples simples de glisser-déposer par équivalence

Dans l'expression $2\left(x^3 + 3x^2 + 4x\right)$, en sélectionnant x et en le déposant devant la parenthèse, on obtient $2x\left(x^2 + 3x + 4\right)$ c'est-à-dire sa mise en facteur. De même, dans $\sqrt{x} = 3$, la racine carrée, sélectionnée et déposée sur le 3 donne $x = 3^2$. Chez l'enfant de 12 ans qui fait glisser 2 dans $x + 2 = 8$ pour le déposer à droite de 8 et obtenir $x = 8 - 2$ on souhaite généralement qu'il y ait une justification « on soustrait aux deux membres », mais que ce ne soit plus le cas ensuite.

Calcul en manipulation directe

En agissant sur un opérateur, nous proposons de substituer cet opérateur et ses opérandes par leur forme canonique dans un contexte donné, c'est-à-dire par le résultat de l'application de l'opérateur. Ainsi, $x = 2 + 3$ devient $x = 5$ après une action sur l'opérateur somme, $3 + \frac{10}{15}$ est remplacé par $3 + \frac{2}{3}$ par un clic sur la barre de fraction et $3x^2 - 5x^2$ par $-2x^2$ en faisant opérer la soustraction. Dans $2x(x - 5)$, la distribution s'opérerait par action sur le symbole de multiplication qui est ici implicite, la dépose du x dans la parenthèse aura le même effet.

Dans un système d'équations, la dépose d'une équation comme $x = 2y - 3$ sur le signe = de l'équation $5x + 3y = 1$ est à interpréter comme la substitution d'une expression à la variable x , résultant en $5(2y - 3) + 3y = 1$.

Plus généralement, des règles de réécritures plus sophistiquées, maintenues dans l'espace de travail, peuvent être appliquées à une expression.

Interprétation des gestes

Quel sens mathématique donner au déplacement d'une sous-expression ? Toutes les demandes d'une sélection source et d'un but sont-elles interprétables ? L'interprétation de base est la métaphore du prendre ici pour mettre là : c'est l'application d'un opérateur inverse à celui qui lie la sous-expression au reste de l'expression à la source et l'application d'un opérateur de création au but, suivant les règles du calcul algébrique, c'est-à-dire la greffe d'un sous-arbre (un greffon) à un autre endroit de l'arbre syntaxique dont il est issu. L'identification de la source, de l'opérateur et du but est sujet à interprétation et repose sur l'identification des règles applicables. Donnons quelques exemples en notant en rouge l'expression sélectionnée, qui une fois transformée est en général sélectionnée sauf quand ce n'est pas approprié comme dans le cas de la racine carrée suivante.

Ainsi le passage du 2 dans $x + 2 = 8$, depuis la somme de gauche à droite de l'égalité, revient à retrancher 2 au membre de gauche et à appliquer la somme avec -2 au membre de droite, $x = 2 - 8$, ce qui est justifié par la soustraction aux deux membres du nombre 2 et la commutativité de l'addition. De même, attraper 2 dans l'expression $x^2 = 3$ et le déplacer jusqu'au 3 pour obtenir l'expression « $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$ », même si le nombre 2 est maintenant caché dans l'argument muet de l'opérateur racine carré, procède de la même sémantique de l'opération inverse de l'exponentiation. Le glisser déposer d'un opérateur signifie également la composition par l'opérateur inverse dans ses conditions d'applicabilité comme par exemple $\sin u = v$ devenant « $u = \arcsin v$ pour dans u dans $]-\pi, \pi]$ » ou tout autre commentaire qui précise les restrictions.

Bien entendu, l'endroit choisi pour la dépose d'une sous-expression influe sur l'opérateur retenu et le statut de l'expression. Ainsi, dans $x + 2 = 8$, la dépose devant le x repose sur une simple règle de commutativité de termes d'une addition, et donne $2 + x = 8$; mais s'il est déposé sur le x, qui sous-entend une agglomération des deux facteurs, on comprend alors $2 = 2 \times 1$ lié par un opérateur de multiplication, pour obtenir sa mise en facteur : $2\left(\frac{x}{2} + 1\right) = 8$. Ce geste d'agglomération peut être additif, multiplicatif, d'exponentiation ou d'identité remarquable comme la complétion du carré.

Bien d'autres transformations sont interprétables, comme $\ln ab \to \ln a + lnb$, $e^{a+b} \to e^a e^b$, ou même $\sin 2x \to 2 \sin x \cos x$, il reste pour l'enseignant à décider si ces règles sont souhaitables ou non.

En cas de polysémie, le logiciel propose les choix sous forme d'une mini-fenêtre surgissante.

Trinôme du second degré par glisser-déposer

Le traitement comporte des glisser-déposer et des calculs directs. L'expression source, l'insertion but ou l'opérateur sont alors indiqués en rouge.

Demande	**Résultat**	**Explication**
$3x^2 - 12x - 15 = 0$	$x^2 - \frac{12x}{3} - \frac{15}{3} = \frac{0}{3}$	Division des deux membres
$x^2 - \frac{12x}{3} - \frac{15}{3} = \frac{0}{3}$	$x^2 - 4x - 5 = 0$	Évaluation des fractions
$x^2 - 4x - 5 = 0$	$(x-2)^2 - 2^2 - 5 = 0$	Complétion du carré par dépose de $-4x$ sur x^2
$(x-2)^2 - 2^2 - 5 = 0$	$(x-2)^2 - 9 = 0$	Évaluation
$(x-2)^2 - 9 = 0$	$(x-2)^2 = 9 + 0$	Ajout aux deux membres
$(x-2)^2 = 9 + 0$	$(x-2)^2 = 9$	Évaluation
$(x-2)^2 = 9$	$x - 2 = \sqrt{9}$ ou $x - 2 = -\sqrt{9}$	Extraction de la racine carrée
$x - 2 = \sqrt{9}$ ou $x - 2 = -\sqrt{9}$	$x - 2 = 3$ ou $x - 2 = -3$	Évaluation
$x - 2 = 3$ ou $x - 2 = -3$	$x = 2 + 3$ ou $x = 2 - 3$	En deux temps
$x = 2 + 3$ *ou* $x = 2 - 3$	$x = 5$ *ou* $x = -1$	Évaluation

FIGURE 3.2 – Résolution du trinôme du second degré par complétion du carré

3.3.4 Verbosité et justification

Un logiciel de calcul algébrique visuel, Graphing Calculator, a été édité il y a quelques années par la société Pacific Tech [2], distribué avec Mac OS. L'interaction était en manipulation directe : le déplacement d'une sous-expression dans l'expression globale remplaçait celle-ci directement par une expression équivalente, sans trace de la précédente et sans explication. C'était un outil spectaculaire mais inadapté pour l'apprentissage.

L'interaction que nous proposons dans epsilonwriter, outre les possibilités d'évaluation sélective (calcul « à la souris ») et d'applications de règles de réécriture, repose sur la production d'étapes justifiées par la citation des règles employées. Par exemple, pour la demande $\frac{2x}{3} = \frac{5}{|7}$ dont le résultat est $\frac{x}{3} = \frac{5}{2\times7}$, epsilonwriter écrit par défaut :

$\frac{2x}{3} = \frac{5}{7}$	
$2\frac{x}{3} = \frac{5}{7}$	Le facteur du numérateur devient facteur de la fraction 2
$\frac{x}{3} = \frac{\frac{5}{7}}{2}$	division des deux membres par 2
$\frac{x}{3} = \frac{5}{2\times7}$	multiplication du dénominateur par 2

FIGURE 3.3 – Commentaires pour une action complexe

et toutes ces lignes peuvent être ensuite effacées ou éditées.

Une idée force est de permettre à l'administrateur de choisir parmi les règles celles qui sont disponibles pour les utilisateurs et comment formuler celles-ci. En effet, il est utile que l'ensemble des règles disponibles varie en fonction du niveau de l'utilisateur. Lors de la construction des nombres relatifs par exemple, il peut être souhaitable que l'élève n'ait pas tout de suite des règles avancées de manipulations pour avoir à découvrir progressivement les possibilités de transformations par équivalence des séquences d'opérations. Lors du calcul d'expressions numériques par exemple, le milieu composé du logiciel, lui fournira des rétroactions objectives sur les différentes règles qui sont effectivement applicables, facilitant la dévolution du problème qui sinon est, bien souvent, uniquement le problème de l'enseignant.

De plus, chaque enseignant a sa manière personnelle d'énoncer les règles, de renvoyer sur une page internet de son choix qui travaille la notion, et peut également choisir de passer sous silences certaines règles quand il les juge acquises.

Des ensembles choisis de règles avec leurs énoncés, proposés pour des contextes pédagogiques précis, seront développés prochainement, basés sur des expérimentations.

Trois usages de cet outil nous semblent potentiellement intéressants :

- pour un enseignant, une aide à la rédaction de raisonnements à destination d'élèves : il est facile d'obtenir certaines formes que l'on cherche à avoir ; il est possible de garder tout ou partie des explications ; il est possible de modifier les explications a priori et a posteriori ;
- pour un élève, une aide à la découverte et à la compréhension des gestes ; en limitant les gestes disponibles en fonction de son niveau ;
- pour un élève, une aide à la rédaction de raisonnements à destination de son professeur ou tuteur.

Les actions produites par les élèves, enregistrées par le logiciel, permettent également d'avoir des traces riches et des observables exploitables pour les didacticiens.

3.3.5 Perspectives : manipulations ne préservant pas l'équivalence

Cet article s'est concentré sur les manipulations préservant l'équivalence des expressions algébriques. Mais de nombreuses manipulations utiles au mathématicien ou à l'enseignant ne préservent pas cette équivalence.

2. http ://pacifict.com

Calcul formel

Quand on agit sur une expression algébrique pour faire des mathématiques, on ne raisonne pas toujours sur différentes expressions d'un unique objet mathématique, on en crée de nouveaux en agissant sur des expressions, en les transformant, par exemple en appliquant des règles de transformations de calcul formel comme la combinaison d'expressions, la dérivation, le développement en séries, le calcul de racines, des tracés de graphes, des définitions d'ensembles ? Notre réflexion s'étendra peu à peu à considérer des gestes de manipulation directe pour inclure les transformations les plus utiles, selon les résultats de nos expérimentations.

Fausses conceptions, exerciciels

Préserver l'équivalence permet à l'élève d'explorer l'algèbre en ayant une rétroaction directe, un milieu riche qui valide ses essais d'une manière constructive. Cependant, dans un contexte d'évaluation, il peut être utile de proposer à l'élève, parmi toutes les transformations possibles syntaxiquement, des transformations qui ne sont pas légales sémantiquement. Le commentaire de « justification » d'une telle fausse conception serait alors un retour à la règle correcte. Un tel comportement permettrait de faire travailler les élèves en autonomie sur des exerciciels adaptés. Une utilisation encore plus libre permettrait également d'observer les « théorèmes élèves » inopérants afin de construire les modèles et les fréquences de ces fausses conceptions de manière à les combattre plus efficacement et spécifiquement.

3.3.6 Conclusion

Nous avons discuté la notion de manipulation directe en algèbre et décrit une proposition d'interaction avec l'utilisateur basée sur le glisser-déposer par équivalence et le calcul direct. Nous avons présenté quelques exemples de l'expressivité atteinte. La description des gestes reconnus et la justification des transformations induites sur l'expression permettent de produire un document propice à l'apprentissage des règles de l'algèbre. Le réglage de la verbosité des explications permettra, nous l'espérons, une adaptation simple à différents niveaux et différentes pratiques.

Tout cela doit bien sûr être étudié. On connaît bien la réticence des enseignants de 4e, 3e, 2e à parler de geste, à dire ou entendre : Je fais passer à droite de l'équation en changeant son signe. Cette réticence provient du vécu : à partir du moment où l'on fait passer des choses, si l'on n'associe pas une justification au geste, on va facilement faire passer n'importe quoi n'importe où, et, quand c'est possible, on oubliera facilement de faire les traitements complémentaires comme changer l'expression de signe, changer le sens de l'inégalité ou restreindre l'ensemble d'application.

Mais nous proposons d'essayer d'apprendre le geste et sa justification, fondée sur la méthode : ne plus faire un geste sans avoir en tête sa justification.

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier Hamid Chaachoua, Jana Trgalova, Nicolas Roussel, Paul Libbrecht pour Christophe Viudez pour des échanges intéressants.

Références

Nicaud, J.F., Bouhineau, D., Gélis, J.M. (2001). Syntax and semantics in algebra. In *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference*. The University of Melbourne, 2001.

3.4 Algorithmique au lycée : quelles ressources en ligne ?

Une analyse des ressources du site des Irem

Simon Modeste*

* Institut Fourier
100 rue des maths, BP 74,
38402 St Martin d'Hères cedex
Simon.Modeste@ujf-grenoble.fr

Résumé. *Nous présentons une analyse de ressources en algorithmique accessibles en ligne sur le site des Irem. Cette analyse s'appuie sur une étude épistémologique du concept algorithme. L'analyse de ces ressources révèle, entre autres, une grande différence concernant la place de l'algorithme dans les mathématiques, entre les ressources pour la formation des enseignants et les activités pour la classe.*

Abstract. *We present an analysis of some online resources in algorithmics. This analysis is based on on epistemological study of the concept algorithm. The analysis of those resources shows a gap about the role of algorithms in mathematics, between the documents for the training of teachers and the activities for the classroom.*

Mots-clés. *algorithme, algorithmique, ressources en ligne*

Keywords. *algorithm, algorithmics, online resources*

3.4.1 Introduction : contexte et questions

L'algorithmique a fait récemment son apparition dans les programmes de mathématiques du lycée. Cette introduction d'une branche nouvelle des mathématique soulève de nombreuses questions sur le plan didactique.

D'une part, il est légitime de s'interroger sur le rôle de l'algorithmique dans les mathématiques et sur la place que peuvent avoir les algorithmes dans l'enseignement des mathématiques. C'est par une étude épistémologique de l'algorithme que l'on peut apporter des réponses à ces questions.

D'autre part, l'algorithmique a été introduite très rapidement dans le curriculum du lycée et ne fait pas nécessairement partie du cursus de base des enseignants de mathématiques. On peut alors se demander comment les enseignants vont se former à l'algorithmique et quelles ressources vont les guider dans la construction de leur enseignements.

C'est ce deuxième point qui va nous intéresser ici : Quels types de ressources sont à disposition des enseignants ? Comment les analyser ? Quelles conceptions de l'algorithmique sont portées par ces ressources ?

Ces questions ne peuvent être traitées indépendamment des premières. Nous montrerons comment nous avons utilisé une analyse épistémologique du concept algorithme pour construire une grille d'analyse des ressources. Nous présenterons ensuite le corpus de ressources choisi ainsi que les premiers résultats obtenus.

3.4.2 Une grille d'analyse basée sur une étude épistémologique

Aspects fondamentaux de l'algorithme

Nos précédentes études du concept algorithme (Modeste et al., 2010, Modeste et Ouvrier-Buffet, 2011) nous ont amenés à repérer différents aspects et à les distinguer suivant une dialectique outil-objet. En effet, il nous semble que le concept algorithme prend vraiment sens s'il devient objet d'étude et ne reste pas seulement un outil. Ces aspects sont résumés ci-dessous :

– Résolution de problème : un algorithme est un outil permettant de résoudre un problème, c'est-à-dire, apportant une solution pour chacune des instances du problème.
– Effectivité : un algorithme est une suite finie d'opérations non-ambiguës et peut être mise en œuvre par un opérateur quelconque.
– Preuve : un algorithme nécessite d'être prouvé (on parle souvent de terminaison et de correction). Dans l'activité de preuve en mathématiques, les algorithmes jouent aussi un rôle important.
– Complexité : un élément essentiel de l'algorithme est que l'on peut étudier son efficacité à résoudre un problème : sa complexité. L'étude de la complexité des algorithmes est un pan central de l'algorithmique.
– Modèles théoriques : la formalisation de ce qui est algorithmiquement calculable (machines de Türing, fonctions récursives...) a permis de montrer le potentiel et les limites des algorithmes.

Ces aspects se répartissent suivant une dualité outil-objet. Les aspect résolution de problème et effectivité relèvent de l'outil, les autres de l'objet.

Différentes conceptions pour l'algorithme

Sur un autre plan, bien que l'algorithme soit un concept à l'intersection entre mathématique et informatique, il ne joue pas le même rôle dans ces deux disciplines. Il nous a semblé nécessaire de distinguer trois paradigmes dans lesquels l'algorithme vit sous des formes différentes, que nous avons appelés Preuve Algorithmique, Algorithme Mathématique et Algorithme Informatique. Au sein de chacun nous distinguons deux conceptions, au sens du modèle ckc (Balacheff et Margolinas, 2005), l'un pour l'algorithme-outil, l'autre pour l'algorithme-objet. Nous donnons ici un tableau résumant brièvement ces conceptions en nous affranchissant de certains termes de ckc pour faciliter la compréhension dans un texte aussi court :

Les conceptions outil (première colonne) se distinguent des conceptions objet (deuxième colonne) notamment par le problème qu'elle abordent. Nous considérons qu'un problème est une famille I d'instances pour lesquelles on pose une même question Q.

Dans le cas des conceptions outil, l'algorithme permet de résoudre le problème, pour toute instance de I. Le concept d'algorithme n'a alors de sens que si on cherche à résoudre le problème pour toute instance de I.

Dans le cas des conceptions objet, l'algorithme est dans l'instance du problème. La question Q interroge un ou plusieurs algorithmes. Traiter le problème instancié sur un algorithme particulier met alors déjà en jeu l'algorithmique.

Grille d'analyse

À l'aide de ces outils, nous avons construit une grille d'analyse des ressources résumée ici :

Pour chaque ressource :
– Quelle forme de ressource ? À destination de qui ? Avec quels objectifs ?
– Quels problèmes sont abordés ? Quels algorithmes sont présentés ou recherchés ? Dans quel domaine se place-t-on ?
– Quelles questions sont posées ou soulevées concernant ces algorithmes ?
– Quels aspects de l'algorithme sont mis en jeu par ces problèmes et ces questions ? L'algorithme est-il objet ou seulement outil ?
– Dans quel paradigme se place-t-on ? Sous quelle forme les algorithmes sont-ils présents ?

3.4.3 Analyse d'un corpus : les ressources du site des Irem

Nous avons choisi d'étudier des ressources accessibles en ligne pour les enseignants, proposées par le site de Irem (Irem, 2012). Il y a plusieurs raison à ce choix : ces ressources forment un corpus bien délimité, elles sont issues d'une institution à laquelle on peut penser que les enseignants accordent un fort crédit et elles sont le produit d'enseignants, de didacticiens, de mathématiciens et d'informaticiens (souvent en collaboration).

Ce corpus est constitué d'une trentaine de ressources, que l'on peut diviser en deux groupes : les activités pour la classe et les documents de formation à destination des professeurs et des formateurs.

	Outil : Problèmes résolubles algorithmiquement	Objet : Problèmes qui « portent sur », qui « questionnent » l'algorithme
PA : Preuve Algorithmique	Le problème est traité par la preuve algorithmique, les raisonnements constructifs dans le langage mathématique, les objets manipulés sont les objets mathématiques. La validation s'appuie sur la logique mathématique, les règles de raisonnement et les propriétés des objets en jeu.	Le problème est traité par la preuve mathématique, les opérations sur les modèles théoriques (réduction algorithmique, réduction polynomiale...) en langage mathématique, modélisant le concept d'algorithme (machine de Turing...) La validation est la logique mathématique, le raisonnement et propriétés des objets en jeu.
AM : Algorithme Mathématique	Le problème est traité par des algorithmes, des opérations constructives finies exprimés dans un langage mathématique avec des éléments issus de langages de programmation. Les objets manipulés sont des objets mathématiques (qui peuvent être munis de certaines opérations de base). La validation est la preuve de l'algorithme (correction et terminaison).	Le problème est traité par la preuve mathématique (preuve d'algorithme et preuve de propriétés d'algorithmes, complexité...), l'étude d'invariants. Le langage est celui des mathématiques. La validation s'appuie sur la logique mathématique, les règles de raisonnement et les propriétés des objets en jeu.
AI : Algorithme Informatique	Le problème est traité par un programme, des opérations informatiques (boucles, tests, gestions des données...) exprimés dans un langage de programmation. La validation est assurée par la compilation, l'exécution et la validité de l'algorithme sous-jacent.	Le problème est traité par des opérations sur les programmes, la modélisation des programmes, dans un langage mathématique ou informatique. La validation est de l'ordre de l'informatique, de la vérification formelle, de la logique.

Résultats

L'étude permet de mettre en avant des différences profondes entre les ressources, notamment entre les documents de formation et les documents pour la classe. Le tableau ci-dessous résume la répartition des ressources :

	Ressources pour la formations des enseignant	Ressources pour l'utilisation en classe
Algorithme uniquement outil	4 documents Domination de AI	18 documents Domination de AI
Algorithme outil et objet	6 documents Domination de AM	Aucun document

Les ressources étudiées montrent une dichotomie entre, d'un côté, les points qui semblent importants concernant la formation des enseignants où l'algorithme peut être objet d'étude (et la preuve peut être présente), et de l'autre, les objectifs des ressources pour la classe où l'algorithme-outil et le paradigme AI semblent dominer (avec une présence forte des questions de programmation).

Il faut aussi faire remarquer la quasi absence de la preuve algorithmique (PA) dans les ressources. En particulier elle n'apparaît absolument pas dans les ressources pour la classe.

Interprétation

Ces résultats peuvent s'interpréter en terme de conditions de vie de l'algorithme-objet et de contraintes liées notamment aux programmes du lycée. En effet, en terme d'algorithmique, les programmes du lycée mettent fortement en avant le paradigme AI et les aspects outils, notamment en se tournant vers l'apprentissage des structures usuelles de programmation (instructions conditionnelles, boucles, affectations...).

Les programmes de lycées affirment aussi : « L'algorithmique a une place naturelle dans tous les champs des mathématiques et les problèmes posés doivent être en relation avec les autres parties du programme (fonctions, géométrie, statistiques et probabilité, logique) mais aussi avec les autres disciplines ou la vie courante ». Cependant, il semble que l'algorithme ne joue pas le même rôle dans tous les champs des mathématiques et que certains champs soient plus favorables que d'autres à faire vivre l'algorithme en tant qu'objet ou à mettre en jeu la preuve.

Notamment, c'est souvent dans des documents qui s'autorisent à s'éloigner des champs du programme du lycée que l'aspect preuve et l'algorithme objet apparaissent. Par exemple, les problèmes en théorie des jeux, théorie des graphes ou optimisation combinatoire dans les ressources sont à la base d'études d'algorithmes en tant qu'objets.

3.4.4 Conclusions et perspectives

Les ressources en ligne des Irem concernant l'algorithmique se focalisent fortement sur l'algorithme en tant qu'outil et le paradigme que nous avons appelé Algorithme Informatique. En particulier, de nombreuse ressources se concentrent sur l'apprentissage des structures de programmation usuelles.

Cette présentation n'est que le début d'un travail autour des ressources en algorithmique et nous pensons que nos outils permettront d'affiner encore ces résultats, en complétant cette étude « globale » par des analyses plus détaillées de certaines ressources choisies.

Il nous semble notamment qu'une analyse écologique de l'algorithme et de sa place dans les différents champs des mathématiques devraient permettre une meilleure interprétation des résultats concernant ces ressources.

Il nous paraît aussi intéressant de savoir quels usages sont faits de ces ressources et comment les enseignants les mettent en œuvre leurs classes. Enfin, les deux outils épistémologiques peuvent fournir un guide pour produire des ressources pour la classe impliquant l'algorithme pas seulement en tant qu'outil mais aussi en tant qu'objet et mettant en jeu plusieurs conceptions de l'algorithme en interaction.

Références

Balacheff N., Margolinas C. (2005). cK¢Modèle des connaissance pour le calcul de situation didactiques. in Mercier A. & Margolinas C. (eds.) *Balises pour la didactique des mathématiques*, Grenoble : Editions La Pensée Sauvage, 1-32.

Irem (2012) *Site internet des Irem* : http ://www.univ-irem.fr

Modeste S., Gravier S., Ouvrier-Buffet C. (2010). *Algorithmique et apprentissage de la preuve*, Repères IREM (79), 51-72.

Modeste S., Ouvrier-Buffet C. (2011). The appearance of algorithms in curricula, a new opportunity to deal with proof ? in *Proceedings of CERME 6*, Accessible sur le web :

http ://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/index.php ?id=wg1

3.5 Formation et diffusion des ressources

Hamid Chaachoua*, Jana Trgalová**

*IUFM - Université Grenoble 1,
Laboratoire LIG
11 rue des Mathématiques
DU BP 46 - 38402 Saint-Martin-d'Hères.

** IUFM - Université Lyon 1
Laboratoire S2HEP
19 allée de Fontenay
69347 Lyon

Dans l'Institut Français de l'Éducation, les recherches sur les questions vives concernant l'enseignement, l'apprentissage et la formation en mathématiques occupent une place importante. Ces recherches impliquent un ensemble de communautés scientifiques - des chercheurs en mathématiques, en didactique, histoire et épistémologie des mathématiques, mais également d'autres disciplines scientifiques dans une perspective pluridisciplinaire, et institutionnelles - des rectorats, l'inspection générale et les IA-IPR des académies concernées. Nous faisons l'hypothèse que les interactions entre ces différents acteurs permettent une meilleure compréhension des phénomènes liés à l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques à tous les niveaux d'enseignement et participent à l'amélioration de l'enseignement de la discipline. Il serait impossible de mener des recherches qui reposent sur une interaction étroite entre chercheurs et praticiens sans les équipes d'enseignants associés qui sont impliquées dans toutes les étapes des recherches - construction des questions, conception des méthodologies, recueil et analyse des données, communications et publications.

Ce thème se propose de questionner les apports pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques de ces interactions. Quels sont les apports pour l'enseignement secondaire des interactions entre professeurs et mathématiciens ? Comment les recherches en didactique des mathématiques peuvent-elles impacter le travail des enseignants ? Quels travaux communs entre didacticiens, mathématiciens et professeurs sont conduits et quels en sont les effets dans les classes ?

3.6 Représentations sociales des compétences professionnelles chez les enseignants de mathématiques

Elisângela Bastos de Melo Espindola*, Jana Trgalová, Catherine Loisy****

* S2HEP-EducTice, Université Lyon 1, France
UFPE, Recife, Brésil
elisangelabastosdemelo@yahoo.com.br

** S2HEP-EducTice
Université Lyon 1 et Ecole Normale Supérieure de Lyon
19 allée de Fontenay
69007 Lyon
jana.trgalova@univ-lyon1.fr,
catherine.loisy@ens-lyon.fr

RÉSUMÉ. *Cette communication présente une étude menée dans le cadre d'une thèse de doctorat franco-brésilien qui porte sur les représentations sociales et professionnelles des compétences des enseignants de mathématiques de second degré en France. Après avoir brièvement présenté les éléments théoriques, nous décrivons la méthodologie de recueil de données qui repose sur un questionnaire de libre association. L'analyse des données montre que le noyau central des représentations comporte des compétences différentes selon qu'il s'agit de compétences pour organiser un thème d'enseignement, pour préparer une séance de classe ou pour faire la classe.*

ABSTRACT. *This paper presents a study conducted as part of a Franco-Brazilian doctoral thesis focusing on the social and professional representations of French secondary school mathematics teachers' competencies. After having briefly presented the theoretical framework, we describe the methodology of data collection based on a questionnaire of free association. Data analysis shows that the central nucleus of representations contains different competencies depending on whether they pertain to the organization of a theme, the preparation of a lesson or the teaching to pupils.*

MOTS-CLÉS. *représentation sociale, représentation professionnelle, compétence professionnelle, enseignant de mathématiques*

KEYWORDS. *social representation, professional representation, professional competency, mathematics teacher*

3.6.1 Introduction

Le travail présenté ici a été réalisé dans le cadre d'une thèse franco-brésilienne qui porte sur une étude des relations entre les représentations professionnelles des compétences et la pratique professionnelle des enseignants de mathématiques du second degré en France et au Brésil. Nous nous intéressons ici aux représentations professionnelles des compétences « pour faire la classe », « pour préparer une séance de classe » et « pour organiser les enseignements relatifs à un thème » des enseignants de mathématiques français du second degré.

3.6.2 Représentations sociales et professionnelles des compétences

Les représentations sociales (Moscovici 1976) recouvrent l'ensemble des croyances, opinions et attitudes produites et partagées par les membres d'un groupe en direction d'un objet social donné. Notre étude s'appuie sur deux approches liées à cette théorie : l'approche du noyau central et celle des représentations professionnelles. Selon l'approche du noyau central (Abric 1994), les représentations sociales sont organisées en deux systèmes : le système central et le système périphérique. Le système central constitue la base commune sociale et collective autour de laquelle les représentations sociales sont organisées. Il évolue de façon lente et est indépendant du contexte immédiat. Il stabilise la représentation et le système périphérique qui est plus associé au contexte immédiat et caractérise l'individu. Il permet l'adoption plus personnelle et l'ancrage de la représentation sociale dans la réalité.

Les représentations professionnelles sont définies comme des représentations sociales spécifiques des groupes professionnels ; elles sont distinguées ainsi :

« Ni savoir scientifique, ni savoir de sens commun, elles sont élaborées dans l'action et l'interaction professionnelles, qui les contextualisent, par des acteurs dont elles fondent les identités professionnelles correspondant à des groupes du champ professionnel considéré, en rapport avec des objets saillants pour eux dans ce champ » (Bataille et al. 1997, p. 63).

En prenant en compte l'importance de l'objet de représentation dans les enjeux du contexte, nous considérons « les compétences professionnelles » comme objet de représentation des enseignants de mathématiques. En nous appuyant sur le point de vue de l'institution (MEN 2007), nous considérons que la compétence renvoie à une combinaison de connaissances, capacités et attitudes. Cela est en cohérence avec une répartition classique (Gérard 2000) qui sépare les domaines cognitif, psychomoteur et socio-affectif. Le domaine cognitif concerne toutes les activités d'ordre essentiellement mental ou intellectuel ; le domaine psychomoteur concerne toutes les activités d'ordre essentiellement gestuel, nécessitant un contrôle kinesthésique et le domaine socio-affectif, enfin, concerne toutes les activités d'ordre essentiellement affectif, se traduisant par des attitudes et des valeurs.

3.6.3 Méthodologie

Pour l'instant, nous avons mené une enquête auprès de 126 enseignants de mathématiques du second degré uniquement en France. Le croisement avec les données du Brésil est encore à réaliser.

Notre choix des types de compétences professionnelles a été basé sur le modèle de l'activité du professeur, élaboré par Margolinas (2002) qui propose cinq niveaux de cette activité : +3 (niveau noosphérien ou idéologique) ; +2 (niveau de construction) ; +1 (niveau de projet) ; 0 (niveau didactique) et -1 (niveau d'observation). En particulier, nous nous intéressons à trois niveaux (+2 ; +1 et 0). Nous avons demandé aux participants d'indiquer spontanément six mots ou expressions qu'ils associent aux compétences relatives aux niveaux de construction (+2), de projet (+1) et didactique (0), c'est-à-dire compétences pour « organiser les enseignements relatifs à un thème » ; « préparer une séance de classe » et « faire la classe ».

Pour identifier les éléments du noyau central, les participants ont été sollicités pour indiquer les deux mots ou expressions qu'ils considèrent comme les plus importants.

La méthode d'analyse des données comporte trois étapes : (1) codification du profil des répondants et insertion des réponses dans le logiciel Trideux pour l'analyse factorielle des représentations selon leurs caractéristiques personnelles et professionnelles ; (2) regroupement des réponses selon leur sens en connaissances, capacités et attitudes ; (3) définition des domaines de compétences professionnelles : contenu disciplinaire, pédagogie, didactique, qualités/valeurs personnelles de l'enseignant, domaine institutionnel et domaine des ressources externes.

Pour l'identification de ces domaines, nous nous sommes appuyées sur des références théoriques telles que la notion de Pedagogical Content Knowledge (PCK) issue des travaux de Shulman (1986) ou encore la définition des « domaines des compétences mathématiques ; domaine de la didactique pratique ou pratique de la didactique ; domaine pédagogique » de Bloch (2005).

3.6.4 Résultats en termes de représentations

Les résultats de l'enquête réalisée en France montrent quelques spécificités dans le noyau central des représentations des enseignants des compétences relatives aux différents niveaux de l'activité, c'est-à-dire celles qui sont indiquées comme les plus importantes et classifiées selon les domaines.

Représentations des compétences pour organiser les enseignements relatifs à un thème

Les enseignants n'ont indiqué que des connaissances et capacités comme éléments importants relatifs aux compétences pour organiser un thème d'enseignement (voir Tableau 1).

connaissances	Fq	capacités	Fq
des types de problèmes	07	maîtriser le savoir mathématique	09
sur la progression	06	prévoir la progression /progressivité des apprentissages	08
de ressources disponibles	06	comprendre et suivre le programme	06
des programmes et documents officiels	06	se documenter	05
des mathématiques	05	prendre en compte ses élèves	05
de culture générale	05	réfléchir	05
de ses élèves	04	gérer le temps	04
		choisir une stratégie d'enseignement	04
TOTAL	39		46

Tableau 1. Représentations de compétences pour organiser le thème - noyau central

Les capacités fréquemment citées relèvent surtout du domaine de contenu disciplinaire (maîtriser le savoir mathématique), du domaine didactique (ex. prévoir la progression/progressivité des apprentissages, prendre en compte ses élèves, choisir une stratégie d'enseignement), du domaine institutionnel (comprendre et suivre le programme), de celui des ressources externes (se documenter), de celui de la personnalité de l'enseignant (réfléchir) et de la pédagogie (gérer le temps). Les principales connaissances sont celles du domaine didactique (types de problèmes, progression, ses élèves), celles du contenu disciplinaire (connaissances mathématiques, de culture générale), des ressources disponibles et des programmes et documents officiels.

Représentations des compétences pour préparer une séance de classe

Concernant ces compétences (voir Tableau 2), les enseignants ont évoqué surtout les capacités relatives aux domaines : des qualités/valeurs personnelles de l'enseignant (organiser son travail personnel, innover, synthétiser, réfléchir), didactique (anticiper, prendre en compte ses élèves, prévoir la progression, se fixer des objectifs), pédagogique (gérer le temps), disciplinaire (maîtriser le savoir mathématique) et celui des ressources disponibles (se documenter).

connaissances		capacités		attitudes	
des programmes et documents officiels	16	organiser son travail personnel	12	être rigoureux	09
de ses élèves	07	innover	13	être curieux	04
de culture générale	07	anticiper	10		
sur la progression	05	gérer le temps	08		
de ressources disponibles	05	maîtriser le savoir mathématique	07		
		synthétiser	06		
		réfléchir	05		
		prendre en compte ses élèves	04		
		prévoir la progression /progressivité des apprentissages	04		
		se fixer des objectifs	04		
		se documenter	04		
TOTAL	17		77		13

Tableau 2. Représentations de compétences pour préparer une séance - noyau central

Les attitudes citées relèvent du domaine des qualités/valeurs personnelles de l'enseignant (être rigoureux, curieux). Les connaissances relèvent du domaine institutionnel (programmes et documents officiels), de celui du contenu disciplinaire (connaissances de culture générale), celui des ressources disponibles et du domaine didactique (progression des apprentissages, connaissance des élèves).

Représentations des compétences pour faire la classe

Ces représentations apparaissent avec peu de références aux connaissances (voir Tableau 3). Les seules connaissances considérées relèvent du domaine pédagogique et du domaine du contenu disciplinaire (mathématique et de culture générale).

connaissances		capacités		attitudes	
pédagogiques	16	motiver les élèves	11	être patient	15
des mathématiques	04	gérer la classe	09	être rigoureux	12
de culture générale	04	écouter les élèves	08	être ferme	09
		gérer un groupe	06	être clair	09
		organiser son travail personnel	04	être attentif aux difficultés des élèves	05
		maîtriser le savoir mathématique	04		
		s'adapter	04		
TOTAL	24	46			50

Tableau 3. Représentations de compétences pour faire la classe - noyau central

Les enseignants ont cité les capacités pédagogiques (motiver les élèves, gérer la classe, gérer un groupe), celles relatives aux qualités/valeurs personnelles de l'enseignant (écouter les élèves, organiser son travail personnel, s'adapter) et celles du contenu disciplinaire (maitriser le savoir mathématique). Les attitudes qui apparaissent sont liées à la personnalité de l'enseignant (ex. être patient, rigoureux, ferme, clair) et au domaine didactique (ex. être attentif aux difficultés des élèves).

3.6.5 Conclusion et perspectives

Les résultats de cette étude montrent que le noyau central des représentations des compétences professionnelles varie chez les enseignants de mathématiques en fonction du type de l'activité du professeur.

Quant aux compétences pour faire la classe, le domaine pédagogique et celui relatif aux qualités/valeurs personnelles de l'enseignant sont prédominants. Ainsi les enseignants semblent considérer les compétences relatives à la gestion du groupe classe comme les plus importantes.

Concernant les compétences pour préparer une séance, la prédominance bascule vers le domaine relatif aux qualités/valeurs personnelles et le domaine didactique. Ceci semble indiquer la préoccupation des enseignants d'accompagner les apprentissages des élèves tout en les prenant compte dans la préparation de leur enseignement.

Enfin, quant aux compétences pour organiser un thème d'enseignement, le domaine didactique et celui des ressources externes sont les plus fréquents. Ce résultat semble traduire le souci des enseignants à proposer une progressivité adéquate des apprentissages des élèves tout en s'appuyant sur des ressources disponibles.

Les résultats de cette enquête seront approfondis grâce à l'analyse (en cours) des entretiens réalisés avec quelques enseignants du collège et du lycée et seront reliés à l'étude des pratiques effectives. Enfin, une étude comparative entre la France et le Brésil sera réalisée.

Références

Abric, J.-C. (1994). *Pratiques sociales et représentations.* Paris : PUF.

Bataille, M. et al. (1997). *Représentations sociales, représentations professionnelles, système des activités professionnelles.* L'année de la Recherche en Sciences de l'Education. Paris : PUF.

Bloch, I. (2005). Peut-on analyser la pertinence des réactions mathématiques des professeurs dans leur classe ? Comment travailler cette pertinence, en formation, dans des situations à dimension adidactique ? In *Actes du Séminaire National des Didactiques des Mathématiques*, Paris.

Gérard, F.-M. (2000). *Savoir, oui. . .mais encore !* Forum - pédagogies, 29-35. [en ligne http ://www.bief.be/index.ph consulté le 30 avril 2012].

Margolinas, C. (2002). Situations, milieux, connaissances : analyse de l'activité du professeur. In J.-L. Dorier et al. (Eds.), *Actes de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (pp. 141-156). Grenoble La Pensée Sauvage.

MEN (Ministère de l'Education Nationale) (2007). *Bulletin Officiel n1 du 4 janvier 2007* [en ligne http ://www.education.gouv.fr/bo/2007/1/MENS0603181A, consulté le 1er mars 2012].

Moscovici, S. (1976). *La psychanalyse, son image et son public.* Paris : PUF (2e édition).

Shulman, L. S. (1986). *Those Who Understand : Knowledge Growth in Teaching.* Educational Researcher 15(2), 4-14.

3.7 Un exemple d'appropriation d'un dispositif de recherche en classe par un jeune enseignant lors d'un stage de formation continue

Mathias Front*

* S2HEP - Université Lyon 1 et ENS de Lyon.
IREM de Lyon et IUFM de l'Académie de Lyon
mathias.front@laposte.net

RÉSUMÉ. *Le groupe "DREAM" a développé une ressource sur des situations de recherche et continue d'examiner les obstacles et les leviers à leur mise en œuvre dans la classe. Des expériences sur l'appropriation de la ressource par les enseignants est en cours. Nous rapportons ici le travail d'un jeune collègue au cours d'une session de formation continue.*

ABSTRACT. *The group "DREAM" has developed a resource about research situations and continues to examine barriers and levers to their implementation in the classroom. Experiments on the appropriation of the resource by teachers are ongoing. We report here the work of a young colleague during a training session continues.*

MOTS-CLÉS. *ressource, situations de recherche en classe, appropriation.*

KEYWORDS. *resource, research situations in class, ownership*

3.7.1 Introduction

Le groupe EXPRIME/DREAM travaille depuis de nombreuses années autour des situations de recherche pour la classe. En 2010, l'équipe a produit une ressource à destination en particulier des enseignants, du collège à l'université, et aux formateurs d'enseignants. La question de l'appropriation de cette ressource a fait l'objet d'un travail de mémoire de recherche (Aldon, 2008) et d'une expérimentation plus récente auprès d'enseignants expérimentés. Cette ressource est régulièrement utilisée dans le cadre de la formation initiale et continue des enseignants de l'académie de Lyon. Nous souhaitons ici rendre compte de la mise en place d'une situation de recherche dans une classe de sixième par un jeune enseignant engagé dans un tel stage de formation continue intitulé : « Enseigner par les problèmes, des compétences à enrichir. »

3.7.2 Présentation du dispositif de formation et des hypothèses retenues

Le plan académique de formation (PAF) de l'académie de Lyon propose depuis de nombreuses années un stage qui invite à réfléchir au rôle du problème dans l'enseignement. Ce stage s'adresse à des enseignants de collège et lycée volontaires et souhaite les convier à réfléchir à leur pratique sur cet aspect. Toutefois depuis la mise en place de la réforme de la formation des enseignants du second degré, le stage accueille également des collègues nouvellement titularisés, invités par l'institution Education Nationale à participer à ces stages du PAF.

Une partie du stage concernant les problèmes de recherche s'appuie sur une longue expérience de formation à l'IREM de Lyon et sur des travaux antérieurs de modélisation sur lesquels nous nous sommes appuyés en partie pour bâtir la formation. Nous avons retenu, par exemple, la posture suivante de Peix et Tisseron (1998) :

« Nous faisons l'hypothèse que la conduite réfléchie de problèmes de recherche est un instrument de développement de compétences professionnelles en ce qu'elle permet à l'enseignant d'expérimenter de nouveaux rôles, par exemple en donnant aux élèves davantage de responsabilités ».

Un des temps de la formation propose ainsi aux stagiaires d'élaborer, en vue d'expérimentation, une situation de recherche pour la classe. Avec Aldon (2008) nous utilisons alors le cadre de la TSD pour envisager la structuration du milieu dans cette situation de formation qui contient en particulier la ressource EXPRIME (2010) : « La ressource placée dans le milieu matériel des enseignants dans une phase d'action peut être mobilisée dans un milieu objectif et être un élément important de la construction et de la mise en place d'une situation de recherche dans la classe. Elle permet par ailleurs de projeter un enseignant dans une vision des milieux objectifs des élèves et de jouer un rôle dans la compréhension des actions des élèves dans une situation de recherche de problèmes. » Le milieu matériel dont il est question ici est constitué non seulement de la ressource exprime mais également des apports divers du stage, proposés avant ce temps de construction, mais également des ressources complémentaires que les stagiaires peuvent collecter. Pour le stage évoqué dans cet article, le temps de préparation de l'expérimentation en présentiel a été réduit, la charge de l'élaboration pour une grande part laissée aux stagiaires [3]. Nous observons ici le travail d'un stagiaire, en particulier, qui a rendu compte de son expérimentation lors d'un temps dédié au retour sur le vécu.

3.7.3 Présentation de la situation retenue par le stagiaire

Lien avec la ressource Exprime

Les situations de la ressource Exprime s'ancrent dans la problématique des situations de recherche pour la classe. Elles cherchent à permettre l'expression de connaissances des élèves lors de la confrontation à un problème et l'élaboration de nouveaux savoirs. Mais avec Conne (2004) nous retenons que « la notion de problème est impropre à désigner un objet. En fait, les problèmes ne se laissent pas identifier ni isoler comme cela, ils ne vont jamais seuls, on a toujours affaire à des chaînes de problèmes s'organisant en réseaux, à l'image des réseaux de savoirs qu'ils représentent ». C'est pourquoi les situations de la ressource sont associées à des « situations connexes » qui enrichissent le réseau de savoirs considérés. Il en est ainsi, par exemple, de la situation des « fractions égyptiennes » qui a été associée à trois situations mathématiques dont celle intitulée « Pavages archimédiens ». Au moment de l'élaboration de la ressource seul un développement mathématique de cette dernière situation a été proposé. Un travail de recherche épistémologique et didactique a depuis été réalisé autour de ce noyau et des documents ont été produits, (Front, à paraître), mais ils n'ont pas été mis à disposition des stagiaires. C'est cette situation que le stagiaire, désormais désigné par AG, a retenue.

La situation des pavages archimédiens du plan

La question mathématique considérée est la détermination de tous les pavages archimédiens du plan. Les travaux déjà réalisés autour de cette question ont montré qu'il est possible de produire une situation didactique permettant la dévolution et l'entrée dans une démarche d'investigation des pavages archimédiens. La dimension expérimentale des procédures potentielles est avérée et permet des constructions théoriques à différents niveaux qui structurent l'objet « pavages archimédiens du plan ». Une difficulté souvent rencontrée est l'avancée dans un processus de preuve qui amènerait à établir qu'il n'existe que 11 pavages archimédiens du plan. Cette difficulté ne sera pas considérée ici, AG expérimentant en classe de sixième et n'ayant pas d'objectif de cet ordre-là.

Les choix du stagiaire

AG a tout d'abord éprouvé le besoin d'enrichir sa documentation. Au document de la ressource Exprime sur les pavages archimédiens, il a adjoint la page d' « images des mathématiques » de Pierre de la Harpe sur les ornements et cristaux [4] et une fiche pédagogique sur les pavages du plan trouvée sur

3. Le dispositif du stage prévoit la possibilité d'échange à l'aide d'un forum et d'une plate-forme dédiée mais cette possibilité n'a pas ici été utilisée par les stagiaires

4. http ://images.math.cnrs.fr/Ornements-et-cristaux-pavages-et.html

un site de recherche en éducation belge [5]. Ce dernier document a été surligné et nous a ainsi permis de relever certains points jugés importants par AG.

Par exemple, a été mis en évidence le passage suivant : « [la fiche] décrit une possibilité d'activités dans une classe du premier degré, en mettant particulièrement en évidence les compétences mises en œuvre. Celles-ci relèvent à la fois des socles de compétence et des compétences terminales, ce qui n'a rien d'étonnant car il serait complètement absurde de considérer qu'il y aurait une coupure entre les deux types de compétences et que les compétences terminales ne se rencontrent pas avant le troisième degré ».

Ce choix fait le lien avec le travail en stage sur les compétences mais peut également indiquer que AG repère une situation pour le premier degré secondaire belge (donc potentiellement adaptable pour sa classe de sixième) et se conforte dans l'idée que la situation qu'il veut construire permet de travailler des compétences mathématiques.

AG repère également de nombreux points dans les rubriques intitulées « conditions de travail au départ » et « les moyens nécessaires ». Au-delà de la simple « récupération » clé en main d'une séance que l'on observe chez de nombreux jeunes collègues sans formation, on observe ici une réelle appropriation du document et des éléments proposés. AG réalise une discrimination des propositions, retient celles qui lui paraissent pertinentes. Quand il surligne « des groupes de 4 élèves disposant de formes polygonales diverses... », la mise en œuvre retiendra des groupes de 3 ou 4 élèves, où chaque élève dispose d'un type unique de polygone de façon à travailler d'abord les pavages réguliers du plan. Quand le document propose comme instruments « la règle et le compas », AG y ajoute le rapporteur. Pour former le milieu matériel, AG retiendra également du document belge l'apport « des polygones réguliers ayant tous même longueur de côté [avec] au moins des triangles, des carrés, des pentagones, des hexagones et des octogones ». Ce choix ne lui permettra pas de travailler sur la condition nécessaire de congruence des longueurs des côtés des polygones, mais ceci est assumé par les objectifs annoncés dans la fiche de préparation : « * Enoncer la condition nécessaire sur les angles en chaque sommet pour qu'un pavage puisse être réalisé. * Déterminer tous les types de pavages réguliers possibles. * Créer différents types de pavages semi-réguliers ».

Il est clair qu'AG cherche bien à proposer une séance permettant des apprentissages en termes de notions mathématiques. Pour autant AG rappelle en fin de fiche de préparation les autres compétences qu'il vise : « * Manipuler : Construire un pavage ; utiliser un instrument de mesure (rapporteur). * Raisonner, argumenter, pratiquer une démarche expérimentale : Emettre une conjecture, une hypothèse ; faire des essais. * Présenter la démarche suivie, les résultats obtenus, communiquer à l'aide d'un langage adapté : Présenter une conjecture par un texte écrit, à l'oral et lors d'un débat. * S'intégrer dans un projet collectif : Se positionner dans le groupe, donner son avis et prendre en compte celui des autres. * Assumer des rôles, prendre des initiatives et des décisions : se porter volontaire pour une tache, un rôle (ex : présenter à l'oral les travaux du groupe). »

Ainsi AG se positionne bien sur la mise en œuvre d'une situation permettant l'élaboration de résultats théoriques (mathématiques) sous un dispositif favorisant la démarche expérimentale. L'intention est affichée, il est clair que ceci n'assure en rien de la réalisation, surtout pour un jeune collègue. Pourtant de nombreux points mis en évidence dans la préparation laisse envisager qu'AG sera attentif aux variables essentielles qui permettent la réussite de telles mises en œuvre. On observe ainsi qu'AG cherche à s'assurer d'une bonne dévolution et qu'il souhaite proposer de réelles phases d'action où les élèves vont pouvoir faire l'épreuve des objets c'est-à-dire, d'après une expression de (Dias et Durand-Guerrier, 2008), réaliser « différentes formes de manipulation matérielle (pas seulement empirique) et symbolique (pas seulement verbales) [...] pour en prendre la mesure et susciter des opérations de formalisation. [6]

3.7.4 Retour sur l'expérimentation.

AG a donc expérimenté, comme attendu, cette situation de recherche avec deux classes de sixième. De retour en stage il est amené à rendre compte de ses séances. Il présente sa préparation, ses objectifs et les modalités de la mise en œuvre. Puis il décrit le déroulement effectif de ses séances et insiste sur les

5. http ://www.enseignement.be/index.php ?page=24778

6. Avec une mise en garde de Durand-Guerrier : « Le risque serait de succomber à une dérive empiriste et pragmatique (valorisant de façon excessive la seule expérience sensible et pratique de l'objet) : car « l'objet » impose en effet ses contraintes incontournables (il n'est pas seulement objet de pensée, mais un objet résistant à la pensée), délimitant ainsi a priori l'espace discursif dans lequel n'importe quoi ne peut pas être dit ».

manipulations et les productions des élèves. AG indique que les phases d'actions ont produit de nombreux dessins qui peuvent éventuellement s'interpréter comme des conjectures propices au débat. Notons que ceci ne peut s'avérer vrai que si la gestion effective permet les phases de formulation et de validation.

Les phases d'action

Les premières productions ont été réalisées lors des 5 minutes de travail individuel pendant lesquelles chaque élève tentait de réaliser un pavage régulier du plan avec un seul type de polygone régulier, distribué par l'enseignant. Les élèves ont produit, par exemple, des assemblages comme ceux des figures 3.4.

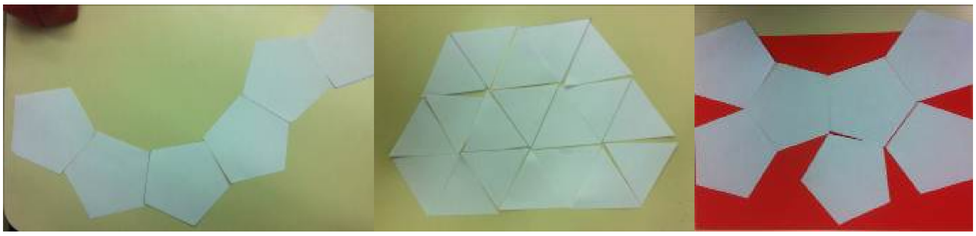


FIGURE 3.4 – Assemblages

A l'issue de ce temps, AG avait prévu une première mise en commun appelé aussi « bilan d'étape » Cette mise en commun a été réalisée sous forme de « sondage », s'appuyant sur deux questions : Quels sont ceux qui ont réussi ? Quels étaient les polygones utilisés ? Il n'y a pas eu de débat à ce moment. Le travail a été relancé par une consigne double : « 1) Créer des pavages semi-réguliers (on peut mélanger les différents polygones). 2) Y-a-t-il une ou des conditions pour qu'un pavage puisse être réalisé (en référence au bilan d'étape) ? » Les élèves avaient en plus de la réalisation des essais de pavages, à noter toutes les idées du groupe sur une feuille et leur réponse à la question 2).

Lors du stage, AG n'a pas rendu compte des écrits des élèves, il a montré de nouvelles productions d'élèves (figures 3.5)

FIGURE 3.5 – Productions d'élèves

Les phases de formulation et de validation

D'après AG ces phases se sont réalisées lors de la projection des photos des pavages des élèves et de la conclusion que chaque groupe devait produire concernant le critère de réussite. Les photos des figures 3.6 en rendent compte partiellement.

Ces photos illustrent bien, non seulement la volonté d'AG de mettre en place les phases de formulation et de validation, mais l'effectivité d'élaborations théoriques chez ces élèves de sixième. Les figures des candidats-pavages montrent bien, quant à elle, la richesse des débats possibles autour de cette condition nécessaire d'assemblage autour d'un nœud, avec toutefois la difficulté de traitement des candidats des figures 3.4 (3eme) et 3.5 (2eme), lorsque la géométrie de perception et la géométrie instrumentée ne permettent pas de trancher.

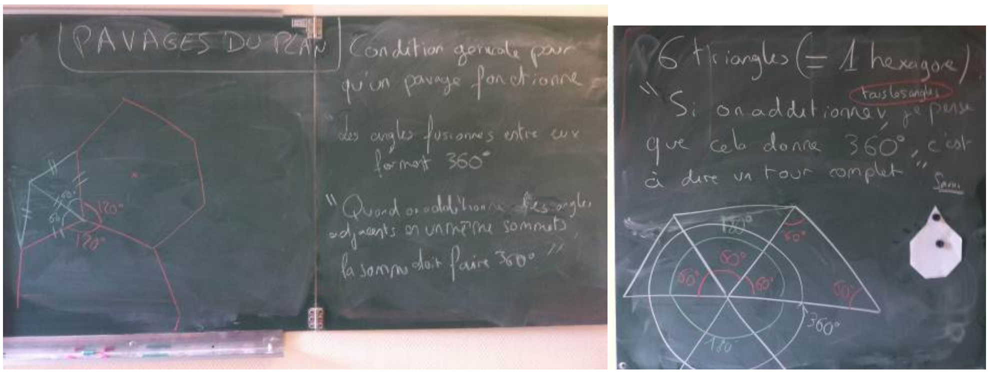


FIGURE 3.6 – Matériaux pour un débat

Une phase d'institutionnalisation

AG avait anticipé une phase d'institutionnalisation. Elle a permis d'instituer deux propriétés : « En chaque sommet d'un pavage la somme des angles doit faire 360. * Seul les polygones réguliers à 3, 4 et 6 cotés conviennent pour réaliser un pavage régulier. » AG a complété cette phase de synthèse par une « foire aux questions » et un échange sur l'intérêt et l'utilité ressentis de cette séance par les élèves. Cela apparaît ici comme une justification supplémentaire, pour un enseignant en phase de découverte du type de situation, des potentialités des situations de recherche en classe.

3.7.5 Conclusion

A travers cet exemple nous montrons encore une fois qu'il est envisageable et raisonnable de proposer des formations intégrant des mises en œuvre de situations de recherche en classe et cela y compris pour de jeunes enseignants. Même s'il est évident que tous les collègues ne se positionnent pas aussi facilement dans ce dispositif de formation il n'en reste pas moins que ce type d'expérience met en évidence une réelle appropriation de ce que peut être un dispositif de recherche en classe et ses potentialités. L'expérience montre toutefois que les scénarios de formation ne doivent pas négligés les difficultés de définition des objectifs et de mises en œuvre de telles situations. En effet pour certains jeunes collègues5, ou pour des collègues dont les conceptions sont trop éloignées de celles en jeu ici, l'appropriation des enjeux des situations se révèle difficile et nécessite a minima de longs échanges. Ces échanges seront d'autant plus efficaces que nous aurons à proposer des exemples de situations performants, c'est-à-dire montrant des élèves construisant réellement des connaissances. Il faut donc poursuivre notre double tâche qui vise à mettre en évidence les savoirs en jeu dans les situations de recherche que nous proposons, et également les élaborations effectives des élèves lors de leur mise en œuvre, de façon à proposer des dispositifs convaincant de transfert de ces situations aux enseignants.

Références

Aldon, G. (2008). *Analyse du rôle d'une ressource numérique dans la mise en place de problèmes de recherche dans la classe de mathématiques*, mémoire de master, Université Lyon1.

Aldon, G., Cahuet, P.-Y., Durand-Guerrier, V., Front, M., Krieger, D., Mizony, M., & Tardy, C. (2010). *Expérimenter des problèmes de recherche innovants en mathématiques à l'école.* Cédérom, coédition INRP-Université Lyon 1.

Conne, F. (2004). *Problèmes de transposition didactique.* Petit x, 64, 62-81.

Dias, T. et Durand-Guerrier, V. (2008). Faire l'épreuve des objets en mathématiques, le cas des polyèdres réguliers. In *Actes du colloque : Efficacité et équité en éducation*, Iufm de Bretagne et Université de Rennes, 2008.

Front M. (à paraître) *Pavages semi-réguliers du plan, une exploration favorable aux élaborations mathématiques.* Repères IREM

Peix, A. et Tisseron, C. (1998). *Le problème ouvert comme moyen de réconcilier les futurs professeurs d'école avec les mathématiques.* Petit x, 48, p. 5-21.

3.8 Représentations dynamiques des fonctions : quelle mise en œuvre au lycée, quelles ressources pour les enseignants ?

Roselyne Halbert, Jean-Baptiste Lagrange, Christine Le-Bihan, Bernard Le Feuvre, Marie-Catherine Manens, Xavier Meyrier, Tran Kiem Minh*

* Groupe Casyopée , IREM de Rennes
263, avenue du général Leclerc
35042 Rennes
minh.tran-kiem@bretagne.iufm.fr

RÉSUMÉ. *Le développement de technologies numériques apporte une contribution particulière aux représentations dynamiques des fonctions. Nous nous intéressons à la diffusion chez les enseignants de mathématiques de situations de classe tirant parti de cette potentialité de représentation. Dans ce texte nous exposons certains éléments d'un cadre conceptuel pour l'enseignement des fonctions puis une situation de classe exploitant ce cadre. Finalement nous indiquons comment ces éléments s'insèrent dans un ensemble de ressources destinées aux enseignants.*

ABSTRACT. *The development of digital technologies brings a special contribution to dynamic representations of functions. We are interested in the dissemination of classroom situations among mathematics teachers taking advantage of this potential of representation. In this paper we present elements of a conceptual framework for the teaching of functions then a classroom situation making use of this framework. Finally we indicate how these elements fit into a set of resources for teachers.*

MOTS-CLÉS. *fonction, ressource, cycle de modélisation fonctionnelle, Casyopée.*
KEYWORDS. *function, resource, functional modelling cycle, Casyopée*

3.8.1 Introduction

Les questions de représentation en « éducation mathématique » ont fait l'objet de nombreuses recherches. Le développement de technologies numériques pour l'enseignement des mathématiques est considéré comme apportant une contribution particulière en élargissant la diversité des représentations dynamiques et des moyens de les manipuler. Cette caractéristique est mise en valeur par la recherche dans le cas de l'enseignement et l'apprentissage des fonctions où la possibilité de relier différentes représentations et de basculer de l'une à l'autre est reconnue comme un élément important pour la conceptualisation. Une question à laquelle notre groupe s'intéresse est celle de la diffusion chez les enseignants de mathématiques de situations de classe tirant parti de cette richesse potentielle. Le logiciel Casyopée a pour ambition d'être une ressource pour cela. Il s'accompagne de ressources devant permettre aux enseignants de s'approprier des éléments théoriques et pratiques pour une mise en œuvre en classe. Nous exposons des éléments d'un cadre conceptuel pour l'enseignement des fonctions articulant des représentations dynamiques et des activités dans trois domaines, puis une situation de classe exploitant ce cadre. Nous indiquons comment ces éléments s'insèrent dans un ensemble de ressources destinées aux enseignants.

3.8.2 Un cadre conceptuel pour l'enseignement des fonctions

Il s'agit au début du lycée de rompre avec une conception « correspondance » qui a dominé au collège pour accéder à une conception des fonctions comme « modèles de dépendance ». Par conséquent, les tâches de modélisation fonctionnelle et les représentations dynamiques occupent une place particulière. Lagrange & Artigue (2009) ont proposé une typologie ayant pour but de classifier et de relier les activités auxquelles ces tâches donnent lieu. Cette typologie croise deux dimensions : les domaines de représentation des dépendances et les types d'activités sur ces dépendances. La prise en compte de trois domaines distincts (système physique, grandeurs et fonctions mathématiques) où s'exercent les activités sur les fonctions est basée sur l'idée que le concept de fonction est lié à l'expérience sensible des dépendances dans un système physique où s'observent des variations mutuelles d'objets. Les types d'activités (enactives-iconiques, transformationnelles, générationnelles et global-méta) sont inspirés du travail sur différentes représentations de l'analyse de Tall (1996), complété par le modèle des activités algébriques de Kieran (2007).

En nous appuyant sur cette typologie d'activités, nous proposons un cycle de modélisation pour approcher les fonctions grâce aux représentations dynamiques. Ce cycle permet de considérer des étapes dans un processus de construction d'un modèle mathématique pour étudier un système physique. Nous ajoutons la « Géométrie » pour prendre en compte ce domaine comme première étape de modélisation.

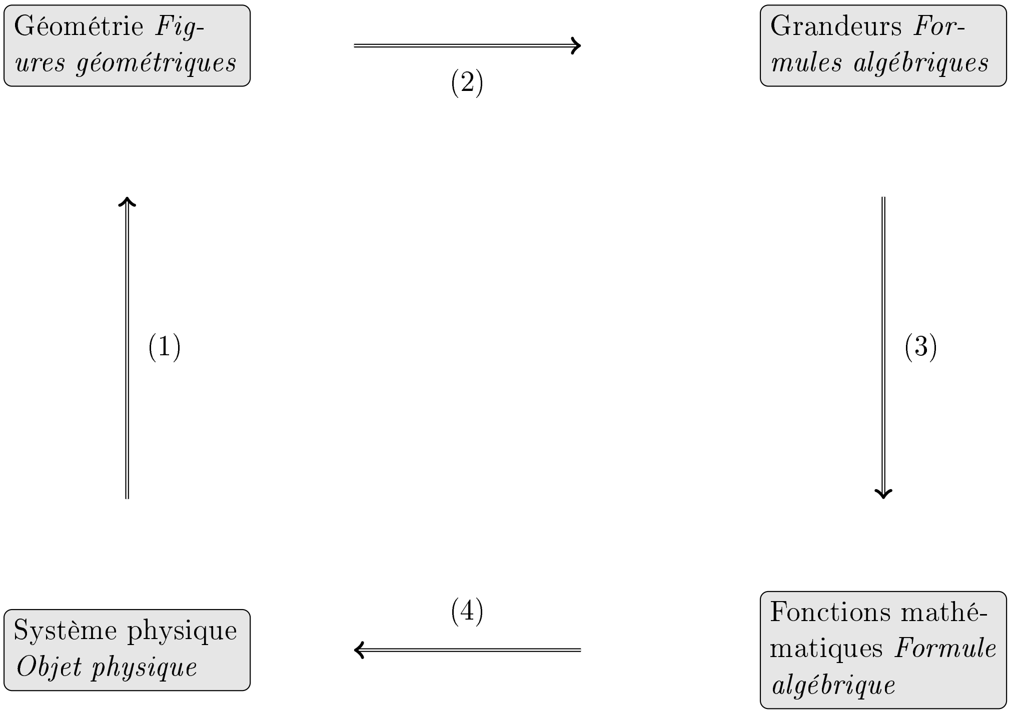


FIGURE 3.7 – Cycle de modélisation fonctionnelle

1. Modéliser le système par une figure géométrique dynamique
2. Créer des calculs géométriques, choisir une variable et créer une formule pré-algébrique exprimant la relation de dépendance
3. Représenter algébriquement la formule pré-algébrique
4. Interpréter et vérifier le modèle mathématique

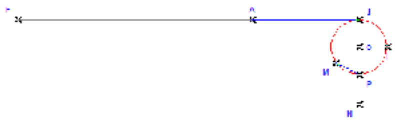
Le Système physique est un contexte réel étudié. Le passage du Système physique à la Géométrie est caractérisé par la construction d'une figure en géométrie dynamique. La Géométrie est le domaine où s'effectuent les explorations enactive-iconiques sur cette figure : les élèves peuvent déplacer des objets de la figure, observer comment elle se transforme, et concevoir dans un domaine mathématique des relations de dépendance analogues à celles qui existent entre objets du système physique. Le domaine des Grandeurs est celui où les élèves peuvent, à l'aide de l'ordinateur, quantifier des explorations et des observations et préciser des conjectures. La construction d'une formule exprimant la relation de dépendance entre grandeurs est une première étape vers une fonction algébrique. Le domaine des Fonctions mathématiques est celui où s'opèrent les transformations algébriques et les preuves pour répondre à des questions relatives au système physique. Finalement, le retour vers le Système physique a pour objectif d' interpréter les résultats obtenus dans le domaine mathématique.

3.8.3 Une situation pour l'enseignement des fonctions : étude du mouvement d'une nacelle avec Casyopée

On considère une roue circulaire, de 1m de rayon, mobile autour de son axe horizontal. Une corde de 12m de long est enroulée autour de la roue, de telle façon que si l'on tire la corde par son extrémité libre A, la roue se met à tourner. Une autre corde de 2m de long est fixée en un point M de la circonférence, elle passe par un guide P, proche de la roue, à 1m de l'axe et à la verticale de l'axe. La nacelle est accrochée à l'extrémité N de cette corde de 2m. Lors du lancement, le point A est en j et le point M est en i. On s'intéresse au mouvement du point N.

1. **Approcher le problème**
   Supposez que vous soyez dans une nacelle fixée au point N et que la corde de 12m soit tirée de façon uniforme. Décrivez vos sensations au moment où la nacelle passe au "point haut" et celle où elle passe au « point bas ».

2. **Concevoir une figure modélisant le problème**
   (a) Création d'un cercle de centre o et de rayon 1. Création du point repéré $E(-12\,;1)$, du segment $[jE]$, d'un point libre A sur le segment $[jE]$ et du point repéré $M(cos(jA)\,;sin(jA))$. Justifier les coordonnées du point M.



   (b) Terminer la figure en construisant le point N. Tester votre construction en déplaçant le point A.

3. **Étudier le problème**
   (a) Conjecturer le mouvement de la nacelle.
   (b) A l'aide du logiciel étudier la position de la nacelle en fonction de la longueur de la corde tirée. Comment cette étude permet-elle de justifier ou de compléter les réponses à la question 1 ?

FIGURE 3.8 – Fiche élève

Nous présentons en figure 3.8 une situation conçue pour l'enseignement des fonctions expérimentée cette année scolaire 2011 - 2012. L'expérimentation s'est déroulée en classe de Terminale au lycée René Cassin à Montfort-sur-Meu. Nous considérons cette situation comme particulièrement représentative du cadre conceptuel que nous venons de présenter.

L'objectif est d'étudier le mouvement d'une nacelle dans une situation réelle. Le mouvement a été choisi pour qu'une personne placée dans la nacelle ressente différemment le passage au « point haut » et au « point bas » quand la roue est animée d'un mouvement uniforme. Il est attendu des élèves qu'ils identifient cette différence et qu'ils l'associent avec des propriétés différentes de la fonction (dérivabilité et non-dérivabilité) modélisant ce mouvement. Dans la première phase les élèves explorent avec un dispositif physique (maquette avec roue d'un mètre de diamètre). Il leur est demandé de décrire les sensations qui pourraient être ressenties au moment où la nacelle passe au « point haut » et celles où elle passe au « point bas ». Nous attendons des élèves une reconnaissance du mouvement particulier de la nacelle : il s'agit d'un mouvement rectiligne et non uniforme, et d'un différent changement de sa vitesse quand elle passe au « point haut » et au « point bas ». Puis les élèves utilisent la géométrie dynamique pour poursuivre l'exploration, un point libre sur segment pilotant la rotation de la roue.

Ensuite les élèves utilisent les fonctionnalités spécifiques de Casyopée pour modéliser la dépendance fonctionnelle entre la position de la nacelle et la longueur de la corde tirée. Par exemple, si l'élève choisit la variable jA (la longueur de la corde tirée) et l'ordonnée du point N comme la valeur, la fonction exportée dans la fenêtre algébrique sera définie sur $[0\ ;12]$ et sa formule sera :

$$f : jA \leftarrow MP - 3$$

$$f(x) = \sqrt{2\sin x + 2} - 3$$

Les élèves peuvent ensuite travailler sur cette fonction et sa dérivée dans le registre des formules et celui des représentations graphiques. Casyopée offre la possibilité de visualiser ensemble la trace de la fonction dans la fenêtre graphique et le mouvement de la figure dynamique dans la fenêtre géométrique.

3.8.4 Observations en classe

Le système physique : les élèves ont des difficultés à imaginer un mouvement non uniforme, et les différences entre point haut et point bas ne sont pas toujours perçues nettement. Par exemple, certains élèves pensent que le mouvement de la nacelle est un mouvement uniforme par morceaux dont le graphique est représenté comme dans la figure 3.9.

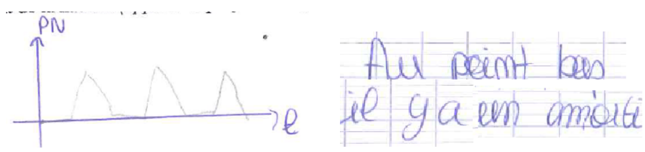


FIGURE 3.9 – Copie d'élève

La figure en géométrie dynamique : sa conception mobilise non seulement des connaissances sur les fonctionnalités de l'artefact mais encore des connaissances mathématiques en jeu. C'est particulièrement le cas quant il s'agit d'expliquer la construction du point M et de construire le point N.

Dépendances fonctionnelles entre mesures : la plupart des élèves ont choisi la distance jA comme variable et l'ordonnée yN du point N ou la distance PN comme l'image de la fonction.

Les fonctions mathématiques : Dans la fenêtre algébrique, les élèves ont fait apparaître la représentation graphique de la fonction exportée et aussi celle de la fonction dérivée. Ils ont généralement reconnu que deux points « cassés » sur le graphique de la fonction sont des points auxquels la fonction n'est pas dérivable et qu'ils correspondent à un changement « brutal » de vitesse de la nacelle lorsqu'elle passe au point bas (Figure 3.10).

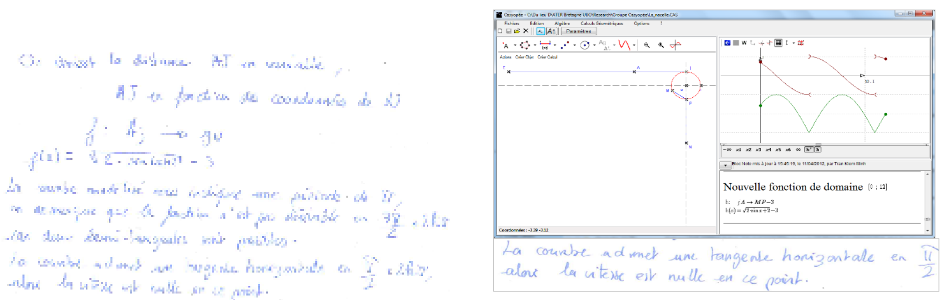


FIGURE 3.10 – Copie d'élève

Certains élèves ont essayé d'interpréter le mouvement particulier de la nacelle en termes de propriétés de la fonction exportée (figure ci-dessous). Par exemple, la dérivée représente la vitesse du mouvement, tandis que le rebond au « point bas » correspond à la non-dérivabilité de la fonction f en $x = \frac{3\pi}{7}$ et $x = \frac{7\pi}{2}$. A ces deux points le graphique de la fonction est « cassé ».

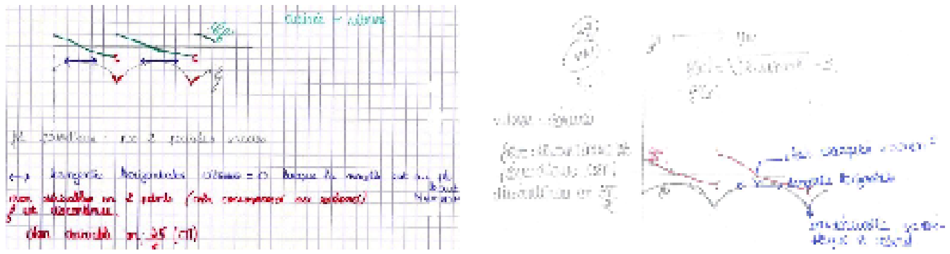


FIGURE 3.11 – Copie d'élève

Conclusion

Notre groupe poursuit cette année la mise en place de « mini-sites » devant offrir aux enseignants des ressources pour s'approprier les représentations dynamiques pour l'enseignement des fonctions[7]. L'expérience des mini-sites est fructueuse en ce sens qu'y sont présentes des ressources directement utilisables pour des formations. Néanmoins, le besoin se fait sentir d'une diffusion d'un cadre conceptuel donnant sens aux situations proposées et permettant de les organiser. Il s'agit de faire partager aux enseignants des idées comme celles de correspondance et de dépendance qui fondent la notion de fonction, et la nécessité d'articuler les représentations dynamiques dans les différents domaines de représentation. Nous avons choisi dans un premier temps un media papier (brochure IREM). La distinction correspondance - dépendance sera appuyée notamment par une étude historique du développement de l'idée de fonction. La situation de la nacelle sera choisie pour expliquer les différents domaines de représentation et la façon dont l'idée de fonction prend sens par l'articulation de représentations d'un phénomène dynamique dans les différents domaines, ainsi que la faisabilité de telles situations dans les classes.

Références

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels : Building meaning for symbols and their manipulation. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 707-762). Greenwich, CT : Information Age Publishing.

Lagrange, J.-B., & Artigue, M. (2009). Students' activities about functions at upper secondary level : a grid for designing a digital environment and analysing uses. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & C. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of 33rd Conference of the International Groupe for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, p. 465-472. Thessaloniki, Greece : PME.

Tall, D. (1996). Functions and calculus. In A. J. Bishop et al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (p. 289-325). Kluwer Academic Publishers.

7. http ://casyopee.eu

3.9 Conception de ressources et apprentissage des mathématiques à l'école primaire

Sophie Soury-Lavergne*, Anne Calpe*

*IFÉ, ENS de Lyon
Laboratoire S2HEP
19 allée de Fontenay
69347 Lyon

Un thème spécifiquement consacré aux mathématiques à l'école primaire est une première pour les journées mathématiques de l'IFÉ. Des travaux emblématiques sont menés depuis longtemps par l'INRP, tels que ceux de l'équipe ERMEL ou du laboratoire ADEF à l'école Saint Charles de Marseille. L'importance de ce thème dans le programme scientifique et de recherche de l'IFÉ se traduit non seulement dans la reconnaissance de la contribution de nos collègues enseignants du primaire par le statut d'enseignant associé, mais surtout dans le lancement de nouvelles actions qui traitent notamment des tous premiers apprentissages (cycle 1-cycle 2, de la maternelle), de la question des technologies et de celle de l'articulation entre les disciplines. L'atelier 3 a travaillé ce thème à partir de questions relatives :

- aux situations mathématiques proposées aux élèves en maternelle et élémentaire pour la conceptualisation mathématique : résolution de problèmes, gestes et manipulation concrète d'artefacts, utilisation des tice, démarche d'investigation etc.
- aux processus de conception de ressources, au sein de collectifs d'enseignants et de chercheurs, pour l'enseignement de notions clefs du socle commun,
- à l'appropriation des ressources par les enseignants, aux processus de mutualisation, d'adaptation et de transformation de ces ressources qui permettent d'aboutir à une mise en œuvre en classe - au développement professionnel des enseignants et à la formation.
- aux interactions entre les enseignants du primaire et du secondaire dans les groupes de travail et les espaces de mutualisation : enrichissement et meilleure compréhension des approches respectives des apprentissages.

3.10 Connaissances géométriques et géométrie dynamique en cycle 3

Francine Dubreucq-Athias*

Université de Franche-Comté
francine.dubreucq@univ-fcomte.fr

RÉSUMÉ. *Quelles sont les conditions et les contraintes pour qu'une situation de géométrie dynamique puisse mettre en évidence, pour des élèves de cycle 3, les relations entre les objets géométriques ?. L'exposé présente l'étude d'une situation sur le rectangle, proposée à des enseignants qui l'adaptent en fonction de leur classe. L'analyse a priori est faite à partir du quadruplet (T, tau, theta, Theta) issu de la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1998). L'analyse de l'action, pendant le déroulement de la situation en classe s'appuie sur les catégories proposées par la Théorie de l'Action Conjointe en Didactique (Sensevy, 2011) : définir, dévoluer, réguler, institutionnaliser. Dans l'exemple étudié, j'essaie de mettre en évidence comment le Professeur et les Elèves sont amenés à travailler, dans un nouvel environnement (tracenpoche), une connaissance mathématique qu'ils ont déjà travaillée dans l'environnement papier/crayon, ici la perpendicularité. J'examine ainsi l'effet potentiel de la géométrie dynamique dans le renforcement d'un concept géométrique.*

ABSTRACT. *I study in this communication how a situation of dynamic geometry allows to highlight the relationship between geometric objects for Students (9-11 years old). The paper presents the study of a situation, it's about the rectangle. The Teachers adapt it according to their class. The a priori analysis is based on the Anthropological Theory of Didactics (Chevallard, 1998), with the notions of task, technic, technology and theory. The analysis of the Teachers and Students joint action during the session is based on the categories proposed by the Joint Action Theory in Didactics (Sensevy, 2011) : defining, devolving, regulating, institutionalizing. I try to highlight how the Teacher and Students are required to work in a new environment (tracenpoche) on a mathematical knowledge they have already worked in the paper/pencil environment. So I examine the potential effect of the dynamic geometry in the strengthening of a geometric concept.*

MOTS-CLÉS. *géométrie dynamique, action conjointe, didactique.*
KEYWORDS. *dynamic geometry, joint action, didactics.*

3.10.1 Introduction

Je vais essayer d'exposer une de mes questions de recherche et de la préciser. L'état actuel de mon travail est exploratoire : j'essaie de poser quelques repères. Mon travail concerne les conditions et les contraintes pour qu'une situation de géométrie dynamique puisse mettre en évidence, pour les élèves de cycle 3, les relations entre les objets géométriques. Autrement dit, comment faire en sorte que les élèves soient amenés à tenir compte des propriétés géométriques de leur construction, soit au moment de leur élaboration, soit au moment de leur validation ? Mon exposé présente l'étude d'une situation sur le rectangle, proposée à des enseignants qui l'adaptent en fonction de leur classe et de leurs contraintes propres.

3.10.2 Cadre théorique

Analyser la situation proposée aux élèves d'un point de vue mathématiques, nécessite de caractériser la tâche qui leur est dévolue. Je vais donc faire une analyse a priori à l'aide du quadruplet (T tâche, τ technique, θ technologie, Θ théorie) issue de la théorie anthropologique du didactique élaborée par Yves Chevallard, avec T désignant ce qui est à faire, τ désignant ce qui permet de le faire, θ désignant le discours qui justifie ces techniques et Θ désignant les éléments mathématiques qui soutiennent ces justifications.

Analyser, pendant le déroulement de la situation en classe, la réalité de l'action nécessite de caractériser d'une part l'action de l'élève qui prend sa source dans le milieu en fonction du contrat et d'autre part l'action du professeur qui prend sa source dans les réactions des élèves. J'utiliserai pour cela des catégories proposées par la théorie de l'action conjointe en didactique, élaborée par Gérard Sensevy et Alain Mercier. Ainsi, nous utiliserons le terme de jeu, ce qui nous permettra d'approcher ses enjeux, ses règles définitoires et stratégiques, le gain qu'il permet d'atteindre. Pour caractériser ces nouveaux jeux dans l'environnement dynamique, nous nous appuierons sur le quadruplet (définir, dévoluer, réguler, institutionnaliser).

3.10.3 Analyse théorique de la situation

Ma proposition aux enseignants

J'ai proposé cinq situations de géométrie dynamique à un enseignant, en utilisant le logiciel tracenpoche (teP). Elles ont été conçues de manière à tenir compte des connaissances mathématiques et instrumentales. Le choix a été de maintenir une juste distance entre l'ancien et le nouveau (Assude). Les situations évoluent également pour passer d'une initiation instrumentale à une symbiose instrumentale en passant par un renforcement instrumental (Assude). Enfin, des tâches ont été proposées soit dans l'environnement papier/crayon, soit dans l'environnement tracenpoche, soit dans les deux environnements successivement. La situation concernant le rectangle est la seconde. Les élèves ne sont pas encore familiarisés avec tracenpoche. Elle est composée de différentes phases. Elle a été adaptée de la situation des rectangles de la thèse de Angela Maria Restrepo.

Phase 1 :

Un rectangle est à compléter dans l'environnement papier crayon avec la règle non graduée et l'équerre, puis dans tracenpoche.

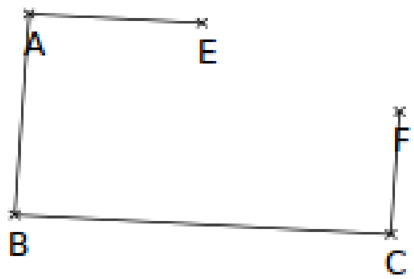


FIGURE 3.12 – Rectangle incomplet

L'absence des graduations sur la règle et celle du compas doivent permettre de travailler avec les droites et non pas avec les longueurs des segments. La construction sur la feuille doit permettre de mettre en évidence une stratégie transposable sur tracenpoche, à l'exception du choix de points pour tracer le point D. En effet, le logiciel demande de choisir d'abord « point d'intersection » avant de le placer. Enfin, le déplacement des différents points déplaçables du rectangle permet de valider la construction.

Phase 2 :

Un rectangle est à compléter dans les deux environnements.

Phase 3 :

À partir d'une observation d'une photographie d'une construction architecturale, le pont du Gard, les élèves mettent en évidence un rectangle et un cercle. Le travail sur la chronologie du tracé est à la charge de l'élève. Les élèves doivent construire dans l'environnement tracenpoche un cercle dont un diamètre est un côté d'un rectangle.

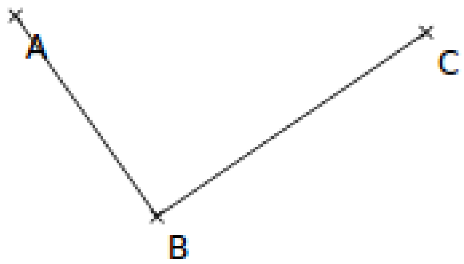


FIGURE 3.13 – Rectangle incomplet

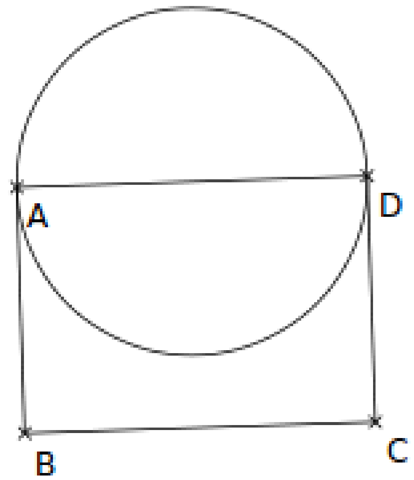


FIGURE 3.14 – Rectangle incomplet

Un exemple de mise en œuvre

Un enseignant a mis en œuvre dans sa classe et a traité la situation de la façon suivante, dont un synopsis est décrit dans le tableau 3.1

On peut regrouper les différents temps de la situation en 5 phases. La première phase (temps 1) consiste en une reprise de la séance précédente. Lors d'une deuxième phase (temps 2, 3, 4, 5), les élèves sont confrontés à un rectangle vidéoprojeté sur le tableau blanc. Ils doivent le reconnaître et justifier. Le temps 6 contient en fait les phases 3 et 4. Lors de la phase 3, les élèves sont amenés à compléter un rectangle puis à reproduire un dessin sur une feuille blanche. Lors de la phase 4, les élèves doivent terminer un rectangle et construire un rectangle dans l'environnement tracenpoche. Ces deux phases se déroulent successivement par demi-classe, certains élèves commençant dans l'environnement papier/crayon, d'autres dans l'environnement tracenpoche. La dernière phase consiste en en une reprise collective du travail effectué. Nous allons nous attacher à décrire le travail dans l'environnement tracenpoche, à savoir compléter le rectangle.

Analyse du savoir pour la phase 4 :

Dans l'environnement tracenpoche, la tâche T1 consiste à placer le point D tel que $ABCD$ est un rectangle, la tâche T2 à vérifier que le quadrilatère obtenu est un rectangle.

En terme de techniques, nous pouvons repérer deux types de techniques, d'une part des techniques perceptivo-théoriques (selon Assude) qui tiennent compte des propriétés géométriques τ 1, 1, teP -choisir la fonction perpendiculaire, sélectionner puis valider le point A, sélectionner puis valider la droite (AB), même chose avec (BC) et choisir le point d'intersection en sélectionnant et validant successivement les deux droites)-, τ 1, 2, teP -Choisir la fonction parallèle, sélectionner puis valider le point A, sélectionner puis valider la droite (BC), même chose avec (AB) et choisir le point d'intersection en validant successivement les deux droites- ou un mélange de ces deux techniques et d'autre part un technique perceptive

Temps	Phases	Type de tâches	Matériel	Organisation
0- 6 min	**1**	Temps 1 : reprise de la séance précédente		Collectif
7- 13 min	**2**	Temps 2 : reconnaissance d'un rectangle et justification	Dessin d'un rectangle vidéo-projeté	Collectif
14- 22 min		Temps 3 : Passation de la consigne papier (1)	Dessin avec A, B et C vidéoprojeté	Collectif
22-23 min		Temps 4 : Passation de la consigne sur teP		Collectif
24- 27 min		Temps 5 : passation de la consigne papier (2)	Dessin vidéoprojeté	Collectif
28min-1h10	**3-4**	Temps 6 : travail sur teP pour 1/2 classe, et sur papier-crayon pour 1/2 classe, avec changement à mi-séance.	Ordinateur et feuille	Binôme
1h11-1h27	**5**	Temps 7 : reprise collective	Résultats des élèves sur teP	Collectif

TABLE 3.1 – Synopsis de la situation.

τ 1, 3, teP -choisir un point libre appelé D puis tracer les segments $[AD]$ et $[DC]$.

Relativement à la tâche T2, nous retenons la technique τ 2,1,teP -déplacer les points déplaçables et vérifier perceptivement que le quadrilatère reste un rectangle.

Le discours qui permet de justifier ces techniques repose sur la programmation du logiciel teP qui permet de tracer automatiquement les perpendiculaires et les parallèles, à condition d'utiliser les menus déroulants.

Le déplacement sert pour la vérification. C'est ce qui garantit la conformité aux propriétés mathématiques. On a donc potentiellement des nécessités qui peuvent engager l'élève dans des techniques plus proches de la géométrie.

La construction du rectangle $ABCD$ repose sur la propriété, un quadrilatère est un rectangle si et seulement si il a trois angles droits. Dans l'exercice consistant à compléter le rectangle à partir de trois points donnés, la technique du tracé des perpendiculaires met en évidence trois angles droits. Par contre, la technique du tracé des parallèles permet de construire un rectangle en tant que parallélogramme ayant un angle droit.

3.10.4 Analyse de la situation effectuée

Les moments de travail en géométrie dynamique se situent au milieu de la séance (28min à 1h10) puis à la fin de la séance (1h11 à 1h27). En milieu de séance, les élèves travaillent en binôme dans l'environnement tracenpoche. Puis les élèves sont en classe, le travail de chaque groupe est projeté et commenté. Nous allons nous intéresser à ces deux moments.

Le jeu

a) Définir :

Le professeur P a défini la tâche dans l'environnement papier/crayon (de 14 à 22 min). Il propose de faire le même travail sur tracenpoche : « C'est aussi le travail que je vais vous demander sur l'ordinateur » dit-il à la minute 22. Nous voyons que l'objet du dispositif est annoncé oralement par P, mais aucune indication n'est donnée sur l'accès à l'environnement de travail, ni sur les moyens mis en œuvre pour terminer le rectangle, ni sur les méthodes de validation. Autrement dit, la tâche est définie : les élèves savent qu'ils doivent obtenir un rectangle. En accédant à leur espace de travail, les élèves peuvent relire la consigne, accessible en permanence :

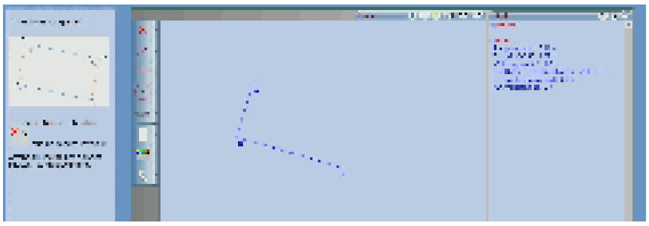


FIGURE 3.15 – Travail sur Mathenpoche

La définition de la situation repose donc sur une partie orale dans l'environnement papier/crayon et sur l'énoncé écrit de la consigne. Le rectangle représenté a la même orientation que le début du rectangle à représenter. Il a également trois angles droits, ce qui permet de conclure que le quadrilatère est un rectangle. Mais du point de vue de l'élève, quatre seraient nécessaires. Cet élément ostensif, présence des angles droits peut influencer la construction des perpendiculaires en A et en D, alors que ce dernier point est à construire. Autrement dit, les élèves ont une tâche, une part du jeu est définie à travers des consignes dans l'environnement papier/crayon, une part est définie par des règles explicites ie attention, les points doivent résister au déplacement, une part est définie par des règles non explicitées, ie comment faire pour que, lors du déplacement, la construction conserve ses propriétés par exemple.

b)Dévoluer :

L'utilisation des fonctions de tracenpoche est à la charge des élèves dans le binôme. Ces fonctions embarquent les connaissances mathématiques. L'utilisation pertinente des fonctions permet de construire le rectangle attendu et permet dans le même temps de se familiariser avec l'environnement tracenpoche. La validation par le déplacement est rappelée dans la consigne, mais elle est également à la charge de l'élève.

c) Réguler :

Pendant la phase de recherche, l'enseignant se déplace de binôme en binôme pour rappeler un certain nombre de règles. Cependant, la plupart du temps, les élèves sont en binôme et voient peu l'enseignant.

d) Instituationnaliser :

C'est au moment du bilan de la séance que les élèves vont expliquer les difficultés qu'ils ont rencontrées. Ainsi, l'identification de la difficulté rencontrée est à la charge de l'élève. Ce dont témoigne l'intervention du professeur à 1h13 : « E, des soucis ? », alors que le résultat de son travail est présenté à la classe.

Quelques extraits

a) Extrait 1 :

Deux élèves E1 et E2 découvrent l'espace de travail. Ils ne lisent pas l'énoncé à voix haute. L'un d'eux s'étonne : « Il n'y a pas d'équerre ? ». Puis l'autre déroule le bandeau et dis « Tu vois tu l'as ! ».

Éléments d'interprétation :

Dans le groupe, le premier élève E1 est resté avec le vocabulaire de l'environnement papier/crayon. Le second élève E2 lui montre qu'il suffit de dérouler le bandeau pour trouver le bouton perpendiculaire. E1 reconnaît l'icône perpendiculaire. Cependant, à aucun moment, le mot perpendiculaire n'est prononcé, ni par E1 ni par E2. L'outil équerre porte la notion d'angle droit.

b) extrait 2 :

E1 choisit le bouton parallèle, sélectionne et valide A, puis sélectionne et valide (BC). Puis il déplace la souris pour tracer une seconde parallèle et ne sait pas où sélectionner. Un échange a lieu pour savoir quels objets sélectionner, uniquement en terme de « là ». Finalement les élèves sélectionnent la droite (BC) puis créent un point D, situé de manière perceptive sur la droite qu'elles viennent de tracer.

Élément d'interprétation :

Les élèves complètent le rectangle en traçant les parallèles. Ils utilisent la technique τ1, 2,teP que nous avions envisagée dans l'analyse a priori. Cependant, le rectangle proposé ne résiste pas au déplacement.

En effet, le point D est un point quelconque du plan. L'insuffisance des connaissances instrumentales ne permet pas aux élèves de placer correctement le point D. En cela, nous pourrions conclure en première analyse que l'environnement dynamique est un obstacle à l'apprentissage des connaissances mathématiques, puisque le quadrilatère proposé est un quadrilatère qui a ses côtés opposés parallèles et qui a un angle droit. Pourtant, il n'est que le révélateur d'une technique invisible dans l'environnement papier-crayon (cf illustration 3.16). En effet, sur la feuille de papier, les élèves auraient tracé la parallèle à (BC) passant par A en faisant coulisser l'équerre sur la règle jusqu'à atteindre le point A. Par contre, le même processus les aurait conduit à tracer la parallèle à (AB) passant par le point virtuel D, puisque l'équerre passerait nécessairement par C. Ici, l'environnement dynamique met en évidence la nécessité de comprendre la chronologie de l'action, laquelle n'apparaît pas dans l'environnement papier-crayon.

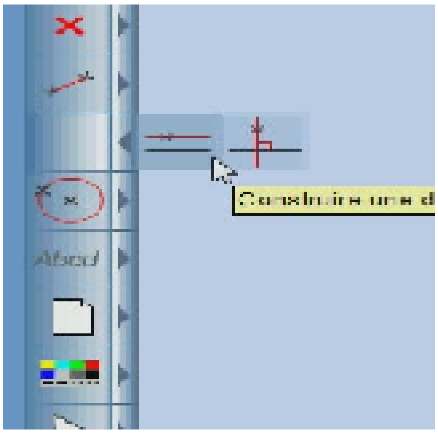


FIGURE 3.16 – Révélateur d'une technique invisible.

Illustration :

Dans l'environnement papier-crayon, les élèves ne peuvent pas expliciter ce qu'ils tracent. Ils expliquent qu'ils construisent la parallèle sans plus de précision, ou la parallèle passant par D (alors qu'il n'est pas encore construit)

c) Extrait 3 :

E1 et E2 ont tout effacé : ils recommencent le travail. Ils cherchent maintenant à tracer des perpendiculaires. Ils lisent le bandeau jaune, qui donne les informations sur les éléments à valider au fur et à mesure. Ils font plusieurs essais.

Éléments d'interprétation :

Ils changent de techniques. Les rétroactions du milieu ont un effet radical. Ils savent que leur construction est fausse, car elle ne résiste pas au déplacement. Mais ils n'ont aucune indication sur les modalités qui leur permettraient de gagner. Au lieu de réfléchir à leurs techniques, ils choisissent de faire autrement.

Ils utilisent les perpendiculaires, τ1,1, teP de notre analyse a priori. Contrairement à leur façon de faire précédemment, ils lisent les bandeaux. : ils cherchent à savoir quel point et quelle droite ils doivent sélectionner. Ils anticipent le résultat qu'ils veulent obtenir. Lorsque la droite obtenue ne correspond pas à ce qu'ils attendent, ils effacent et recommencent. L'environnement tracenpoche les conduit donc, d'une part à anticiper le résultat de leur action. D'autre part, il les conduit à établir une relations entre les droites. Au cours de leurs échanges, ils nomment les points par la lettre, par contre la droite reste « ça », en étant montrée avec la souris.

c)Extrait 4 :

C'est au moment du bilan de la séance que les élèves vont expliquer les difficultés qu'ils ont rencontrées. Un des élèves du binôme explique qu'il a rencontré des difficultés. Le professeur P lui demande d'aller au tableau pour expliquer. Lorsque l'élève E1 explique ce qu'il a fait, le professeur P déplace tous les points déplaçables du rectangle. L'élève explique qu'avec les perpendiculaires, il ne savait pas où cliquer.

Éléments d'interprétation :

Le bilan de la séance consiste à expliquer les difficultés rencontrées lors de la construction sur tracenpoche. La centration sur le savoir mathématique est déplacé sur les connaissances instrumentales. En effet, le rectangle construit sur tracenpoche est le centre d'intérêt. E1 ne s'adresse pas à la classe, ni au professeur. Il décrit ce qui lui est arrivé en regardant le rectangle. Nous avons également ici une nouvelle organisation dans la classe : le dessin présenté au tableau n'est pas celui qu'il a fait puisque le professeur P a déplacé les points. Pourtant, il continue d'expliquer sur le rectangle. Le professeur P continue à déplacer le rectangle, sans évoquer la robustesse de la construction. Puis, un changement s'opère.

e) Extrait 5 :

Le professeur P prend la parole à la suite de E1 à 1h14 : « Tout le temps, il faut que vous construisiez votre phrase aussi dans votre tête. Je veux tracer la perpendiculaire à cette dr…, à ce segment, qui passe par ce point. »

Éléments d'interprétation :

Le professeur P reprend la main. Il fait la construction sur tracenpoche, puis explique avec les mains. Pour aider à surmonter le problème instrumental, il s'appuie sur le triplet mathématique : perpendiculaire + à ? + passant par ?.

3.10.5 Conclusion

Dans mon travail, j'essaie de montrer comment les relations géométriques entre les objets sont travaillées en géométrie dynamique. L'exemple étudié met en évidence des difficultés qui peuvent être induites par l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique. Dans le même temps, il met en évidence qu'une connaissance mathématique peut être travaillée dans ce nouvel environnement avec pour effet potentiel de renforcer le concept. Cependant, il faut noter que l'actualisation de ce concept dépend beaucoup de l'action du professeur qui doit inclure le logiciel dans le déroulement de la séance. C'est pourquoi je dois étudier également comment il l'inclut. Cet exemple n'était destiné qu'à illustrer la façon dont je souhaite poser un certain type de problèmes dans mon travail de thèse.

Références

Assude, T. et Gelis, J-M. (2002). *La dialectique ancien-nouveau dans l'intégration de cabri-géomètre à l'école primaire*, Educational Studies in Mathematics, n5.

Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. In Noirfalise, R (Dir)., *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques*, Actes de l'université d'été (p 89-118). Clermont-Ferrand : IREM

Restrepo, A-M. (2008). Génèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de 6ème (thèse de doctorat). *Université de Grenoble.*

Sensevy, G. & Mercier, A. (2007). *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves.* Rennes : PUR.

Sensevy, G. (2011). *Le sens du savoir Eléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique.* Bruxelles : De Boeck.

3.11 Apprentissages mathématiques à l'école et ressources pour les enseignants

Jacques Douaire*

Equipe ERMEL - IFé ;
LDAR ; IUFM de Versailles - UCP

RÉSUMÉ. *Cette communication a pour but d'expliciter les questions actuelles que nous nous posons sur la production des ressources valorisant les résultats de notre recherche et en particulier sur la rédaction des dispositifs d'enseignement.*

ABSTRACT. *This communication aims to explain today's questions that are asked about the production of resources as validation of our research and particularly on the writing of learning systems*

MOTS-CLÉS. *Ressources, manuels*

KEYWORDS. *Resources, material*

3.11.1 Présentation

L'équipe ERMEL[8] a conduit des recherches sur les apprentissages mathématiques à l'école, d'abord dans le domaine numérique puis géométrique. Le but de la recherche actuelle est d'analyser les compétences spatiales et géométriques que les élèves de l'école primaire, principalement au cycle 2, peuvent construire par l'utilisation conjointe de différents environnements notamment des logiciels de géométrie. Cette recherche conduit à la production de savoirs sur ces apprentissages et à la production de ressources pour les enseignants et les formateurs. La méthodologie de la recherche comporte :

1. Une analyse du savoir géométrique (problèmes, propriétés...), ainsi que des connaissances spatiales que les élèves ont pu développer.
2. L'organisation de l'étude des différentes notions spatiales et géométriques, sur les trois années du cycle.
3. L'élaboration de situations didactiques et leur expérimentation dans plusieurs académies.

   Ces trois composantes sont en interaction : l'identification des potentialités des élèves étant aussi issue des expérimentations menées.
4. La rédaction d'un ouvrage pour les formateurs et pour les enseignants du premier degré comportant une explicitation des enjeux des apprentissages et des problématiques de l'enseignement dans ce domaine et parmi les dispositifs d'enseignement expérimentés, les progressions et les situations qui ont été retenues).

Cette méthodologie et les résultats seront explicités à partir de l'étude d'un des nombreux thèmes relatifs aux apprentissages spatiaux et géométriques au cycle 2, celui de l'alignement.

3.11.2 L'étude d'un apprentissage : celui de l'alignement

L'approche de la droite peut être appréhendée par les élèves du cycle 2 à travers différentes significations liées à la perception ou l'expérience : un objet matériel (fil tendu, bord d'un objet rectiligne, pli d'une feuille...), un objet du monde graphique (trait rectiligne, tracé sur un écran par l'outil « droite »

8. Equipe ERMEL : Fabien Emprin, Claude Rajain (IUFM Champagne-Ardenne), Henri-Claude Argaud, Gérard Gerdil-Margueron (IUFM de Grenoble), Georges Combier, Marie-Paule Dussuc (IUFM de Lyon), Jacques Douaire, (IUFM de Versailles) ainsi que Marianne Frémin et des professeurs des écoles et des maîtres formateurs. Responsable : Jacques Douaire

dans Cabri)... Ces significations sont associées à des problèmes portant sur l'identification, la production d'alignements ou de traits rectilignes, et sur la reconnaissance ou l'usage d'instruments utilisés dans ces buts.

Premiers résultats expérimentaux au CP et au CE1

Compte tenu de ce que nous avions mis en évidence sur le cycle 3,2 nous avions envisagé, au début de la recherche cycle 2, une appréhension de la notion d'alignement favorisée par le passage d'expériences spatiales centrées sur l'idée de cacher un objet (au moyen de la visée) à partir d'activités vécues dans le méso-espace, reprises ensuite sur feuille dans le but de mettre en évidence l'utilité du recours à la ligne droite. Une de ces situations « Plots » se déroule dans la cour (ou un gymnase...) : les élèves ont à trouver des emplacements pour qu'un plot en cache un autre.

Ces expérimentations ont mis en évidence des liées au passage d'activités menées dans le méso-espace à des activités sur à la feuille de papier. Dans la résolution du problème « Plots » sur feuille (représentant une vue de dessus des plots dans la cour vécue précédemment) les élèves, ne recouraient pas à des lignes droites pour trouver les emplacements ; les alignements étant figurés, en général, sous la forme de lignes brisée. Toutefois, lors de la reprise de la situation « Plots » sur Cabri (avec un recours à des vues en perspective simulant la 3D) les élèves produisaient une solution correcte en utilisant des droites pour placer un plot en cachant un autre.

Ces résultats expérimentaux ont aussi mis en évidence la nécessité d'un travail spécifique permettant l'appréhension en acte des significations et de certaines propriétés de la droite dès le cycle 2. Ce travail sur la « rectitude », indépendant de la représentation d'alignement de points, fait l'objet d'une expérimentation actuelle.

Un apprentissage spécifique de la rectitude

Parmi ces significations du trait droit, celles privilégiées dans nos situations pour le CP sont celles de bord de bandes parallèles, de contour d'une figure, de trait comme réunion de segments rectilignes. Les critères de validation sont soit simplement perceptifs (régularité du tracé ou ressemblance avec un modèle) soit en relation avec une référence plus ou moins explicite au parallélisme (direction...), soit constitués par une validation pratique (coïncidence des extrémités, superposition, actions sur les objets...)

À ces significations peuvent être associés des problèmes concernant soit :

- la production de traits rectilignes ;
- l'identification de traits rectilignes (jugement) ;
- la reconnaissance et l'usage des instruments susceptibles d'être utilisés pour identifier où produire un alignement ou une ligne droite.

Différents niveaux de maîtrise peuvent être associés à ces significations

- comprendre le but à atteindre ; c'est-à-dire qu'il faut tracer un trait droit pour résoudre le problème (ou que le trait droit est solution du problème, c'est ici le rôle des formulations (validation par le langage, assez consensuelle), rôle des gestes (main levée) ;
- savoir comment il faut placer la règle pour tracer un trait plus long que celle-ci ; il s'agit de la connaissance de la technique (report de la règle) et l'aspect technologique : nommer les outils, décrire l'action...
- maîtrise de la technique de tracé (validation par la production).

Ce travail sur la notion de « rectitude », bien qu'il puisse être amorcé en GS avec la production de tracés réguliers effectués dans des activités de dessin, ne prend réellement sa dimension géométrique qu'au CP où des propriétés du trait droit peuvent donc être appréhendées. Ces propriétés ne sont pas encore des objets d'étude pour elles mêmes, mais constituent d'abord des expériences :

- un trait peut représenter quelque chose qui n'a pas laissé de trace matérielle (ex : visée) ;
- un trait peut être associé à des instruments ;
- un trait peut être prolongé, par exemple pour représenter un objet caché.

3.11.3 Des questions posées par l'appropriation de ces ressources

Les dispositifs (progressions, situations) que nous avons élaborés privilégient une construction de connaissances s'appuyant sur la résolution de problèmes. Ils présentent une certaine « robustesse » liée notamment à ce que les résultats et procédures qui seront produits par les élèves dans une classe sont exposés dans le descriptif des situations, ce qui permet au maître, en général non spécialiste des mathématiques, de pouvoir anticiper ses décisions en fonction des productions propres à sa classe. Cette fiabilité nous semble due d'une part à la cohérence entre les conceptions de l'apprentissage et les situations proposées et, d'autre part, à leur expérimentation dans de nombreuses classes durant plusieurs années.

Toutefois l'activité mathématique réelle des élèves et l'acquisition des savoirs peuvent être réduites par des choix effectués lors de leur mise en œuvre ou des difficultés rencontrées dans les classes. Nous avons essayé d'identifier quelles étaient les difficultés que pouvaient rencontrer des enseignants qui ont choisi de mettre en œuvre les situations que nous proposons. Nous nous étions intéressés, à la gestion des phases de validation par des enseignants ayant quelques années d'exercice et nous avions constaté que si la gestion des échanges et l'analyse des productions étaient conduites efficacement, dans certains cas les élèves pouvaient avoir à formuler leurs résultats et à expliciter leurs méthodes, mais sans avoir la responsabilité de leur critique.

La rédaction des documents

Plus récemment, nous avons essayé d'identifier des aides pour les phases de dévolution par des enseignants débutants pour lesquels, par exemple, une appréhension clairvoyante des enjeux mathématique d'une activité peut être limitée par des choix d'organisation pédagogiques contradictoire. Si un accompagnement peut viser, par la production de préparations plus précises et détaillées, l'appropriation de ces compétences : percevoir la posture à adopter, la place à occuper, revenir sur l'ordre des actions (matériel, informations, consignes à donner), retoucher la tournure de phrases pour les consignes, sentir les passages clé, où le maître a peu de marge, disposer d'exemples de réponses à donner, savoir éventuellement comment encourager les élèves ...), comment est-il possible de prendre en compte ces besoins dans la rédaction des ressources. Comment prendre en compte ces besoins, liés à la diversité des publics dans la production de ressources ? Par exemple la rédaction de nos situations, qui est souvent jugée assez développée par des enseignants expérimentés, est-elle suffisamment explicite pour ces enseignants débutants ? Une description exhaustive de ce qui s'est passé dans une classe détaillant pas à pas les actions pédagogiques de l'enseignant et les réactions des élèves, permet aux lecteurs d'avoir un guide rassurant. Cette narration, héritant de la robustesse des situations acquises par de nombreuses expérimentations, permet à l'enseignant de se concentrer sur les réactions des élèves, mais lui rend difficile toute adaptation. Au contraire, un descriptif des variables didactiques de la situation et l'exposé des choix opérables permettent à l'enseignant de faire ses propres choix, mais cela suppose une expérience de l'enseignement dans ce domaine. Cette différence entre novice et expert s'est d'ailleurs exprimée lors de la communication dans les réponses des enseignants, les maîtres formateurs penchant pour une description alors que les enseignants débutants semblent préférer une narration.

Par ailleurs, en travaillant sur le cycle 2, la question de la grande section est inévitable. Cette classe a des spécificités tant au niveau de l'organisation pédagogique que de la nature même des situations. Dans les classes où nous expérimentons, les situations didactiques côtoient des « jeux » ou des projets pluridisciplinaires. Ces enseignants transforment, modifient les situations de façon à les adapter à leur projet en cours ou au matériel usuel...Il nous semble donc important de réfléchir à la place qu'il est possible de laisser à ces adaptations dans la conception de nos situations et en particulier dans l'articulation entre les situations didactiques et les situations de construction d'expérience. Il est aussi crucial, compte tenu de la diversité de ces appropriations de mettre en évidence quels sont les apprentissages indispensables parmi l'ensemble des possibles.

3.11.4 Conclusion

Pour notre équipe, les exigences liées à la production de ressources qui présentent à la fois les enjeux des apprentissages, le savoir mathématique, l'analyse de l'état de savoir des élèves, les problématiques d'enseignement et des dispositifs d'enseignement que peuvent s'approprier des maîtres, notamment dans le cadre de la formation, sont présentes à toutes les étapes de notre recherche.

La production de ce type de ressource nous paraît une exigence pour la communauté didactique.

3.12 Enseignement-apprentissage de la résolution de problèmes numériques à l'école élémentaire en France et en République Tchèque. Mise à l'épreuve du cadre didactique R^2C^2

Maryvonne Priolet*

Laboratoire CEREP EA 4692
Université Reims Champagne Ardenne
Maryvonne.priolet@univ-reims.fr

RÉSUMÉ. *L'étude présentée ici s'inscrit dans une recherche sur l'enseignement-apprentissage de la résolution de problèmes numériques à l'école élémentaire. À visée compréhensive, elle a concerné huit classes en France et deux classes en République Tchèque. Dans chacun des pays, ces dix classes correspondaient à la troisième année d'école élémentaire, soit le CE2 pour la France. Il s'est agi d'évaluer dans quelle mesure et sous quelles conditions la mise en œuvre des principes de Recherche, de mise en Réseau, de Conversion, de Catégorisation, constitutifs de notre Cadre Didactique R^2C^2 pouvait constituer un vecteur de professionnalisation chez les enseignants et contribuer à améliorer les performances des élèves dans ce champ des mathématiques.*

ABSTRACT. *The study presented here is part of a research about the teaching-learning of numerical problem solving at elementary school. This comprehensive research dealt with eight classrooms in France and two classrooms in Czech Republic. In both countries these ten classrooms correspond to the third year of elementary school (CE2 for France). The aim was to determine to what extent and under what conditions the implementation of Research principles, of Networking, of Conversion, of Categorization, which are all constituents of our R^2C^2 didactic framework - could be a vehicle for professionalization among teachers and contribute to improve the students' results in this mathematics field.*

MOTS-CLÉS. *résolution de problèmes, école élémentaire, représentations, conceptualisation., France, République Tchèque, cadre didactique, professionnalisation*

KEYWORDS. *problem-solving, elementary school, semiotic, professionalization, France, Czech Republic, didactic framework*

Cette communication se propose d'exposer l'opérationnalisation d'un cadre didactique que nous avons désigné par l'acronyme R^2C^2 et qui s'inscrit dans une recherche sur l'enseignement-apprentissage de la résolution de problèmes numériques à l'école élémentaire. Après la présentation du cadre théorique et de la problématique, nous définissons les quatre principes inhérents à la mise en œuvre de R^2C^2 ainsi que les conditions et le déroulement de cette étude qui a impliqué dix classes de troisième année de l'école élémentaire : huit en France et deux en République Tchèque. La discussion porte sur l'analyse des pratiques professionnelles d'enseignement de la résolution de problèmes dans ces dix classes et sur les performances des élèves confrontés à la résolution de douze problèmes numériques. D'une part, nous considérons les pratiques et les performances en France, dans les quatre classes du groupe expérimental soumises à un enseignement basé sur la mise en œuvre du cadre didactique R^2C^2 versus celles des quatre classes du groupe-témoin. D'autre part, nous comparons les pratiques ordinaires d'enseignement-apprentissage observées dans les deux classes de République Tchèque et celles observées lors de la mise en œuvre du cadre didactique R^2C^2 en France.

3.12.1 Cadre théorique

Notre approche intègre un ensemble de cadres théoriques de référence empruntés essentiellement à la didactique des mathématiques (Glaeser, 1973, 1999 ; Brousseau, 1986, 1997 ; Novotná, 2001, 2003), à la psychologie du développement (Vergnaud, 1990) et aux travaux portant sur la conversion entre registres de représentations sémiotiques (Duval, 1995, 2005). C'est donc selon une approche que nous qualifions d'intégrative que nous avons abordé notre objet de recherche orienté vers l'identification de pratiques d'enseignement favorables à la réussite des élèves lors de la résolution de problèmes numériques.

3.12.2 Problématique et hypothèse

Il s'agit d'analyser en quoi la mise en place d'un cadre didactique spécifique désigné sous l'acronyme R^2C^2, s'appuyant sur une mise en œuvre régulière, conjointe et dévolue à l'élève des principes de Recherche, de mise en Réseau, de Conversion, de Catégorisation, peut favoriser l'apprentissage de la résolution de problèmes numériques. Nous posons l'hypothèse suivante : *L'apprentissage de la résolution de problèmes numériques peut être favorisé si l'enseignement s'inscrit dans un cadre didactique satisfaisant aux quatre conditions suivantes* :

La première condition concerne la mise en application des principes P1, P2, P3 et P4 dans un milieu aménagé par l'enseignant (Brousseau, 1990).

P1 : *Recherche de solution à des situations-problèmes.* Les élèves sont placés en situation de recherche (Glaeser, 1973) d'une ou plusieurs solutions à un problème donné, et ce, par contraste avec des séances de mathématiques composées uniquement d'activités de prise d'informations dans des énoncés et qui ne réservent aucune place aux traitements mathématiques (Balmes, Coppé, 1999).

P2 : *Mise en réseau des connaissances.* Les élèves sont placés en situation de se référer à des « expériences précédentes » (Eysenck, 1993, in Novotná, 2003), à établir des liens avec le passé, avec la mémoire didactique de la classe (Brousseau, Centeno, 1991) et ainsi à mettre en réseau le problème à résoudre avec des problèmes antérieurs déjà résolus (Priolet, Régnier, 2007).

P3 : *Conversion des représentations sémiotiques.* Les élèves ont la possibilité de procéder à des conversions de représentations sémiotiques (Duval, 1995, 2005).

P4 : *Catégorisation des situations-problèmes.* En fonction des relations mathématiques en jeu, les élèves sont conduits à catégoriser les situations-problèmes rencontrées (Vergnaud, 1990).

Trois autres conditions que nous nommons conditions de coexistence, de régularité, et de dévolution à l'élève des principes P1, P2, P3, P4 doivent être respectées lors de la mise en œuvre du cadre didactique R^2C^2. Les conditions de coexistence et de régularité sont inspirées des travaux de Vergnaud (1990) qui prône comme essentielles la régularité et la variété des situations auxquelles l'élève doit être confronté afin de pouvoir exercer les schèmes existants ou bien être amené à en construire de nouveaux. Ces conditions signifient qu'aucun des principes énoncés ne saurait être exclu au bénéfice des autres (condition de coexistence des principes), et que les quatre principes P1, P2, P3, P4 doivent être mis en œuvre lors de chaque séance de résolution de problèmes numériques (condition de régularité). La dernière condition concerne la « dévolution à l'élève » dans le sens employé par Brousseau (1990), à savoir « l'acte par lequel l'enseignant fait accepter à l'élève la responsabilité d'une situation d'apprentissage (a-didactique) ou d'un problème et accepte lui-même les conséquences de ce transfert ».

3.12.3 Expérimentation

Méthodologie

Afin de mettre à l'épreuve notre hypothèse de travail, une étude longitudinale a été engagée sur une année scolaire dans huit classes de CE2 en France (Priolet, 2008) et deux classes de 3ème année d'école élémentaire en République Tchèque (Priolet, Novotná, 2007). Cette expérimentation s'est déroulée selon trois phases principales :

Dans un premier temps, en début d'année scolaire, il s'est agi d'une part de caractériser les pratiques mises en œuvre par les dix enseignants lors de séances de résolution de problèmes (enregistrements vidéoscopés n1), d'autre part de mesurer les performances (pré-test) des élèves des dix classes (France et République Tchèque) lors de la résolution de douze problèmes numériques. Dans un deuxième temps, de janvier à mars, quatre classes en France sélectionnées de manière aléatoire parmi les huit ont été soumises à l'opérationnalisation de notre cadre didactique R^2C^2. Ces quatre classes formant le groupe expérimental ont fait l'objet d'enregistrements (enregistrements vidéoscopés n2). Les quatre autres classes qui constituaient le groupe-témoin en France ont continué le travail prévu par l'enseignant dans le cadre de sa pratique habituelle de classe. Dans un troisième temps, en juin, un post-test, strictement identique au pré-test, a fait l'objet d'une passation dans les huit classes en France.

Au cours de cette étude, outre les enregistrements vidéoscopés, deux autres techniques ont été utilisées pour recueillir les données relatives aux pratiques enseignantes : le questionnaire écrit, l'entretien d'autoconfrontation (Clot et Faïta, 2000).

Artefacts introduits dans le cadre de l'opérationnalisation du cadre R^2C^2

La mise en place du cadre R^2C^2 comporte l'introduction et l'usage d'artefacts désignés sous les noms de « dictionnaires-référents » et de « boîtes-référentes » qui conduisent les enseignants à confronter les élèves à la mise en œuvre des quatre principes P1, P2, P3 et P4 et ce, sous les conditions énoncées dans le paragraphe 2.

Les « boîtes-référentes »

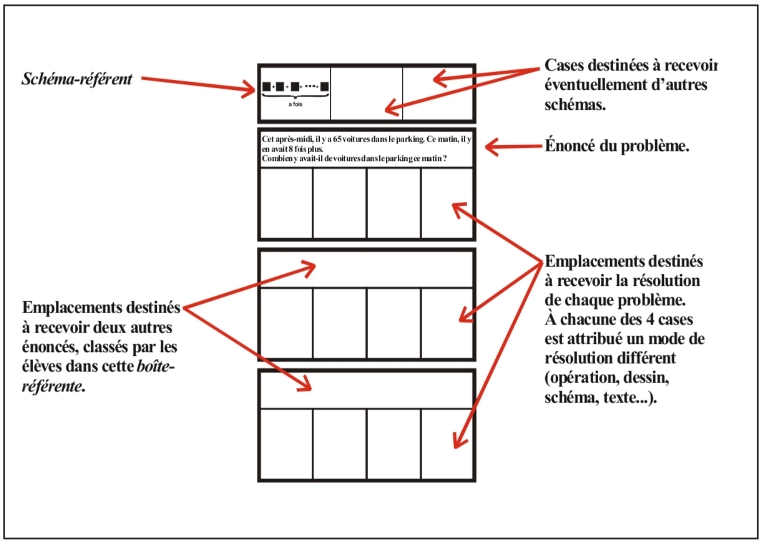


FIGURE 3.17 – « Boîte-référente ».

Des « boîtes-référentes » (Figure 3.17) sont mises à la disposition de chaque élève des classes du groupe expérimental. Elles permettent de recueillir des énoncés verbaux, des dessins, des schémas, des opérations... relatifs à une même classe de problèmes (Vergnaud, 1990). Cette activité de catégorisation confère à cette boîte le statut de référence pour une classe de problèmes donnée. Matérialisées par des fiches, par des boîtes ou par des cahiers, ces « boîtes-référentes » recevront et permettront la mise en relation d'énoncés verbaux et de représentations variées : opération, dessin, schéma, texte. Les travaux de Duval (1995) sur la conversion de représentations d'un registre dans un autre registre constituent le cadre théorique retenu pour l'introduction de la dimension inter-représentationnelle de ces « boîtes-référentes » qui ont pour objectif d'inviter l'élève à changer de registre de représentations ou du moins de lui montrer qu'il est autorisé à le faire.

Les « dictionnaires-référents »

Un autre artefact, nommé « dictionnaire-référent » s'inscrit dans l'aménagement du milieu, au sens de Brousseau (1990) pour l'opérationnalisation de R^2C^2. Ce dictionnaire est élaboré collectivement par chacune des quatre classes du groupe expérimental au fur et à mesure que des expressions verbales posent des difficultés aux élèves (Exemples : un lot de livres, quatre fois moins d'élèves...).

3.12.4 Résultats et discussion

Pour discuter des pratiques d'enseignement-apprentissage de la résolution de problèmes, nous nous situerons dans un premier temps dans le contexte français de la mise en œuvre du cadre didactique R^2C^2. Dans un second temps, nous comparerons les pratiques entre les quatre classes du groupe expérimental en France et celles observées dans les deux classes de République Tchèque.

France : comparaison entre les quatre classes du groupe expérimental et les quatre classes du groupe témoin

Le cadre didactique R^2C^2 mis en œuvre dans les quatre classes du groupe expérimental en France a permis de confronter les élèves aux principes de Recherche de solution, de mise en Réseau des connaissances, de Conversion de représentations sémiotiques, de Catégorisation des situations-problèmes, et ce, sous les conditions de coexistence de ces principes, de régularité dans leur mise en place et de dévolution à l'élève. La comparaison des transcriptions intégrales des enregistrements vidéoscopés n1 et n2 révèle que les pratiques des enseignants du groupe expérimental ont effectivement considéré l'aspect systémique inhérent au cadre didactique R^2C^2, tandis que les données recueillies lors des enregistrements n1 et des entretiens d'autoconfrontation associés ne révèlent jamais la présence concomitante des quatre principes réunis sous les conditions énoncées, même si certains de ces principes sont présents de manière isolée. Par exemple, un enseignant du groupe témoin place effectivement ses élèves en situation de Recherche, avec une confrontation fréquente à des problèmes ouverts, mais sans pour autant inviter à se référer à des connaissances antérieures, ou bien à utiliser si besoin différents registres de représentations. En outre, il ressort des enregistrements vidéoscopés n2, à l'intérieur même de chacune des classes du groupe expérimental, une implication plus personnelle de la part des élèves, certains s'engageant davantage dans la conversion de représentations, d'autres n'y recourant pas car procédant directement à la résolution du problème en utilisant une procédure experte, tandis que d'autres encore se sentent autorisés à passer par des dessins ou des schémas.

On relève aussi un contraste entre les séances de type n2, dans lesquelles les élèves du groupe expérimental sont confrontés à la mise en œuvre du cadre didactique R^2C^2 et les séances de type n1 où les élèves adoptent une attitude plus figée passant systématiquement par la rédaction de réponses sous la forme « solution, opérations ». On assiste dans les séances de type n2 à une implication du collectif de la classe dans la création ou la modification de « boîtes-référentes ».

Partant de ces comparaisons entre les séances de type n1 et celles de type n2, on peut considérer que la mise en œuvre du cadre didactique R^2C^2 peut constituer un vecteur de professionnalisation chez les enseignants et qu'elle peut expliquer l'amélioration significative des performances des quatre classes qui ont appliqué les principes de R^2C^2 pendant les trois mois de la phase expérimentale.

Comparaison entre les huit classes de France et les deux classes de République Tchèque

En France, sur les douze problèmes du post-test, les élèves du groupe expérimental réussissent en moyenne un problème de plus que ceux du groupe-témoin. Toutefois, ces performances se révèlent inférieures à celles des deux classes de République Tchèque observées dans le cadre de pratiques ordinaires et non soumises à l'expérimentation du cadre didactique R^2C^2. Les élèves de ces deux classes de République Tchèque ont considéré comme naturel de rechercher des problèmes similaires, d'essayer d'utiliser le registre de représentation le mieux adapté à leur stratégie de résolution de problème, de décomposer un nouveau problème en plusieurs sous-problèmes simples pour lesquels ils connaissaient déjà les algorithmes de résolution (Priolet, Novotná, 2007). On relève ainsi des similitudes avec les principes du cadre didactique R^2C^2 dont la mise en œuvre dans les quatre classes de notre groupe expérimental en France peut expliquer l'amélioration significative des performances par rapport à celles des quatre classes du groupe-témoin. Toutefois, les élèves du groupe expérimental français n'ont été confrontés que durant trois mois à la mise en œuvre des quatre principes inhérents au cadre didactique R^2C^2, tandis que les pratiques observées en République Tchèque sont mises en œuvre chaque année et de façon régulière tout au long de l'année scolaire. Nous attribuons ainsi la supériorité des performances de ces deux classes de République tchèque au travail systématique et à long terme mené depuis le début de la scolarité obligatoire dans la mise en œuvre de ces principes.

Références

Balmes, R. M., Coppé, S. (1999). *Les activités d'aide à la résolution de problèmes dans les manuels de cycle 3*, Grand N, n63, pp. 37-59

Brousseau, G. (1986). *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 7, n2, pp. 35-115

Brousseau, G. (1990). *Le contrat didactique : le milieu.* Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 9(3), pp. 309-336

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical situations in mathematics 1970-1990.* Kluwer Academic Publishers, 304 p.

Brousseau, G., Centeno, J (1991). *Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant.* Recherches en Didactique des mathématiques, Vol. 2.3.

Clot, Y, Faïta, D. (2000). *Genres et styles en analyse du travail.* Concepts et méthodes, Travailler n4, pp. 7-42

Duval, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine. Berne : Peter Lang, 395 p.

Duval, R. (2005). *Langage, symboles, images, schémas... De quelle manière interviennent-ils dans la compréhension, en mathématiques et en dehors des mathématiques.* Bollettino dei Docenti di Matematica. n50, 20 p.

Glaeser, G. (1973). Pédagogie de l'exercice et du problème, in *Le livre du Problème (Tome I)*, CEDIC, Lyon, Paris, 103 p.

Glaeser, G. (1999). *Une introduction à la didactique expérimentale des mathématiques, Textes rassemblés et préparés par Blochs, B., Régnier, J.-C.*, La Pensée Sauvage éditions, Grenoble, 231 p.

Novotná, J. (2001). Pictorial Representations in the Process of Grasping Word Problem Structures, In Vale, C., Horwood, J. and Roumeliotis, J. (2001), A Mathematical Odyssey, Melbourne, Mathematical Association of Victoria, pp. 145-157

Novotná, J. (2003). Étude de la résolution des « problèmes verbaux » dans l'enseignement des mathématiques. De l'analyse atomique à l'analyse des situations, *Note de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches, DAEST*, Bordeaux, 139 p.

Priolet, My, (2008). Enseignement et apprentissage de la résolution de problèmes mathématiques. Le cas des problèmes numériques au cycle 3 de l'école primaire en France. Approches didactique et ergonomique, *Thèse de Doctorat en Sciences de l'Éducation, Université Lyon 2* (directeur : Jean-Claude Régnier), mai 2008

Priolet, My, & Novotná, J (2007). Solving numerical problems in the 3rd year of Primary School : teaching and learning with connections. In *Proceedings of the International Symposium Elementary Math's Teaching* (pp. 217-225). Prague : Charles University, Education Faculty

Priolet, My, & Régnier JC (2007). Modélisation et enseignement de la résolution de problèmes basé sur une mise en réseau. In Expérimentation et modélisation dans l'enseignement scientifique : quelles mathématiques à l'école ? *Actes du XXXIVème colloque COPIRELEM*, Troyes

Vergnaud, G. (1990). *La théorie des champs conceptuels.* Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 10, n 2-3, 133-170.

3.13 Conception de ressources et apprentissages des mathématiques pour l'enseignement secondaire

Yves Matheron*

*IFÉ, ENS de Lyon
Laboratoire ADEF
Université de Provence

Tous les professeurs consultent des ressources afin de préparer leurs cours, proposer des exercices et des problèmes à leurs élèves, tant pour leur faire rencontrer des mathématiques, que les leur faire étudier, les entrainer et les évaluer. A bien des égards et parmi d'autres déterminants, la qualité de l'enseignement dispensé et des apprentissages possibles résultent des choix opérés parmi ces ressources par les professeurs. Si les IREM produisent depuis leur création des brochures et si le ministère édite depuis quelques années des « documents ressources », les manuels à destination des élèves et les documents en ligne trouvés sur divers sites tiennent pourtant une place importante, sinon la première, parmi les médias consultés. A côté de ces ressources plus ou moins traditionnelles, des équipes se sont constituées pour en produire d'autres, différentes mais tout autant destinées à l'enseignement au sein du système éducatif secondaire, et qui s'appuient le plus souvent sur des cadres théoriques issus des recherches menées en didactique des mathématiques. Dans ce thème, on abordera un certain nombre de questions parmi lesquelles :

- en quoi ces productions se démarquent-elles des précédentes, notamment à quelles questions d'enseignement et d'apprentissage répondent-elles et que l'on ne peut trouver dans les manuels ?
- Quel est le type d'étude des mathématiques qu'elles promeuvent ?
- A quelle échelle ces productions sont-elles utilisées dans les classes, notamment comment et à quelles conditions ces productions diffusent-elles ?
- Quels sont les effets produits en termes d'apprentissage et quels sont les moyens que l'on se donne pour cette observation ?

3.14 Utilisation des logiciels de géométrie dynamique pour l'articulation entre les géométries synthétique et analytique du secondaire

Bernat Ancochea *, Marianna Bosch, Josep Gascón*****

* Institut Premià de Mar
C. Rafael Casanova s/n
Premià de Mar (Espagne)
bancoche@xtec.cat

** Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona - Edifici C Bellaterra (Espagne)
gascon@mat.uab.es

*** FUNDEMI - Facultat d'Economia IQS
Universitat Ramon Llull
Barcelona (Espagne)
mbosch@fundemi.url.edu

RÉSUMÉ. *Dans cette communication nous présentons le développement d'un projet d'investigation que nous avons présenté aux Journées mathématiques de l'IFÉ en juin 2011 et dans lequel nous voulons mettre en évidence la fonction des logiciels de géométrie dynamique ainsi que les calculatrices symboliques comme instruments pour l'articulation de la Géométrie synthétique et la Géométrie analytique. Nous avons mis en marche un Parcours d'Étude et de Recherche (PER) dans un environnement Moodle pour les élèves de la première année du baccalauréat (16-17 ans) pour introduire la Géométrie analytique d'accord avec le programme de mathématiques de cette classe.*

ABSTRACT. *In this talk we present the development of a research project that has been presented in the previous IFÉ journeys at Lyon in 2011. We want to emphasize the role of symbolic programmes as one of the articulation instruments between the synthetic Geometry and the analytic Geometry. The project includes the design of a Tour of Study and Investigation for baccalaureate's first level (16-17 years old) in order to introduce the analytic Geometry as an answer to the problems that the Geometry of rule and compass doesn't resolve.*

MOTS-CLÉS. *Géométrie, Géométrie synthétique, Géométrie analytique, Moodle, GeoGebra, Wiris, Mathématiques dynamiques*

KEYWORDS. *Geometry, analytic Geometry, synthetic Geometry, Moodle, GeoGebra, Wiris, Dynamical mathematics*

3.14.1 Introduction

Les évaluations des compétences mathématiques des élèves du niveau de Seconde qui ont eu lieu récemment en Catalogne ont mis en évidence de très mauvais résultats, en particulier par rapport à la géométrie (le curriculum parle d' « espace et forme » et de « mesure » au lieu de géométrie). Des changements sont en marche pour améliorer l'apprentissage des élèves et notre projet vise précisément à travailler dans ce but.

Les activités que nous présentons font servir les logiciels GeoGebra et Wiris. Les deux logiciels sont complémentaires. D'une part, GeoGebra permet de faire la construction de la figure en nous donnant la version analytique du problème sur la fenêtre algébrique. Wiris, de son côté, fait introduire les données sur cette fenêtre et nous donne ensuite le résultat sur la fenêtre graphique. Cela oblige les élèves à savoir au préalable avec quels objets géométriques il devra travailler. L'environnement Moodle nous permet d'y inclure ces ressources et, en même temps, les élèves peuvent y déposer les travaux qu'ont leur propose. Ce travail s'appuie sur le cadre théorique issu des recherches menées en didactique des mathématiques par Yves Chevallard. Il faut faire référence à deux articles de cet auteur dont l'un d'eux n'a pas été publié : « Autour de l'enseignement de la géométrie au collège » qu'il a écrit avec Michel Jullien.

3.14.2 Hypothèses de départ

Nous avons pris comme point de départ une série d'hypothèses qu'il s'agit de confirmer par la suite en fonction des résultats obtenus avec les élèves et en fonction de l'étude des programmes en cours en Secondaire en Espagne. Ces hypothèses sont les suivantes :

H1 Isolement du bloc de géométrie.

H2 Problématique descriptive.

H21 Isolement et désarticulation des thèmes de géométrie.

H22 Problématique « intrafigurale ».

H3 Manque de complémentarité des techniques synthétiques et analytiques.

H4 Caractère quasi- algorithmique de la géométrie au baccalauréat.

H5 Les logiciels de géométrie renforcent le caractère ostensif de l'enseignement de la géométrie en Secondaire. « Voir c'est comprendre » c'est la fausse équation dénoncée par Ignacio Ramonet, qui fut directeur du Monde Diplomatique.

Thèse de la continuité entre les deux géométries

A partir d'un groupe de problèmes considérés comme représentants « authentiques » de la géométrie synthétique, on peut démontrer que les techniques analytiques, caractéristiques de la géométrie cartésienne, apparaissent comme un développement des techniques avec règle et compas (en parallèle avec l'ampliation progressive du champ de problèmes). Il s'agit d'articuler les deux géométries et non pas de subordonner l'une à l'autre.

Comment enseigne t'on la Géométrie en Espagne ?

La géométrie dans l'enseignement Secondaire en Espagne se fait d'une façon très sommaire, à la fin du cours scolaire et sans qu'il y ait de part des professeurs une implication personnelle sur le sujet. Finalement les élèves ne font que des calculs sur les aires et les volumes et sur le théorème de Pythagore et on laisse les exercices de construction qui sont propres à la géométrie synthétique pour les classes de dessin ou l'on ne se pose aucune question et où on se limite à un procédé de construction pas à pas.

Bien que les programmes tiennent compte des problèmes de la géométrie synthétique, les manuels proposent des exercices qui peuvent se résoudre sans qu'il y ait un problème de construction préalable. En outre, les tâches que l'on demande aux élèves sont routinières et non-problématiques.

Pour le baccalauréat le programme propose l'organisation de la géométrie analytique à partir de quatre grands sujets, à savoir :

- Vecteurs sur le plan.
- Les équations de droite.
- Propriétés affines et propriétés métriques.
- Lieux géométriques. Coniques.

En fait, les références aux lieux géométriques sont minimales et tous les exercices proposés aux élèves ne font qu'insister sur les différentes façons d'écrire les équations des objets géométriques ou bien de savoir les obtenir dans différents cas.

Il n'y a donc pratiquement pas de géométrie synthétique dans les quatre premiers cours de l'enseignement secondaire et la géométrie analytique se fait d'une façon très algébrisée. L'élève arrive à résoudre les problèmes sans savoir vraiment ce qu'il est en train de faire.

Méthode de travail

Nous avons travaillé avec des élèves du 1er cours du baccalauréat - l'équivalent de la Première en Espagne - en nous servant de l'environnement Moodle qui leur permet de déposer les solutions aux tâches proposées par le professeur d'une façon très simple.

Avec Wiris et GeoGebra on peut résoudre le problème qui se pose avec l'articulation des deux géométries en suivant le processus suivant :

1. On part d'un énoncé caractéristique d'un problème du premier cours du baccalauréat.

2. On le traduit en un énoncé de géométrie synthétique particulier que l'on résout à partir d'une construction à la règle et au compas.
3. Résolution analytique particulière avec un système d'équations.
4. Résolution analytique générale (avec des paramètres) en choisissant convenablement le système de référence.
5. On fait une étude de cas (interprétation géométrique).

On a proposé aux élèves une série d'exercices en commençant par un exercice très simple : la construction d'un triangle rectangle. Ils ont du rédiger le processus de construction pas à pas avec règle et compas et puis le faire à partir du logiciel GeoGebra. Il s'agissait de savoir en quel état on se trouvait par rapport à l'idée de construction d'une figure avec des propriétés données. À partir de ce point-là on a augmenté la difficulté des exercices en faisant utiliser des outils plus complexes des logiciels. Les constructions, pour être valables, ne devaient pas permettre de modifier la figure si l'on déplace l'un quelconque de ses points. On a pris comme tâches de construction les suivantes :

- Un triangle avec les trois côtés donnés.
- Un parallélogramme à partir des longueurs des diagonales et de l'angle qu'elles forment.
- Un triangle avec deux côtés donnés et la médiane relative a l'un d'eux et un triangle avec deux côtés et la hauteur relative au troisième. On se demande si le problème a toujours solution et si elle est unique. On propose aux élèves de ne pas commencer directement la construction avec le logiciel mais plutôt de faire un schéma de la construction.
- Pour la discussion on demande d'utiliser le *curseur* de GeoGebra qui nous permet de modifier les données.
- Finalement on travaille avec les coniques à partir de leur définition.

Dans tous les cas, les élèves peuvent aussi utiliser le logiciel Wiris qui leur permet de travailler d'une façon différente mais toujours avec le même but que celui signalé plus haut.

Cette collection d'exercices de construction avec tout le processus dont on a parlé constitue ce que nous appelons un champ de problèmes.

Quels résultats ?

En proposant ce Parcours d'Étude et de Recherche nous nous sommes trouvés avec plusieurs difficultés qui ont entravé son développement :

1. Le curriculum nous a marqué des limites dans le temps si bien que l'on pas eu suffisamment de temps pour compléter le Parcours.
2. Il faut distinguer entre ce que nous attendons des élèves et ce qu'ils attendent de nous. Souvent nous nous sommes trouvés face à des élèves qui réagissent aux problèmes que nous leur posons en demandant plus d'algèbre et moins de géométrie (ou plutôt moins de logiciels !).
3. On se trouve parfois avec des problèmes techniques quant au fonctionnement des logiciels sur les ordinateurs des élèves ou bien avec des problèmes de connexion au réseau.

En tout cas nous avons pu faire une géométrie très différente de celle qui se fait habituellement dans la grande majorité des établissements en Catalogne. Il manque encore beaucoup de travail à faire pour l'articulation de la géométrie synthétique et la géométrie analytique et, particulièrement, au niveau des derniers cours de l'ESO qui correspondent à la troisième et la seconde. Introduire la géométrie synthétique avec règle et compas et puis avec les logiciels dynamiques dans ces niveaux sera le but d'une expérimentation à développer le prochain cours.

Bibliographie

Chevallard, Y. (2005). *Étudier la Géométrie avec un Logiciel de Géométrie.*

Bosch, M. i Gascón, J. (1994). *La integración del momento de la técnica en el proceso de estudio de campos de problemas de matemáticas.* Enseñanza de las ciencias, 1994, 12(3), 314-332.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades Matemáticas y Didácticas entre la Secundaria y la Universidad.* Tesis doctoral. Universidad de Vigo.

Gascón, J. (2002). *Geometria sintètica en l'ESO y analítica en el baxillerato. ¿Dos mundos completamente separados ?* Revista Suma, 39, 13-25.

Gascón. J. (2003). *Efectos del "autismo temático" sobre el estudio de la geometría en secundaria.* Suma, 44, 25-34.

Decret (142/2008). de 15 de juliol, *pel qual s'estableix l'ordenació dels ensenyaments del batxillerat.*

GEOGEBRA 4 (2011). Disponible sur internet : <http ://www.geogebra.org>

Real decreto (1631/2006). de 29 de diciembre, *por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.*

WIRIS (2007). Disponible sur internet : <http ://www.wiris.com>

Ancochea, B. (2012). *Un Moodle pour les élèves du 1er cours du baccalauréat de l'Institut de Secondaire de Premià de Mar* (Barcelone). Disponible sur Internet : <http ://www.ipm.cat/moodle/course/view.php ?id=17> (entrée possible pour visiteurs).

3.15 Quels savoirs, pour de nouveaux environnements ? Une étude de la dérivée dans des environnements dynamiques

Fernando Bifano, Rosa Ferragina, Leonardo Lupinacci *

CEDE - Centro en Didácticas Específicas
UNSAM - Universidad Nacional de General San Martín.
Martín de Yrigoyen 3100
San Martín (1650) Provincia de Buenos Aires. Argentina
fbifano@unsam.edu.ar
rosaferragina_1@hotmail.com
leolupinacci@yahoo.com.ar

RÉSUMÉ. *Les recherches en didactique des mathématiques sur l'usage des technologies ont maintenant dépassé le point de vue initial sur l'usage des TICE qui conduirait naturellement à une meilleure compréhension des savoirs mathématiques. Dans ce texte, nous proposons de considérer les objets de savoir qui peuvent être construits à l'aide de types déterminés d'environnements informatiques, et ce que ces environnements peuvent apporter, aux objets et aux problèmes dans le cas particulier de la dérivée.*

ABSTRACT. *The investigations in didactics of the mathematics on the use of the technologies have been orientated towards perspectives that extend the ingenuous visions to conceive the incorporation of the TIC as a way natural to a better comprehension of the mathematical knowledge. In the present text we propose to rethink it brings over of what objects to know they can be constructed under certain types of it environments, and what these can contribute, both to the objects and to the problems to raising in the particular case of the derivative.*

MOTS-CLÉS. *Objets de Savoir - Environnements Dynamiques - Dérivée -*
KEYWORDS. *Objects To know - Dynamic Environments - Derivative -*

3.15.1 Introduction

L'enseignement de l'Analyse au secondaire est un sujet travaillé depuis quelques décennies. Actuellement, bien qu'il semble qu'il soit possible d'apprendre, avec un certain succès, le calcul de limites, dérivées, primitives et des techniques de résolution de problèmes, des difficultés persistent dans la tentative de développer chez les élèves une compréhension satisfaisante des concepts et des idées propres à ce champ des mathématiques (Artigue, 1996).

Par ailleurs, l'insertion croissante d'outils informatiques dans l'enseignement des mathématiques et spécifiquement de l'analyse, nous amène à repenser les notions d'analyse à enseigner au secondaire, le point de vue à retenir pour leur étude avec les élèves et l'apport possible des outils informatiques (Ferragina et Lupinacci, 2012). Différents logiciels de calcul formel (CAS) permettent de réaliser toutes sortes de calculs symboliques, et l'on pourrait penser que cela rend moins nécessaire, l'apprentissage et la réalisation de méthodes de calcul traditionnel. On pourrait aussi considérer que la réalisation de la partie technique du calcul étant transférée au logiciel, les élèves pourraient se concentrer sur la partie la plus conceptuelle (Trouche, 2003). Cependant, dès les années quatre-vingt-dix et encore aujourd'hui, ce point de vue sur l'usage des technologies a été remis en cause par la recherche, qui a évolué vers de nouvelles approches.

Les environnements informatiques influent sur le type de mathématiques que l'on peut apprendre, sur l'ensemble des problèmes qui peuvent être posés et sur les stratégies didactiques qui peuvent être mises en œuvre (Balacheff, 1994). Il faut alors se demander quels problèmes présenter pour favoriser l'intégration technique et conceptuelle dans des environnements informatiques, en réfléchissant aux « objets de savoir » (Chevallard, 1991) qui sont construits à partir du travail avec un type de problèmes dynamiques.

Les objets de savoir existent dans la mesure où les agents du système d'enseignement les reconnaissent comme utiles pour l'économie du système didactique ; et ils sont désignés comme objets à apprendre quand au moins potentiellement le problème de la transposition est résolu (Chevallard, 1991). Cependant, tel problème dans le contexte des environnements informatiques intègre les caractéristiques propres du milieu technologique par le type de représentation et de connaissance qu'il transpose. La transposition informatique (Balacheff, 1994) influe dans les deux sens : dans la modification des objets d'enseignement et dans le type relation qui peut s'établir avec ces objets.

Dans la proposition que nous développons dans cette communication, nous montrons comment ces changements se reflètent dans un environnement dynamique.

3.15.2 Les apports d'un environnement dynamique pour le travail avec les dérivées

Les logiciels de calcul formel ont surgi comme une nécessité de calcul pour les mathématiciens et les ingénieurs. Mais, par exemple, après avoir effectué un calcul déterminé, le discours sur la légitimité de la technique employée dans la résolution, est absente et a besoin d'être construit (Artigue, 2002 ; Lagrange, 2000). C'est pour cela que, dans cette proposition nous avons travaillé avec un logiciel de géométrie dynamique, puisque, au contraire des autres, cet environnement dynamique a été conçu pour l'enseignement, en affirmant une potentialité et une vocation didactique (Acosta Gempeler, 2005). Le choix particulier de GeoGebra est basé sur des raisons politiques et idéologiques [9], comme l'enseignement. Avec ce logiciel les caractéristiques dynamiques sont renforcées, les activités d'expérimentation, de visualisation [10] et de conjecture qui sont dans une interaction constante avec les connaissances mathématiques dont l'apprentissage est visé (Acosta Gempeler, 2005 ; Arcavi, 2003), tout en permettant la coordination et l'intégration parmi les différents registres de représentation.

La proposition que nous présentons sur le concept de la dérivée d'une fonction [11], suit l'idée intuitive utilisée par Newton pour le calcul des vitesses instantanées, qui part de la pente d'une sécante droite PQ et calcule la limite de la pente quand Q se rapproche de P. Nous croyons que cette introduction historique, s'enrichit encore plus avec l'utilisation d'un logiciel dynamique, parce qu'il permet d'analyser des aspects particuliers, comme par exemple :

1. Une variation d'une fonction dans un intervalle, en intégrant différentes représentations du même objet mathématique comme le graphique (droite qui passe par P et Q), le numérique (la pente m de la droite) et l'algébrique (une équation de la droite qui passe par P et Q, qui en sélectionnant sa forme explicite permet d'associer un paramètre de la formule à la pente). (Fig. 3.18)

   Quelle est la tâche pour les élèves (ils ont déjà étudié la notion de limite) ? Ils doivent étudier la fonction dans un intervalle. Questions à explorer avec les élèves sont :
   - Est-il possible que la variation de la fonction soit nulle ? Quand ? Comment interprétez-vous ce résultat ?
   - Que se passe-t-il lorsque Q s'approche de P ?
   - Comment interpréter la pente est indéfini lorsque Q et P coïncident ?

   Il est possible de visualiser une succession de droites sécantes, en activant la trace et, ainsi d'obtenir cette idée intuitive de position limite et de conjecturer et d'expliquer le sens de l'inscription « indéfinie » qui apparaît lorsque P et Q coïncident.

9. En Argentine, nous avons mis en place un programme national en 2010 « Conectar-Igualdad », qui donne à chaque étudiant un ordinateur équipé de logiciels libres comme c'est le cas pour GeoGebra.

10. Nous nous rapporterons à la visualisation comme la capacité, le processus et le produit de création, d'interprétation, la réflexion sur des carrés, des images, des diagrammes, dans nos esprits, dans un papier ou avec des outils technologiques. (Arcavi, 2003)

11. Cette proposition a été mise en œuvre avec les élèves dans leur dernière année d'école secondaire obligatoire (Ferragina, 2012). Pour des raisons de taille, nous avons seulement analysé le cœur de la proposition c'est à dire la possibilité d'approcher la notion dérivée comme une relation dialectique objet-registre.

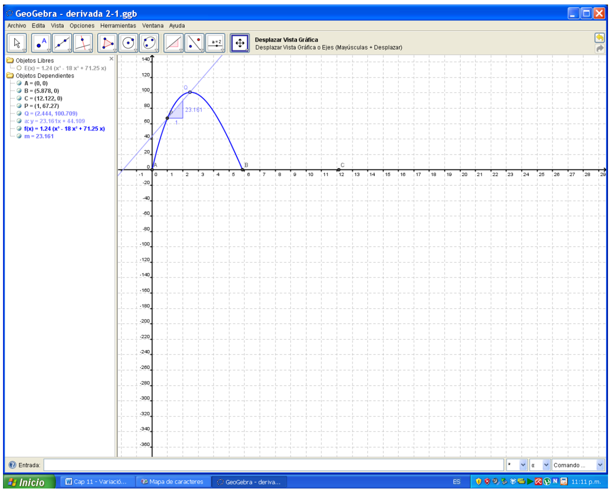


FIGURE 3.18 – Différentes représentations du même objet : une droite sécante à une fonction.

2. Une analyse de la variation en un point quelconque du domaine de définition de la fonction. Maintenant, en utilisant les outils « tangentes » de logiciel, nous confirmons l'hypothèse faite sur la valeur de la fonction de variation de vitesse.

   Quelles sont les questions peuvent être proposées aux élèves : l'étude de la variation de la fonction à tout moment et, quelle courbe décrit cette variation ? Donc, une analyse de la variation de la fonction en quelque point, moyen de la construction d'un point auxiliaire.

   L'obtention d'une nouvelle fonction qui est possible de rattacher avec l'originale, au moyen d'un « ajustement » de ses coefficients (Fig. 3.19 et Fig. 3.20).

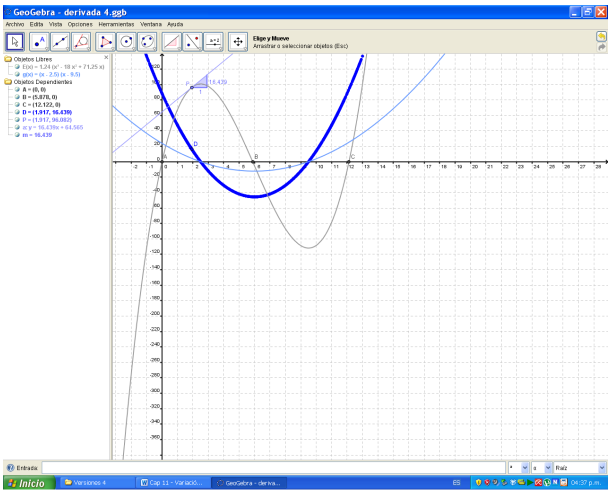


FIGURE 3.19 – Première ébauche de la fonction dérivée en considérant les pentes des tangentes.

L'analyse effectuée sur les questions mentionnées précédemment, permet d'ouvrir le traitement à l'étude de nouveaux problèmes, qui pourraient surgir après avoir changé la fonction sur laquelle la variation est analysée.

L'objet de savoir construit avec la seule exécution d'une instruction (par exemple la commande **Dérivée[]**, ou l'outil **Inspection de Fonction**), ne permet pas les mêmes apprentissages que le construit au moyen de l'étude des variations. Dans ce dernier cas l'établissement de différentes relations est construit sur une compréhension de l'analyse des propriétés des éléments mis en jeu, alors que dans le premier,

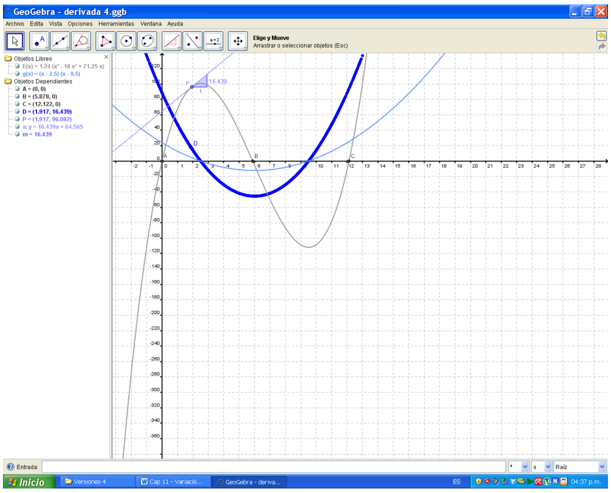


FIGURE 3.20 – Un dernier ajustement au coefficient quadratique pour que les deux courbées coïncident.

ces relations restent transparentes [12]. Intégrer un logiciel à l'intérieur de l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, implique de réfléchir à l'organisation des apprentissages.

3.15.3 Conclusion

Nous croyons qu'il est nécessaire de réaliser un contrôle effectif du maniement d'un logiciel mathématique, GeoGebra dans ce cas, comme un complément nécessaire de l'apprentissage mathématique. Nous avons exposé comment l'incorporation du recours dynamique modifie tant les objets de savoir qui sont construits dans la classe des mathématiques, comme le type de problème qui contextualisent cette construction (Bifano et Villella, 2012).

Nous ne voulons pas conclure sans ouvrir le débat sur des aspects relatifs à la gestion de la classe, l'appropriation des outils informatiques avec les apports de Trouche (2004) sur la genèse instrumentale et l'orchestration documentaire. Ils offrent des éléments fertiles pour étudier les phénomènes présents dans le processus d'apprendre / à enseigner des mathématiques, au moyen des TICE.

Références

Acosta Gempeler, M. (2005). *Geometría experimental con Cabri : una nueva praxeología matemática.* En Revista Educación Matemática, 17, 3, p. 121 - 140. México. Santillana.

Arcavi, A. & Hadas, N. (2003). *El computador como medio de aprendizaje : ejemplo de un enfoque.* En International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5, p.25 - 45. Kluwer Academic Publishers.

Artigue, M (1996). La enseñanza de los principios del cálculo : problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Gómez, P. (ed.) (1995) *Ingeniería didáctica en educación matemática*, p. 97-140. Bogotá. Iberoamérica.

Artigue, M. (2002). *Learning Mathematic in a CAS environment : the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work.* CAME forum 2002.

Balacheff, N. (1994). La transposition informatique. Note sur un nouveau problème pour la didactique, in, M. Artigue & als. (Eds.), *Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France*, pp. 364- 370. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bifano, F. & Villella, J. (2012). Saberes construidos con (en) problemas dinámicos : ¿Otros objetos de saber ? Comunicación Coloquio Internacional, *La didáctica de la matemática : enfoques y problemas. Homenaje a Michéle Artigue.* Universidad Paris VII.

12. Le mot transparent est utilisé dans le sens de transparence mathématique, une notion prise par le TAD.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires, Aique.

Ferragina, R. (2012). Variaciones al instante. En Ferragina, R. (ed.) (2012) *GEOGEBRA entra al aula de MATEMÁTICA*, p. 123 - 135. Montevideo. Ediciones Espartaco.

Ferragina, R. & Lupinacci, L. (2012). La enseñanza del concepto de integral a partir del cálculo de áreas en un ambiente dinámico. Comunicación Coloquio internacional, *La didáctica de la matemática : enfoques y problemas. Homenaje a Michéle Artigue.* Universidad Paris VII.

Lagrange, J. (2000). Approches didactique et cognitive d'un instrument technologique dans l'enseignement. Le cas du calcul formel en lycée. Document pour l'Habilitation à Diriger les Recherches. *Université Paris VII.*

Trouche, L. (2003). Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations. Document pour l'Habilitation à Diriger les Recherches. *Université Paris VII.*

Trouche, L. (2004). *Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments : guiding students' command process through instrumental orchestations* In : International Journal of Computers for Mathematical Learning pp. 281-307. Países Bajos, Kluwer Academic Publishers.

3.16 Analyse d'un questionnaire sur les effets déclarés d'un travail collaboratif entre professeurs et chercheurs

Sylvie Coppé*

*IUFM de Lyon, Université Lyon 1
UMR ICAR (Université Lyon 2, CNRS,
ENS Lyon)

RÉSUMÉ. *Dans le cadre du projet européen S-TEAM (Science Teacher Education Advanced Methods), nous avons réalisé une étude par le biais d'un questionnaire que nous avons proposé aux professeurs qui travaillent dans les trois groupes de recherche action que nous animons dans notre laboratoire de recherche en lien avec l'IFE (Institut Français de l'Education). Notre but était de comprendre le rôle du travail de collaboration dans ces groupes et ses effets potentiels sur la pratique des professeurs afin de mieux connaître leur point de vue sur le développement de ces groupes.*

ABSTRACT. *Within the context of the europeen project S-TEAM (Science Teacher Education Advanced Methods) we conducted a study with the help of a questionnaire intended to teachers who work in the three different research and development groups associated to our research unit in connection with the IFE (Institut Français de l'Education). Our purpose was to understand the role of collaborative work within these groups and its potential effects on the participants' teaching practice and finally to better know their point of view about the potentialities of such groups.*

MOTS-CLÉS. *travail collaboratif- enseignement des sciences et des mathématiques - démarche d'investigation-développement professionnel*

KEYWORDS. *collaborative work- sciences and mathematics teaching- inquiry based science learning-professional development*

Dans cette communication, nous présenterons l'analyse d'un questionnaire réalisé dans le cadre du projet européen S-TEAM (Science Teacher Education Advanced Methods), ayant fait l'objet d'un délivrable (Coppé et Tiberghien, 2010).

Nous avons mené un travail d'enquête au moyen d'un questionnaire auprès des enseignants qui travaillent dans un des trois sous-groupes différents de recherche-développement associés à notre unité de recherche UMR ICAR en lien avec l'IFE. Le projet général, intitulé SESAMES (Situations d'Enseignement Scientifique : Activités de Modélisation, d'Evaluation, de Simulation), a pour but la production collaborative (par des enseignants et des chercheurs) de ressources pour les enseignants et les formateurs des disciplines concernées (principalement mathématiques et sciences physiques) favorisant la mise en activité des élèves et leur prise de responsabilité vis-à-vis des savoirs enseignés, notamment par la mise en place de démarches d'investigation. Pour nous, en mathématiques, le thème est l'enseignement de l'algèbre au collège. Les documents sont disponibles sur le site http ://www.inrp.fr/pegame/ (et PEGASE pour les sciences physiques (http ://pegase.inrp.fr/)).

Ce projet s'inscrit dans une tradition de projets similaires ayant existé au sein de la composante de didactique des sciences de l'UMR ICAR ; ces projets abordent la question générale de l'articulation entre activités des élèves et pratiques d'enseignement.

Selon Grangeat et al, 2009, on peut caractériser ce travail dans un axe dit de « collaboration » : il est fait entre professeurs d'une même discipline qui enseignent au même niveau, le but de la collaboration est la production de ressources pour d'autres enseignants de la même discipline et du même niveau.

« Elle [La collaboration] intervient lorsque les acteurs partagent la même tâche prescrite. Dans ce cas, la mission, ou le projet, nécessite la contribution de plusieurs agents qui, en général, ont des compétences semblables. L'enjeu des situations de collaboration consiste en l'élaboration d'un système de représentations et de savoirs commun aux acteurs afin qu'ils attribuent une signification partagée - ou des significations compatibles entre elles - aux événements qui surgissent dans leur activité. » (Grangeat et al, 2009).

Pour élaborer le questionnaire, nous avons repris une conclusion de Rogalski, 2005 qui indique que les effets d'un travail collaboratif portent à la fois sur les pratiques et sur les conceptualisations. Nous faisons l'hypothèse que pour les enseignants concepteurs, les effets de ce travail collaboratif ont porté sur leurs pratiques (soit lors de la conception des séances/séquences de classe, soit lors de la réalisation) mais aussi sur leurs connaissances sur les savoir à enseigner, sur leur épistémologie, sur les apprentissages des élèves. Le but du questionnaire était de comprendre le rôle du travail collaboratif au sein de ces groupes, ses effets potentiels sur la pratique des participants et enfin de mieux connaître leur point de vue sur les potentialités de tels groupes. Un autre point portait sur le fonctionnement du travail des groupes (partage collectif/individuel) et sur les caractéristiques de la collaboration, notamment, sur les éléments essentiels qui la favorisent et sur la nature et le rôle des outils de conception et d'analyse construits et explicitement partagés.

Nous avons interrogé des enseignants qui ont fait partie des groupes SESAMES à un moment ou un autre de leur parcours professionnel. Nous avons recueilli 15 questionnaires.

Le questionnaire était divisé en cinq parties :

- des indications personnelles et les motivations à travailler dans le groupe (questions 1 à 8) ;
- le travail réalisé dans le groupe notamment en termes de thèmes travaillés et sur l'importance des types de documents élaborés (questions 9, 10 et 12). Nous avons cherché à mieux connaître ce qui, pour chaque enseignant, est l'objet de travail du groupe auquel il appartient, quel est son avis sur plusieurs composantes du travail du groupe pour que les ressources produites puissent améliorer l'enseignement et sur les types de ressources effectivement produites toujours dans le but d'améliorer l'enseignement ;
- le travail collaboratif avec une question sur le rôle du chercheur puisque la particularité des groupes SESAMES est de faire travailler ensemble des professeurs et des chercheurs (questions 11, 13 à 15). Le rôle du chercheur est questionné (Q14) puisque la particularité des groupes SESAMES est de faire travailler ensemble des professeurs et des chercheurs ;
- les effets du travail dans le groupe sur les pratiques (questions 16 à 22) : nous avons fait l'hypothèse que l'apport du travail dans les groupes SESAMES porterait fortement sur les dimensions suivantes du travail du professeur :
  - l'analyse des savoirs à enseigner (aspect transposition),
  - la préparation des séances de classe,
  - la gestion de celles-ci.
- la question 23, très ouverte, tente un résumé des points essentiels : « Vous souhaitez faire entrer un collègue dans le groupe, donnez-lui quelques arguments pour le convaincre ».

Les résultats montrent que la pratique de la collaboration favorise non seulement la production de ressources directement utilisables par les enseignants (proposition de problèmes à mettre en œuvre la classe à un niveau donné avec un scénario d'usage) mais également la production d'outils plus généraux de conception notamment par l'explicitation des choix faits afin de les faire partager aux utilisateurs. Ce point se révèle très important pour les membres du groupe de production qui se soucient de la façon dont les professeurs vont utiliser les ressources élaborées.

La majorité considère que les réunions régulières et surtout les échanges entre les enseignants et entre enseignants et chercheurs sont essentielles. L'idée de collaboration est donc fondamentale dans le travail du groupe. Il ressort également que la grande majorité affirme que le groupe a aidé à construire un vocabulaire commun et/ou des points de vue communs.

La principale influence sur la pratique de classe affirmée par les enseignants est le changement de leur façon de prendre en compte les apprentissages des élèves, en traitant les erreurs différemment, en leur laissant plus de temps de travail autonome, en tenant compte de leur niveau. Selon les enseignants, ce changement affecte les savoirs enseignés, la gestion de classe, mais aussi l'évaluation (la façon dont les professeurs évaluent leurs élèves). La majorité des enseignants affirment avoir modifié leur pratique :

- dans la préparation des séances : par une réflexion sur les savoirs à enseigner qui les amène à choisir des problèmes dans lesquels les élèves ont à élaborer des solutions personnelles ;
- dans la réalisation : en permettant la dévolution de ces problèmes et l'articulation avec des éléments d'institutionnalisation ;
- dans l'analyse de ce qui se passe dans la classe (par une réflexion critique sur les savoirs enseignés).

Conclusion Ce questionnaire montre l'accord entre les objectifs des enseignants et ceux des groupes de recherche-développement de ressources d'enseignement SESAMES. Il ressort que pour les enseignants l'essentiel est la construction d'activités/séquences d'enseignement en lien avec une importance majeure des discussions entre enseignants mais aussi avec les chercheurs. L'élaboration d'outils est aussi reconnue aussi bien pour la gestion de la classe que pour la conception de ressources. Ainsi la collaboration au sein du groupe est reconnue comme essentielle.

Un autre point révèle que la majorité des enseignants affirment avoir modifié leur propre pratique d'enseignement en particulier dans leur rapport avec leurs élèves, en traitant leurs erreurs différemment, en leur laissant plus de temps de travail autonome, en tenant compte de leur niveau etc. Ce résultat correspond à celui d'une analyse portant sur 96 entretiens avec des enseignants : « ces professionnels [...] disent comment ces activités collectives, initiées par les instances du système éducatif ou les acteurs locaux, constituent des ressources pour développer leurs compétences professionnelles dans le sens d'une meilleure attention portée à la diversité des apprenants et à la multiplicité des intervenants de l'éducation » (Grangeat, et al., Grangeat, Rogalski, Lima et Gray, 2009). On rejoint donc une modification des pratiques dans le sens proposé par l'IBST.

Références

Coppé, S et Tiberghien, A (2010). *Teacher collaboration and Inquiry Based Science Teaching : Elements for teachers' development and teaching resources.* Work package 4 : Délivrable 4b.

Grangeat, M., Rogalski, J., Lima, L., & Gray, P. (2009). *Analyser le travail collectif des enseignants : effets du contexte de l'activité sur les conceptualisations des acteurs.* Revue Suisse des Sciences de l'Éducation, 31 (1), 151-168.

Rogalski, J. (2005). Le travail collaboratif dans la réalisation des tâches collectives. In J. Lautrey & J. F. Richard (Eds.), *L'intelligence* (pp. 147-159). Paris : Hermès.

Chapitre 4

Ateliers

Dans les journées mathématiques une place importante est réservée aux ateliers ; ils sont l'occasion de partager des travaux réalisés dans l'année par les équipes associées. Comme chaque année, ces ateliers ont été organisés de façon à laisser un temps suffisant pour que les animateurs puissent effectivement faire travailler les participants sur la thématique de recherche de l'équipe. Les discussions provoquées sont toujours riches et fructueuses et sont souvent le point de départ de nouvelles recherches ou de réorganisation des recherches. La confrontation aux travaux des autres équipes apporte un dynamisme et un approfondissement que la lecture en continu des actes de ces journées atteste. Les ateliers, enfin, sont reliés au thème des journées et s'intègrent et éclairent les quatre sous-thèmes :

4.1 Dynamique des interactions entre mathématiciens, didacticiens et enseignants

L'atelier a articulé ses travaux autour de contributions variées :

Le premier atelier animé par Marie-Line Gardes a présenté l'analyse d'une situation en mettant en évidence la dimension expérimentale des mathématiques. La situation repose sur un problème ouvert en mathématiques : la conjecture d'Erdös-Straus. Les dimensions mathématiques et épistémologiques du travail du mathématicien ont été mis en regard des attitudes et de l'activité des élèves confrontés à la même situation.

Jani Bettancourt (Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México) dans son travail de thèse s'attache à l'enseignement de l'algèbre linéaire et étudie l'instrumentalisation d'un logiciel spécialisé.

Deux équipes de l'IFÉ, e-CoLab et ResCo ont proposé des ateliers dans cette session. Le propos d'e-CoLab a été d'étudier la transférabilité des ressources construites dans un environnement particulier à d'autres environnements en s'appuyant sur la genèse documentaire des enseignants. ResCo à travers les « fictions réalistes » soulèvent les questions de l'élaboration et sur la gestion de situations de recherche qui ne prennent sens pour les élèves qu'à travers une attitude de modélisation.

Chaque atelier a permis de mettre en situation les participants et de discuter plus précisément d'un point particulier. Les discussions sur la relation entre mathématicien et didacticien, introduite dans la première session a permis de poser des questions sur les relations entre l'épistémologie de la discipline et de la discipline scolaire. Les travaux conjoints entre didacticiens et enseignants ont permis de mettre en évidence la nécessité de construire des outils pour le professeur permettant d'objectiver le travail réalisé. De la même façon, les analyses *a priori* conduites conjointement par les enseignants et les didacticiens montrent bien l'apport des uns et des autres.

4.1.1 Apports des interactions entre didacticiens et mathématiciens pour l'élaboration d'une ingénierie didactique favorisant l'activité de recherche mathématique des élèves.

Marie-Line Gardes*

*S2HEP - Université Lyon 1
La Pagode - 38 Bd Niels Bohr
69622 Villeurbanne Cedex
Marie-Line.GARDES@univ-lyon1.fr

RÉSUMÉ. *Dans cet atelier, nous présentons l'élaboration d'une situation de recherche pour la classe en mettant en évidence l'apport des interactions entre mathématiciens et didacticiens pour la construction d'un milieu favorable à l'activité de recherche en classe. Nous axerons la réflexion sur les ressorts de la dimension expérimentale dans l'activité de recherche mathématique et sur un problème particulier, la conjecture d'Erdös-Straus.*

ABSTRACT. *In this workshop, we present the construction of a research situation for the class. We show the contribution of interactions between mathematicians and mathematics educators to build a rich environment in research activity in the classroom. We discuss the central role of exprimental approach in mathematical research activity. We work on a particular problem : the Erdös-Straus conjecture.*

MOTS-CLÉS. *problème ouvert, conjecture d'Erdös-Straus, processus de recherche, recherche de mathématicien, théorie élémentaire des nombres, dimension expérimentale.*

KEYWORDS. *problem solving, the Erdös-Straus Conjecture, process of research, number theory, experimental.*

Présentation de l'atelier

Le groupe DREAM « Démarche de recherche expérimentale pour l'apprentissage des mathématiques » est une équipe de recherche mixte IFé, IREM, IUFM et S2HEP (Université Lyon 1) composée d'enseignants du second degré et d'enseignants-chercheurs en mathématiques et en didactique des mathématiques. Le travail du groupe s'appuie sur l'ensemble des travaux développés autour du problème ouvert au sein de l'IREM de Lyon depuis près de vingt ans, qui montrent à la fois l'intérêt des enseignants pour ces pratiques de classe et la difficulté de mise en œuvre. L'objectif principal de DREAM est d'élaborer des ressources permettant aux enseignants de mettre en œuvre dans le cours ordinaire de la classe des problèmes de recherche en mettant en évidence, sur quelques situations classiques ou moins classiques, les ressorts fournis par la dimension expérimentale de l'activité mathématique d'une part, les connaissances mathématiques travaillées en lien avec les programmes à différents niveaux d'enseignement primaire et secondaire, d'autre part.

Cet objectif s'est réalisé avec la publication du cédérom EXPRIME en 2010 et se poursuit :

- en proposant de nouvelles situations mais aussi en élargissant les entrées possibles dans la ressource, ce qui en lien avec notre deuxième axe de travail nous à amener à choisir quelques notions clés des programmes de collège et/ou des deux transitions institutionnelles école élémentaire/collège et collège/lycée et à élaborer une batterie de problèmes de recherche permettant de travailler sur les allers et retours entre la partie expérimentale de la recherche et la construction structurée de notions mathématiques,
- par la poursuite d'un travail de recherche qui se donne pour objectif l'étude des conditions d'intégration de la ressource dans la pratique des enseignants et son impact sur ces pratiques. Ces travaux s'appuient déjà sur des actions en formation initiale et continue des enseignants et par des actions spécifiques, dont un suivi des pratiques de collègues en poste.

Dans cet atelier, nous proposons de présenter un aspect de nos engagements actuels- l'élaboration d'une nouvelle situation - en mettant en évidence l'apport des interactions entre mathématiciens et didacticiens pour la construction d'un milieu favorable à l'activité de recherche en classe. Nous axerons la réflexion sur les ressorts de la dimension expérimentale dans l'activité de recherche mathématique et sur un problème particulier, la conjecture d'Erdös-Straus. Après avoir présenté les différentes pistes de recherche pour s'engager dans la résolution de la conjecture, nous montrons le rôle de la dimension expérimentale dans le processus de recherche d'un mathématicien. Nous regardons en particulier cette démarche lors de l'étude d'un cas particulier. En appui sur cette analyse épistémologique du travail du mathématicien, nous présentons comment nous avons construit une ingénierie pour la classe favorisant l'activité de recherche mathématique des élèves. Nous analysons ensuite, avec les participants, quelques recherches d'élèves confrontés à la résolution de la conjecture, notamment en étudiant le rôle de la dimension expérimentale dans leurs processus de recherche. Nous proposerons ainsi aux participants deux documents, l'un est un extrait d'une transcription d'un groupe pendant leur phase de recherche collective, et l'autre est un extrait d'un cahier de bord d'un élève pendant les phases de recherche collectives. L'objectif sera de dégager plusieurs aspects de leurs processus de recherche : l'articulation entre la théorie et les expériences, la mise en œuvre d'une dimension expérimentale à travers l'étude de cas particuliers et les connaissances mathématiques en jeu. Enfin, nous concluons sur les premiers résultats d'une expérimentation de type laboratoire en classe de terminale scientifique.

Références

Aldon G., Cahuet P.-Y., Durand-Guerrier V., Front M., Krieger D., Mizony M., Tardy C. (2010). *Expérimenter des problèmes de recherche innovants en mathématiques à l'école.* Cédérom INRP.

Arsac G., Mante M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*, IREM de Lyon, SCEREN-CRDP Académie de Lyon.

Dias T, Durand-Guerrier V. (2005). *Expérimenter pour apprendre en mathématiques*, Repères IREM 60, pp. 61-78.

Durand-Guerrier V. (2006). La résolution de problèmes, d'un point de vue didactique et épistémologique , in Trouche L., Durand-Guerrier V., MargolinasC. et Mercier A. (eds) 2, *Actes des journées mathématiques de l'INRP*, 17-23.

ErdösP. (1950). *On a Diophantine equation.* (Hungarian. Russian, English summaries), Mat. Lapok1, 192-210.

Gardes ML. (2010). *Investigations arithmétiques en terminale : entre essais et conjectures.* Revue Petit x83, Ed. IREM de Grenoble, 51-78.

Gardes ML (2012). La position du chercheur en didactique dans une résolution de problème ouvert par un mathématicien in Luc Trouche, Hamid Chaachoua, Magali Hersant, Yves Matheron et Giorgos Psycharis (dir.) (2012). *Faire ensemble des mathématiques : une approche dynamique de la qualité des ressources pour l'enseignement,* Actes des journées mathématiques de l'IFÉ, juin 2011, ENS Lyon. http ://ife.ens-lyon.fr/editions/editions-electroniques/actes-des-journees-mathematiques-de-life

Gardes ML., Mizony M. (2012). *La conjecture d'Erdös-Straus : expérimentation en classe et travail du chercheur.* Repères IREM 87.

Mizony M. (2009). *Sur la conjecture d'Erdös-Straus : une identité. Disponible sur Internet :* <http ://math.univ-lyon1.fr/ mizony/> (consulté le 30 juin 2011).

Polya G. (1957). *How to solve it : a new aspect of mathematical method.* Garden City N.Y : Doubleday.

Schoenfeld A.H. (1985). *Mathematical Problem Solving.* New York : Academic Press.

4.1.2 Des fictions réalistes pour engager les élèves dans la résolution d'un problème mathématique

Ray Benoît*, Durand-Guerrier Viviane, Virduci Sébastien*****

* Lycée Docteur Lacroix
Rue Gay-Lussac
11100 Narbonne
benoit.ray@ac-montpellier.fr

**Université Montpellier 2
Département de mathématiques
I3M, ACSIOM
vdurand@math.univ-montp2.fr

*** Collège Paul Valéry
55 rue Paul Valéry
34200 Sète
sebastien.virduci@ac-montpellier.fr

RÉSUMÉ. *Dans un premier temps, nous préciserons ce que nous entendons par "fictions réalistes" et nous présenterons les motivations qui nous conduisent à proposer les énoncés de problèmes mathématiques sous cette forme. Nous présenterons ensuite le problème des œufs travaillé dans le cadre d'un stage de formation continue ; nous inviterons les participants à un jeu de questions-réponses autour de cette situation et nous présenterons quelques échanges entre élèves. Nous reviendrons enfin sur les questions soulevées par l'élaboration de ce type de situation, sur le rôle joué par les différents acteurs du groupe ResCo, et sur les effets produits sur le travail des élèves.*

ABSTRACT. *Firstly we will define what means « realistic fiction » and we will explain our motivations for writing mathematical problems in such a way. Then, we will present the eggs problem, which was worked out in a yearly workshop ; the participants will be put in this situation and we will present the exchanges between students. Finally, we will explain some issues raised by formulating such problems, the different role played by the members of our group ResCo and their effects on student work.*

MOTS-CLÉS. *résolution de problèmes, démarche d'investigation, mathématisation, fiction réaliste.*
KEYWORDS. *resolution of problems, inquiry based approach, mathematisation, realistic fiction*

Introduction

Le groupe ResCo de l'IREM de Montpellier, constitué de neuf membres (sept enseignants du secondaire, deux universitaires dont une didacticienne), élabore un stage de formation continue comportant une session de résolution collaborative de problème.

Le dispositif de résolution collaborative de problèmes (Sauter, 2008) repose sur des échanges entre des classes qui cherchent à résoudre le même problème, posé sous une forme non mathématique. Pendant cinq semaines, les élèves échangent des questions, des réponses, des idées, des procédures et des conjectures. Ces échanges sont pris en charge par les enseignants sur une plateforme Internet à accès restreint. Les deux premières semaines sont consacrées à l'exploration du problème et aux premières pistes vers une mathématisation. Une relance recentre les recherches sur un problème commun, travaillé pendant les deux semaines suivantes. La session se termine par la rédaction d'un compte-rendu individuel de la recherche qui va alimenter le débat de clôture de la cinquième semaine. La spécificité de ce dispositif nous conduit à proposer des énoncés originaux, que nous appelons fictions réalistes.

Dans un premier temps, nous préciserons ce que nous entendons par fictions réalistes. Puis nous mettrons l'accent sur la phase de mathématisation. Nous conclurons avec les interactions entre les différents acteurs et les effets produits sur le travail des élèves. 1. Fiction réaliste en mathématiques : définition et élaboration Il est reconnu tant par de nombreux chercheurs en didactique que dans les textes officiels français que le travail de mathématisation est constitutif des apprentissages mathématiques. Or, dans les « problèmes concrets » proposés par les manuels scolaires, ce travail est pris en charge par l'énoncé. Par ailleurs, la mathématisation de problèmes issus de la réalité est généralement trop complexe pour être proposée à des élèves dans le temps contraint de la classe.

Notre dispositif donnant une place importante à cet objectif, nous avons été amenés à proposer des situations non mathématiques a priori, posées dans un contexte fictif mais réaliste, pour lesquelles la recherche demande une mathématisation. Nous qualifions de telles situations de « fictions réalistes ». Le traitement mathématique de celles-ci met en avant les applications des mathématiques à d'autres champs de la connaissance humaine, habituellement peu travaillées dans les classes : les relations dialectiques entre objets réels et objets mathématiques, et la fonction d'aide à la décision. Le problème mathématique initial est proposé par l'enseignant-chercheur coresponsable du groupe ; chaque membre du groupe le cherche individuellement pour nourrir le travail d'analyse a priori ; puis l'énoncé est retravaillé pour aboutir à une situation ayant les caractéristiques d'une fiction réaliste. L'originalité de l'énoncé met notre dispositif à l'abri des solutions existant sur Internet.

> Histoire d'œufs
> Monsieur Paul Hayet fabrique des œufs en céramique qui sont tous identiques. Il voudrait tester la solidité des œufs. Pour cela, il dispose d'une échelle de 100 barreaux. Pour tester la résistance d'un œuf, il le laisse tomber de la hauteur d'un barreau et il regarde s'il s'est cassé ou non. Il voudrait déterminer le barreau le plus haut où les œufs ne se cassent pas. Quelle est la meilleure stratégie pour faire le moins de tests possibles ?

Phase de mathématisation du problème

En 2012, soixante-dix classes du secondaire ont travaillé sur ce problème. En découvrant cette situation, les élèves se sont posé les premières questions, mathématiques ou non, sur les objets en jeu, sur les conditions expérimentales, sur le protocole expérimental, sur la possibilité ou non de certaines issues. D'une classe à l'autre, les questions varient peu : cela impose souvent aux élèves de répondre aux questions qu'ils se sont eux-mêmes posées, en s'interrogeant sur l'influence de certains paramètres sur la solution, ou en faisant des choix parmi des modalités possibles.

Lors de cette phase, le groupe suit les échanges de questions-réponses de manière à pouvoir rédiger une relance adéquate. Cette relance [1], signée par l'enseignant-chercheur vise à orienter la recherche vers un problème mathématique commun, en prenant en compte les échanges des élèves pour fixer les valeurs de certaines des variables didactiques identifiées dans l'analyse a priori.

Conclusion

Dans le cadre d'une fiction réaliste, les solutions sont liées aux choix initiaux ; elles peuvent être partielles ou incomplètes, mais valorisent les démarches de recherche, et elles permettent de mettre en valeur les apports du travail mathématique comme aide à la décision.

Les allers-retours entre objets réels de la fiction réaliste et objets mathématiques sont l'occasion d'aborder les aspects de la discipline liés à la démarche d'investigation qui sont explicitement dans les programmes et de modifier la représentation de la discipline chez les élèves.

Les interactions au sein du groupe entre les différents acteurs permettent de proposer des problèmes originaux consistants sur le plan mathématique et viables dans les classes du secondaire dans le cadre de la résolution collaborative.

Références

Sauter, M. (2008). *Une communauté d'enseignants pour une recherche collaborative de problèmes.* REPERES IREM n 72

Site de résolution collaborative : http ://www.irem.univ-montp2.fr/SPIP/Resolution-collaborative-de,96

1. http ://www.irem.univ-montp2.fr/Relance,614

4.1.3 Transférabilité d'une ressource : une expérience à partir des ressources e-CoLab

Gilles Aldon*, Jean-Louis Bonnafet, Françoise Hérault***, Gilles Marbeuf***, Marie-José Valéro******

*IFÉ, ENS de Lyon
Laboratoire S2HEP
19 allée de Fontenay
69347 Lyon
gilles.aldon@ens-lyon.fr

IREM de Lyon
Université Claude Bernard Lyon 1
Bd du 11 novembre 1918
Villeurbanne
jean-louis.bonnafet@ac-lyon.fr

IREM de Paris 7
Université Paris-Diderot
Case 7018 Batiment Chevaleret
75205 PARIS Cedex 13
herault.francoise@orange.fr
marbeuf.gilles@orange.fr

IREM de Montpellier
Université Montpellier II
Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier cedex 05
mjose.valero@gmail.com

RÉSUMÉ. *Autour de la situation « Réaction », et à partir des expérimentations réalisées durant l'année, l'objectif de l'atelier a été de montrer la transférabilité des ressources produites par e-CoLab et les difficultés rencontrées.*

ABSTRACT. *From classroom's experiences and a particular situation, "Reaction", the e-CoLab team put to the test the possibility of transfer of its resources.*

MOTS-CLÉS. *Probabilités, statistique, ressources, adaptabilité, transfert.*

KEYWORDS. *probability, statistics, resources, adaptability , transfer.*

Introduction

Le travail de l'équipe e-CoLab a débouché sur la publication de trois ouvrages en collaboration avec Texas-Instruments et Hachette (Aldon, 2009, 2010, 2011) dans lesquels des situations utilisant la technologie TI-Nspire étaient proposées. Durant cette année, l'équipe a testé la robustesse des ressources en utilisant d'autres technologies. L'objectif de cette expérimentation était de mettre en œuvre une instrumentalisation des ressources dans des cadres différents de ceux initialement prévus. L'équipe a donc choisi dans ces ouvrages des situations qui pouvaient être expérimentées dans les classes, ce qui a été le cas de la situation « Réaction » (Aldon, 2010, p. 91-100) qui a été reprise dans le projet européen Edumatics [2].

Présentation du problème

Un logiciel permet de relever le temps de réaction entre un stimulus visuel (l'apparition d'un disque rouge à l'écran) et le l'appui d'une touche sur le clavier. Il est prévu pour effectuer deux séries de trente apparitions. La situation de classe initiale plaçait les élèves dans une situation de jeu conduisant à déterminer, d'abord individuellement, puis par groupes et enfin collectivement des critères permettant de classer les séries de temps de réaction obtenues. L'objectif étant alors de mettre en évidence des caractéristiques de position et de dispersion des séries statistiques et de montrer les nécessaires choix permettant de faire des comparaisons : faut-il privilégier la régularité, le record, l'absence de défaillance,..., autant de choix conduisant à mettre en évidence des propriétés particulières des séries statistiques et de leurs représentations.

Conditions

Les données, initialement recueillies et traitées à l'aide du logiciel TI-Nspire de Texas Instruments, peuvent être traitées en utilisant d'autres logiciels : des tableurs (Excel, Libre Office,...) ou des logiciels

2. http ://www.edumatics.eu

de représentation (Géogebra,...) ; en fonction des contextes des classes, plusieurs transferts de la situation initiale ont été expérimentés :

- dans un groupe de MPS de seconde, avant le cours de statistique, en utilisant Excel,
- dans un groupe de MPS de seconde, après le cours de statistique, en utilisant Géogébra 4,
- dans une classe de seconde, en illustration du cours de statistique.

Les conditions différentes des trois expérimentations permettent de confirmer la robustesse de la situation. Les environnements différents peuvent être considérés comme des variables didactiques de la situation ; par exemple, la disponibilité et la facilité d'utilisation des graphiques et en particulier des diagrammes en boîtes dans le logiciel Géogebra a permis de faire émerger plus naturellement une interprétation des données en utilisant les quartiles des séries que dans les environnements des tableurs où ces fonctionnalités ne sont pas facilement utilisables ou absentes. En revanche la familiarité des élèves avec les tableurs leur permettent de rentrer plus rapidement dans le traitement des données.

Transférabilité des ressources

Les expériences réalisées ont été mises en place par trois enseignants dont un seul a fait partie de l'équipe de rédaction de l'ouvrage (Aldon, 2011) mais n'avait pas travaillé spécifiquement sur ce chapitre ; le modèle de ressource utilisé dans cet ouvrage apparaît ainsi comme suffisamment complet pour permettre une instrumentalisation suffisante pour construire un document pour la classe. L'analyse qui en est faite en terme de genèse documentaire (Gueudet et Trouche, 2010) permet de mettre en évidence la nécessité d'une *souplesse* suffisante des ressources pour permettre aux enseignants de s'approprier la situation tout en ayant suffisamment de latitude pour l'exploiter dans les conditions effectives de son enseignement.

Conclusion

L'adaptabilité des ressources produites par l'équipe e-CoLab a été mise à l'épreuve dans ces expérimentations. Même si il demeure nécessaire de prolonger et de généraliser de telles expériences, cette expérimentation montre l'importance, pour permettre une adaptation à des environnements différents, de la robustesse des situations, liée à des analyses approfondies, et de la souplesse suffisante pour faciliter l'instrumentalisation.

Références

Aldon, G. (2009).*Mathématiques dynamiques en seconde*, INRP et Hachette Education.

Aldon, G. (2010).*Mathématiques dynamiques en premières*, INRP et Hachette Education.

Aldon, G. (2011).*Mathématiques dynamiques en terminales*, ENS de Lyon et Hachette Education.

Gueudet, G., Trouche, L. (dir.) (2010). *Ressources vives, le travail documentaire des professeurs en mathématiques*, Presses Universitaires de Rennes et INRP

4.1.4 La prise en compte de l'instrumentalisation dans la conception d'un logiciel pour l'apprentissage des mathématiques : le cas des systèmes d'équations linéaires.

Yani Betancourt*, C. Armando Cuevas*, Luc Trouche**

*Departamento de Matemática Educativa
Cinvestav-IPN
México
betancourt@cinvestav.mx

**IFÉ - ENS de Lyon
19 allée de Fontenay
69347 Lyon
luc.trouche@ens-lyon.fr

RÉSUMÉ. *Les systèmes d'équations linéaires sont un thème fondamental pour le développement de l'algèbre linéaire. Cependant, leur enseignement se résume souvent à trouver la solution par l' application de quelques méthodes de résolution, ce qui semble faire de ce thème mathématique un moment seulement consacré à des calculs arithmétiques ; quant à la résolution elle-même, le concept d'équivalence a un rôle fondamental et n'est pas étudié. Par ailleurs, et même si les calculs arithmétiques sont une difficulté pour les étudiants, nous avons créé un logiciel algébrique qui se centre sur les processus de résolution et fourni une aide pour les calculs. Son implémentation nous a montré que l'instrumentalisation est une partie significative du processus de création de ressources.*

RESUMEN. *Los sistemas de ecuaciones lineales son un tema fundamental en el desarrollo de la teoría de linealidad. Sin embargo, su enseñanza ha sido resumida a simplemente aplicar algún método para encontrar la solución, esto ha generado la creencia de que son un tema matemático donde solamente se hacen muchos cálculos aritméticos ; cuando en la resolución misma, el concepto de equivalencia tiene un papel fundamental y no es estudiado. Por otro lado, es verdad que los cálculos aritméticos son una dificultad para los alumnos, por tal razón, nosotros hemos creado un software algebraico que se enfoca en el proceso de resolución y ayuda con los cálculos. Su implementación nos ha mostrado que la instrumentalización es una parte más del proceso de creación de recursos.*

MOTS-CLÉS.*Système d'équations linéaires, équivalence, projet d'action pratique, outil, instrumentation, instrumentalisation.*

KEYWORDS.

Introduction

Au Mexique, l'enseignement des systèmes d'équations linéaires - SÉL - commence à partir du collège (educación secundaria) et se prolonge jusqu'au lycée (educación media superior). En ce qui concerne les systèmes d'équations linéaires, leur enseignement apparaît dans les deux premières années des études universitaires, et régulièrement constituent l'introduction du premier cours d'algèbre linéaire. Nous nous sommes intéressés à ce niveau d'étude où est présenté et enseigné aux étudiants l'usage de plusieurs méthodes de résolution formelle et générale comme l'algorithme d'élimination de Gauss-Jordan.

Traditionnellement, le processus d'enseignement des SÉL d'abord se centre sur la présentation de l'algorithme ou méthode de résolution, pour ensuite s'appliquer à plusieurs systèmes dans le but de trouver une solution ; finalement le professeur demande aux élèves ou étudiants de résoudre en utilisant la même méthode des autres systèmes semblables. Cette manière de présenter les SÉL ne permet pas d'exploiter la richesse conceptuelle de la théorie mathématique sous-jacente, et de surmonter les difficultés des étudiants concernant la compréhension du concept même de solution d'un SÉL (Trigueros et al, 2007).

Notre expérience à l'université nous a montré que cette trajectoire d'enseignement génère aussi la croyance des étudiants selon laquelle la résolution d'un SÉL est seulement un travail nécessitant de longues opérations arithmétiques avec une grande possibilité de se tromper ; et souvent pour régler ces erreurs dans les opérations arithmétiques, on perd du temps et surtout, on néglige la réflexion des idées mathématiques vraiment importantes qui justifient la méthode de résolution. Ce phénomène didactique se prolonge, puisque travailler avec un SÉL avec plus de trois inconnues implique des calculs augmentant le risque des erreurs arithmétiques.

Deux concepts mathématiques sont la base de la résolution de SÉL : l'équivalence et la linéarité, comme le montre le théorème suivant :

Théorème. Il y a trois opérations entre les équations de un SÉL $m \times n$ qui produisent un autre système d'équations linéaires $m \times n$ équivalent :

I. Permutation d'équations $E_i \leftrightarrow E_j$ avec $i \neq j$.

II. Multiplication d'une équation par un scalaire $E_i \to kE_j$ avec $k \neq 0 \in \mathbb{R}$.

III. Addition d'un multiple d'une équation à une autre équation $E_i \to E_i + \lambda E_j$ avec $\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$.

Ces concepts sont la base de l'algorithme d'élimination de Gauss-Jordan et pour nous, ils sont nécessaires pour la construction et la compréhension du concept solution de un SÉL.

Les systèmes d'équations linéaires sont forcément associés au concept de linéarité (Dorier, 2000), et leur usage en algèbre linéaire est indispensable pour la compréhension des autres concepts : indépendance linéaire, combinaison linéaire, etc. En considérant alors la problématique autour de l'enseignement des systèmes d'équations linéaires décrit ci-dessus, quelques questions surgissent :

Comment éviter les erreurs de calcul pour se centrer sur les concepts d'équivalence et de linéarité ?

En quoi un outil peut être utile pour appuyer la résolution et les concepts d'équivalence et de linéarité ?

Nous proposons une séquence d'apprentissage prenant en compte les idées que Cuevas et Pluvinage (2003) décrivent comme un projet d'action pratique en associant le développement et la construction d'un logiciel avec certaines caractéristiques marquées par nos nécessités et croyances, une ressource au sens donné par Gueudet et Trouche (2009) pour appuyer l'enseignement des SÉL.

Une séquence d'apprentissage et la nécessité d'un logiciel de support

Cuevas et Pluvinage (2003) proposent une séquence d'enseignement, un « programme didactique »(p. 276) pour les mathématiques pré-universitaires et universitaires ; la base de cette proposition est l'articulation de différentes idées de la pensée de l'école active, la théorie piagétienne et la théorie des registres de représentation sémiotique. Le principal objectif du programme didactique de Cuevas et Pluvinage est la mise en marche d'un « projet d'action pratique »(p. 273), c'est-à-dire, un projet qui prend en compte les élèves comme participants actifs qui construisent leurs connaissances à travers un constant développement d'actions concrètes, en oppositions à l'enseignement traditionnel où « L'élève y tente en effet de reproduire les traitements mathématiques qu'en préalable il voit exposer et mettre en œuvre par le professeur » (p. 274) ; pour atteindre cet objectif, ils établissent neuf principes. Nous reprendrons quelques uns de ces principes pour structurer une trajectoire d'apprentissage des concepts d'équivalence et de linéarité dans la résolution de systèmes d'équations linéaires.

Le problème du circuit électrique

Les trois premiers principes conduisent les élèves à résoudre des problèmes « spécifiques dosés graduellement, pour construire ou atteindre le concept visé.» (p. 275), en gardant en tête de toujours amener les élèves « à valider ses résultats, en vérifiant qu'ils aient un sens logique et qu'ils soient en accord avec le problème. » (p. 276). Aussi, chaque problème envisageable doit avoir la caractéristique de « ... un contexte susceptible de présenter de l'intérêt pour l'apprenant. » (p. 275).

En s'appuyant sur ces idées, nous avons cherché et sélectionné différents problèmes avec un certain type de contexte mais surtout en relation avec le thème mathématique choisi. Cependant, le choix de la situation à mettre en pratique n'a pas été une tâche simple. Pour faire le choix du problème, trois paramètres ont été pris pris en compte :

- la formation professionnelle ou le type d'études ;
- le contexte actuel des étudiants tant dans ou hors de l'institution éducative ;
- et notre propre avis par rapport à ce qu'est un problème intéressant.

Partir d'un problème en contexte certainement implique un processus de modélisation mettant en jeu plusieurs compétences pour arriver au modèle mathématique. Comme on sait, un deuxième processus est la résolution du problème à l'intérieur du modèle mathématique construit et finalement, un troisième processus est l'interprétation de la solution du modèle mathématique par rapport au problème en contexte.

Ce simple résumé sur le déroulement de la modélisation mathématique (voir Alsina (2007) pour une explication plus détaillée sur la modélisation mathématique dans l'enseignement des mathématiques), nous amène à réfléchir sur le rôle du problème en contexte dans l'apprentissage. Il est clair que notre objectif n'est pas la modélisation mais la construction de certaines connaissances mathématiques à travers la résolution de problèmes mathématiques qui résultent de la modélisation. C'est la raison pour laquelle nous proposons de donner explicitement aux étudiants le modèle mathématique pour éviter les difficultés associées au processus de modélisation, et se concentrer sur un processus de réflexion à l'intérieur du modèle mathématique. De cette manière, nous rappelons les concepts mathématiques préalables, dans notre cas, les concepts de constante, inconnue, équation linéaire et système d'équations linéaires.

Ainsi, nous avons choisi un problème sur les circuits électriques, puisque nos étudiants faisaient des études de deuxième année d'ingénierie en informatique à l'université : *Centro Universitario Valle de Chalco de la Universidad Autónoma del Estado de México* et parallèlement à ce cours d'algèbre linéaire, ils prenaient aussi un cours sur les circuits électriques. Ensuite nous présentons le problème en contexte et son modèle mathématique :

Problème. Calculer les intensités de courant électrique pour le circuit électrique de la suivante figure : Il faut noter qu'il y a quatre résistances : deux de 2 ohms, une de 3 ohms et autre de 5 ohms, aussi on

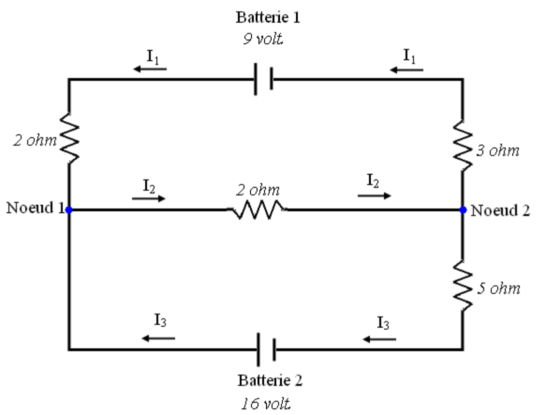


FIGURE 4.1 – Circuit électrique

tient deux nœuds et deux générateurs électriques de 9 volts et 16 volts respectivement.

Modèle mathématique. Un système de trois équations linéaires de trois inconnues :

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 + I_3 &= 0 \\ 5I_1 + 2I_2 &= 9 \\ 2I_2 + 5I_3 &= 16 \end{aligned}$$

Tout le cadre antérieur forme la première étape de la séquence d'apprentissage que nous proposons ; en résumé, échanger le processus de modélisation pour un processus de réflexion du modèle mathématique explicitement donné et avec celui-ci, mobiliser les connaissances préalables des étudiants.

L'étape suivante est clairement la résolution du problème mathématique : dans ce cas, la résolution du système d'équations linéaires. Il est vrai, que nous pouvons simplement prendre un logiciel algébrique comme Matlab ou GNU Octave, mettre le système dans le logiciel pour obtenir rapidement sa solution. Mais dans ces conditions l'apprenant est passif, ce qui est contraire à notre perspective d'apprentissage et le propos de construire l'algorithme ou la méthode résolution à travers l'usage des trois opérations élémentaires, c'est-à-dire, le processus de résolution que les logiciels cachent (ceci est dû au fait que ces logiciels n'ont pas de visée didactique mais pratique) est précisément pour nous l'environnement approprié pour l'apprentissage des concepts d'équivalence et de résolution de systèmes linéaires.

Ainsi, pour bien atteindre cet objectif, nous avons besoin d'un outil numérique qui se centre sur le processus de résolution sans donner directement la solution et sans que les calculs arithmétiques soient une diversion pour les étudiants.

Le logiciel algébrique : AlSel « Algèbre linéaire : Systèmes d'équations linéaires »

La création d'un logiciel d'apprentissage d'un ou de plusieurs concepts de mathématiques est une activité qui pour le moins mobilise trois domaines de connaissance : la mathématique, la programmation dans un langage informatique et un cadre didactique. La conception et le développement du logiciel dépendent de l'articulation de ces connaissances, mais aussi, dans une part importante est de son implémentation. Pour le moment, nous nous intéresserons à la mise aux point de la conception et du développement.

D'abord, notre logiciel doit être bien adapté à un propos, pour nous : appuyer le processus de résolution d'un système d'équations linéaires à travers l'usage des trois opérations élémentaires entre équations linéaires, sans donner la solution explicitement, mais en marquant chacun des moments de l'algorithme : l'élimination et la substitution. Enfin, ce logiciel imaginé à cause d'une nécessite humaine, deviendra un outil dans le sens de Trouche (2005) « un objet technique intégré, ou susceptible d'être intégré par un usager dans ses gestes (scolaires, professionnels ou quotidiens) » (p. 93).

Pour sa conception, et toujours en lien avec notre propos ci-dessus, nous avons pris en compte deux principes du programme didactique de Cuevas et Plunivage :

- le logiciel doit être flexible en permettant à l'utilisateur de réaliser les processus de résolution direct et inverse. « Chaque fois que sont réalisées des opérations qui nous amènent à des concepts mathématiques, mettre en place dans la mesure du possible les opérations inverses. » (p. 277)
- le logiciel doit donner « … une forme de solution alternative. En aucun cas n'imposer une forme de solution. » (p. 277)

Nous avons aussi pris en compte quelques idées sur l'ergonomie d'un logiciel, en particulier la notion d'utilisabilité de Nielsen (2003).

Le développement de l'interface (voir Fig. 2), appelé AlSel et du logiciel algébrique a été fait sur Visual Studio qui permet de développer des applications en différents langages de programmation comme C Sharp.

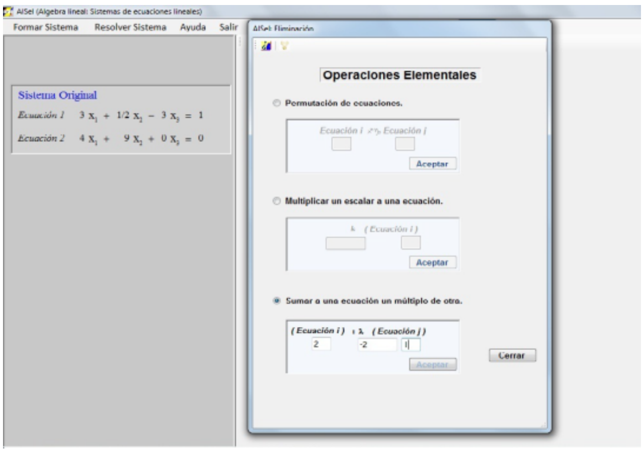


FIGURE 4.2 – Interface AlSel

La deuxième étape de notre séquence d'apprentissage se base pratiquement sur l'usage du logiciel AlSel, avec le but de résoudre le système dérivé de la première étape. Les étudiants auront à prendre les décisions de quelle opération élémentaire utiliser pour obtenir les valeurs des inconnues, et réfléchir sur la vérité de son résultat.

Finalement, nous considérons une troisième étape dans la trajectoire d'apprentissage, il s'agit de la résolution de différents systèmes d'équations linéaires utilisant AlSel, surtout pour arriver à l'existence de systèmes d'équations linéaires n'ayant pas seulement une solution unique mais une infinité de solutions, ou bien, qui n'ont pas solution. Plus encore, pour chaque processus de résolution, induire chez les étudiants la comparaison et la discussion de différentes stratégies de résolution du problème, pour aboutir à une seule méthode de résolution : l'élimination Gauss-Jordan.

Mise en séance du la séquence : l'implémentation de AlSel

Les activités humaines toujours sont accompagnées d'outils, ceux-ci se trouvent dans le centre même du développement de toute activité, tant que « La conception et l'intégration des outils sont au cœur de l'activité humaine » (Trouche, 2005, p. 94). Actuellement, l'usage d'outils informatiques et numériques pour l'apprentissage des mathématiques est vaste, ce qui a été le point de départ de recherches récentes. En particulier, Trouche (2004) établit que l'interaction entre l'humain et la machine dans un environnement d'apprentissage informatique est constitué par la combinaison de deux processus : l'instrumentation et l'instrumentalisation.

L'instrumentation est le processus où l'individu assimile et intériorise les caractéristique et foncions des outils, un processus « ... directed towards the subject » (Trouche, 2004, p. 290) ; dans le cas de l'instrumentalisation, Trouche (2004) dit « Instrumentalization is a differentiation process, directed towards the artifacts themselves » (p. 293), c'est-à-dire, c'est le processus où les outils sont doué de neuves usage par les individus.

Nous pouvons constater ces deux processus dans de la mise en pratique de notre séquence d'apprentissage, donc le plus grande parte des activités s'sont réalisé dans une salle informatique douée aussi d'un tableau numérique et d'un projecteur, où les étudiants passions par un processus de instrumentation du logiciel algébrique AlSel parallèle à la construction des concepts. On a pu observer, justement dans la deuxième session, le processus d'instrumentalisation au moyen des remarques et les attitudes de quelques étudiants par rapport au travail dans le logiciel, par exemple, dans cette deuxième-là session le propos était résoudre un system d'équations linéaires 4×4, pourtant ils devaient utiliser un peu plus de combinaisons de opérations élémentaires pour résoudre le système ; quelques étudiants disaient faire une *mouvais* choix d'opération ou bien, selon eux, utiliser d'un façon inadéquat l'opération comme par exemple, utiliser un scalaire en la deuxième opération élémentaire qui ne donne pas le résultat attendu multiplier un scalaire. Sur celle-ci, un étudiant remarquait ouvertement que le logiciel pourrait être meilleur si le permettrai retourner à certain moment de la résolution, surtout quand il pensait avoir *un erreur* par rapport des cas ici mentionnent.

Ce commentaire d'un étudiant a été extrêmement signifié, puisque pas seulement il montre l'apparition de l'instrumentalisation, sino que aussi suggère prendre en compte la instrumentalisation comme une parte plus du développement de logiciels pour le apprentissage des mathématiques. Alors, améliorer un outil dépende à la fois de la volonté et des choix du créateur comme des processus d'instrumentalisation de l'outil. Le logiciel a été bien aperçu par les étudiants et les expériences nos ont fait rajouter différents éléments a le logiciel, en particulier un bouton dans le barre de menus (voir Fig. 3) qui permet supprimer les démarches que l'usager considère convenable dans le processus de résolution d'un système d'équations linéaires.

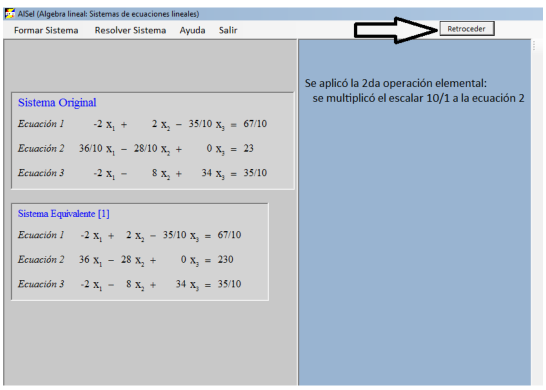


FIGURE 4.3 – Interface avec bouton

Conclusion et perspectives

En général, chaque étape de notre séquence d'apprentissage s'est bien déroulée, mais aussi nous avons rencontré des résistances d'un grand nombre d'étudiants tant en ce qui concerne l'usage du logiciel que dans la construction de la méthode de résolution, alors que ces connaissances auraient dû être acquises. A la fin, tous sont arrivés à établir l'algorithme de Gauss-Jordan et une première notion de l'équivalence entre les systèmes ; d'un autre côté, le cas le plus difficile à comprendre pour les étudiants se trouve être les systèmes d'équations linéaires sans solution. Si bien, qu'un étudiant fait usage de l'équation linéaire :

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b \text{ avec } b \neq 0$$

pour argumenter que le système n'a pas solution, ces arguments se sont fondés sur l'idée de une contradiction mathématique, donc 0 ne peut pas être égal à un autre réel.

Pour autre parte, le problème en contexte a été de très intéressant, même s'il n'pas été facile de bien se concentrer sur la résolution des autres systèmes, donc les étudiants toujours ont fait référence à les circuits électrique. D'après notre expérience, ce phénomène paraît toujours dans ce type de séquence d'apprentissage où il y a un certain problème réel ou de contexte ; nous en avons pensé, en particulier le prend en compte pour articuler une stratégie qui permet délier les situations réel et le contenu mathématique d'une façon plus naturel et pratiqué pour générer une pensé mathématique plus formel.

Finalement, le logiciel AlSel s'est avéré être un bon outil comme support en l'apprentissage du concept d'équivalence entre équations linéaires et pour tant en la résolution de systèmes d'équations linéaires. Aujourd'hui, AlSel continue son processus d'évolution, donc comme tout outil doit de s'adapter aux nécessites, surtout à celles qui sont nées sous le regard de son instrumentalisation comme le besoin de quelques usagers pour manipuler systèmes d'équations linéaires avec coefficients réels comme $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{5}$.

Références

Alsina, C. (2007). Less chalk, less words, less symbols . . .more object, more context, more actions. En Blum, W. et al (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 35-44). New York : Springer.

Cuevas, A. et Pluvinage, F. (2003). *Les projets d'action pratique, éléments d'une ingénierie d'enseignement des mathématiques.* Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives, vol. 8. (pp. 273 292)

Dorier, L. (1995). *A general outline of the genesis of vector space theory.* Historia Mathematica, vol. 22. (pp. 227-261)

Gueudet, G. et Trouche, L. (2009). *Towards new documentation systems for mathematics teachers ?* Educational Studies in Mathematics, vol. 71. (pp. 199-218)

Nielsen, J. (2003). *Introduction to Usability.* Article consulté sur la page d'Internet :
http ://www.useit.com/alertbox/20030825.html

Poole, D. (2007). *Álgebra Lineal : una introduccion moderna.* México : Thompson.

Trigueros, M., Oktaç, A., Manzanero, L. (2007). *Understanding of systems of equations in linear algebra.* En 5th CERME (Congress of the European Society for Research in Mathematics Education), Larnaca, Chipre.

Trouche, L. (2004). *Managing the Complexity of Human/Machine Interactions in Computerized Learning Environments : Guiding Students' Command Process through Instrumental Orchestrations.* International Journal of Computers for Mathematical Learning, vol. 9. (pp. 281-307)

4.2 Formation et diffusion des ressources

Ce thème s'intéresse aux évolutions dans le métier d'enseignant provoquées par l'introduction des technologies numériques dans l'éducation. Pour s'adapter, l'enseignant doit acquérir de nouvelles compétences et parfois adopter de nouvelles modalités de travail. Les ressources pour l'enseignement et la formation jouent un rôle crucial dans ces évolutions.

Cet atelier s'est proposé d'interroger les dispositifs et structures permettant de diffuser des ressources et d'accompagner leur appropriation par des enseignants. Il a donné lieu à trois présentations de travaux d'équipes associées à l'IFE. On trouvera leur description dans les pages qui suivent, mais ces quelques lignes proposent un bref compte-rendu de certains points soulevés lors de débats.

Les dispositifs de la formation des enseignants aux nouvelles technologies ont évolué sur la forme et sur le contenu : d'une part les aspects techniques liés à la prise en main de logiciels ont disparu, et d'autre part l'aspect didactique est renforcé en s'appuyant sur des expériences de terrain. Cela a amené les formateurs à faire évoluer leurs ressources aussi bien pour la formation initiale que continue des enseignants. Cette évolution est le résultat des évolutions des technologies, de changement des rapports des enseignants aux nouvelles technologies, des évolutions des programmes et enfin des apports des résultats des travaux en didactique des mathématiques sur l'intégration des TICE.

Pour les ressources partagées, plusieurs points ont été abordés. La formation des enseignants doit porter plutôt sur l'adaptation des ressources existantes que sur leur conception. Il a été souligné que la mutualisation des ressources est maintenant facilitée par les nouvelles technologies mais il reste des problèmes liés à leur indexation et l'évaluation de leur qualité.

Enfin, nous avons abordé le développement et la diffusion des nouveaux dispositifs technologiques.

4.2.1 Epsilonwriter comme espace de création de partage et de communication

Hamid Chaachoua*, Nathalie Essonier, Sébastien Jolivet**, Saïd Mouffak****

* IUFM - Université Joseph Fourier Grenoble 1
Laboratoire LIG
11 rue des Mathématiques
Domaine Universitaire
BP 46 - 38402 Saint-Martin-d'Hères

** Professeurs associés à l'IFE-ENSL
19 allée de Fontenay
69007 Lyon

RÉSUMÉ. *Nous travaillons depuis deux ans sur les questions d'appropriation des environnements innovants disponibles dans Epsilonwriter pour la conception de ressources, leur partage et leur diffusion. Dans cet atelier, après une courte présentation de l'application, nous montrerons des exemples d'utilisation qui nous permettront d'aborder les conditions écologiques, didactiques et ergonomiques facilitant ou non son intégration par les enseignants.*

ABSTRACT. *We work for two years on issues of appropriation of innovative environments available in Epsilonwriter for designing, sharing and disseminating of resources. In this workshop, after a short presentation of the application, we will show examples that will allow us to address ecological, didactical and ergonomic conditions that facilitate or not its integration by teachers.*

MOTS-CLÉS. *Epsilonwriter, conception, partage et diffusion de ressources*

KEYWORDS. *Epsilonwriter, design, sharing and dissemination of resources*

Epsilonwriter

L'application Web « epsilonwriter » du portail « epsilonwriter.com » (Nicaud & Viudez, 2009, 2011) permet une rédaction très facile de documents contenant du texte, des formules mathématiques et des images. L'application offre également des outils permettant à l'enseignant de rédiger des questionnaires, avec des questions à choix multiple (QCM) contenant des formules mathématiques et avec des questions à réponses mathématiques ouvertes. En mode « questionnaire », l'élève répond aux questions une à une et passe en correction pour voir si sa réponse est juste et pour visualiser la réponse attendue et les explications rédigées par l'enseignant-auteur. En mode « test », l'élève répond à l'ensemble des questions puis passe en correction à la fin pour voir son score global, l'évaluation de ses réponses, les réponses attendues et les explications. Les questionnaires remplis par les élèves peuvent être envoyés par mail à l'enseignant qui peut mettre des annotations sur chaque réponse et modifier les scores calculés automatiquement par le logiciel.

Le portail propose aussi un forum permettant les échanges entre élèves et enseignant. Le portail avec ses outils permet donc aux élèves de travailler en autonomie même en dehors de la classe et à l'enseignant de suivre à distance le travail des élèves.

Présentation de l'atelier

Cette année nous avons travaillé sur les processus d'appropriation de ces environnements par les enseignants. En particulier,

- l'utilisation du forum au lycée ;
- l'utilisation d'Epsilonwriter pour la conception de ressources ;
- la mise en place d'un espace de partage de ressources.

Après une présentation de l'application et des exemples d'utilisation, nous aborderons l'étude des conditions écologiques, didactiques et ergonomiques facilitant ou non son intégration par les enseignants.

Références

Nicaud J.-F., Viudez C. (2009). *epsilonWriter : implementing new ideas for typing text and math.* The MathUI workshop 2009. Grand Bend, Ontario, Canada.

Nicaud J.-F., Viudez C. (2011). Le traitement des expressions mathématiques dans tous les contextes avec epsilonwriter. In L. Trouche et al. (Dir.), *Faire ensemble des mathématiques : une approche dynamique de la qualité des ressources pour l'enseignement.* Actes des journées mathématiques de l'Institut français de l'Éducation (pp. 177-184), 15 et 16 juin 2011, Lyon.

4.2.2 De l'utilisation à la formation : géométrie dynamique et logiciels mathématiques

Frédérique Bourgeat*, Anne Calpe, Marina Digeon*, Esmaël Esfahani*, Isabelle Leyraud*, René Thomas*, Olivier Touraille***

* groupe Géométrie Dynamique Stages, professeurs associés à l'IFE
IREM de Lyon,
Bâtiment Jean Braconnier
43, bvd du 11 novembre
69100 Villeurbanne

** S2HEP-EducTice
Université Lyon 1 et Ecole Normale Supérieure de Lyon
19 allée de Fontenay
69007 Lyon
& groupe Géométrie Dynamique Stages, IREM de Lyon
anne.calpe@ens-lyon.fr

RÉSUMÉ.*Nous participons depuis plusieurs années aux activités de recherche menées à l'IFE sur les questions de qualité de ressources, ce qui fait évoluer nos pratiques. Notre présentation veut mettre en lumière les évolutions des ressources que nous produisons et utilisons pour former nos collègues du secondaire à l'utilisation de divers logiciels de géométrie dynamique. Nous proposons aux participants de questionner des ressources conçues à différentes époques et portant sur un même thème mathématique. Nous mettons en évidence les évolutions techniques et les transformations profondes dans les visées pédagogiques que celles-ci ont générées.*

ABSTRACT. *For several years we are involved in research activities at IFE on issues of resource quality, which is changing our practices. Our presentation will highlight the evolution of resources we produce and use to train our secondary school colleagues to use various dynamic geometry systems. We propose to the participants to question resources designed at different periods of time and related to the same mathematical topic. We highlight the technical evolutions and transformations in the educational aims that they have generated.*

MOTS-CLÉS. *géométrie dynamique, formation professionnelle, enseignant de mathématiques*
KEYWORDS. *dynamic geometry systems, in-service teachers training, mathematic teachers*

Introduction

À l'IREM de Lyon en 1996, un groupe d'utilisateurs et concepteurs de ressources reposant sur le logiciel Cabri-Géomètre s'est formé. Il a évolué dans sa forme et dans ses objectifs depuis 16 ans. Le groupe a rapidement proposé des stages au PAF pour la formation à la maîtrise des fonctionnalités du logiciel Cabri puis Cabri2+. Mais les questions de « l'utilité » de ces outils a toujours été centrale pour les membres du groupe. La distinction entre dessin et figure fut par exemple l'un des tout premiers thèmes de travail du groupe.

Les évolutions de pratiques

Depuis 5 ans ce collectif est devenu le « groupe Géométrie Dynamique ». Nous avons entamé en 2008 une collaboration avec l'INRP-IFE et avons participé à un projet européen visant à diffuser les pratiques et développer l'interopérabilité entre de nombreux logiciel : le projet Intergeo. L'axe principal de notre travail dans cette action était celui de l'évaluation de la qualité de ressources disponibles sur une plateforme de mutualisation : http ://www.i2geo.net . Les effets de la collaboration avec les chercheurs ont été sensibles et divers. Tout d'abord nous avons été confrontés à l'explicitation de nos propres « critères-qualité » et à une exigence de précision dans le travail d'évaluation de la qualité de ressources. Ensuite nous pouvons noter l'enrichissement de nos outils dynamiques par une ouverture sur une plus grande variété de logiciels. Nous étions en effet confrontés dans les multiples ressources à des environnements très variés. Enfin nous avons construit une réflexion sur les apports que le processus d'évaluation pouvait avoir dans le cadre de la formation professionnelle. Nous avons essayé de mettre à profit le questionnement sur les qualités d'une ressource dans le cadre de nos formations aux usages de la géométrie dynamique. Ainsi nous avons réaffirmé les priorités qui guident le travail au sein du groupe. Il s'agit tout d'abord de suivre les multiples évolutions logicielles tout en gardant toujours pour objectif principal de mettre la technique au service de la pédagogie et des apprentissages pour les élèves (Colonna, Frackowiak, Le Berre, Zucchetta 2007, Soury-Lavergne 2011).

Des évolutions techniques

Nous essayons de garder « un temps d'avance » sur nos stagiaires dans la maîtrise des outils. Cette contrainte que nous nous imposons d'être réactif face aux évolutions technologiques a des conséquences importantes. Tout d'abord nous consacrons une part importante et régulière du travail du groupe à la formation technique. D'autre part ce choix nous éloigne de la géométrie pure puisque les derniers développements logiciels proposent parfois des suites complètes d'environnements de travail algébrique et géométrique. Et ceci pour la géométrie plane comme pour la géométrie dans l'espace.

Présentation de l'atelier

Nous proposons aux participants de l'atelier de se placer en position de stagiaires et de tester trois ressources. Nous les avons choisies dans les archives du groupe et dans nos documents de travail actuels. Elles portent toutes trois sur le même point de connaissances mathématiques. Nous proposons d'étudier les évolutions, de questionner les concepteurs et d'analyser les choix opérés. Nous souhaitons faire émerger ce que les évolutions technologiques ont apporté et ce qui est la part des choix didactiques pour les formateurs.

Références

Colonna A., Frackowiak B., Le Berre M., Zucchetta J.-F. (2007). Transformation d'un problème, L@ feuille à problème n10, Disponible sur Internet :

<http ://irem-fpb.univ-lyon1.fr/feuillesprobleme/feuille10/dansnosclasses/transfopb.html> (consulté le 05 mai 2012)

Soury-Lavergne S. (2011). *De l'intérêt des constructions molles en géométrie dynamique* MathémaTice n27. Disponible sur Internet :

<http ://revue.sesamath.net/spip.php ?article364> (consulté le 05 mai 2012).

4.2.3 MATématiques INstrumentées au Lycée - MATINAL

Groupe MATINaL : Laurent Hivon, Thomas Lenne, Dominique Payant, Manuel Péan et Claire Thibaud

Professeurs associés à l'IFE-ENSL
IREM Orléans-Tours

RÉSUMÉ.*Le groupe MATINaL (MAThématiques INstrumentées au Lycée) est né du groupe GdoN qui avait travaillé sur les ressources documentaires des jeunes enseignants de mathématiques, et plus particulièrement sur les clés USB destinées aux professeurs néo-titulaires en 2008 et 2009. Le thème de travail du groupe MATINaL est centré autour des ressources pour la mise en place de démarches d'investigation dans l'enseignement des sciences et pour cela il développe en parallèle une plateforme multi-agent réactive GeoGebra.*

ABSTRACT. *The group MATINaL (instrumented mathematics at the high school) was born from GdoN group who worked on the documentational resources of young mathematics teachers, especially on USB keys for beginning teachers in 2008 and 2009. The theme of the group's work focuses on resources for the implementation of inquiry-based science learning and for this purpose, it develops in parallel a multi-agent reactive platform GeoGebra.*

MOTS-CLÉS.*démarche d'investigation, enseignement des sciences, plateforme multi-agent, GeoGebra*

KEYWORDS. *inquiry-based approach, science teaching, multi-agent platform, GeoGebra*

Présentation du groupe

C'est au sein de l'IREM d'Orléans, en association avec l'IFE et en partenariat avec l'IUT d'Orléans que travaille le groupe MATINaL. Il est composé de cinq membres (Claire Thibaud, Dominique Payant, Thomas Lenne, Laurent Hivon et Manuel Péan). Le thème général de leur action est la démarche d'investigation pour l'enseignement des sciences (DIES), mais il faut reconstituer l'historique du groupe pour comprendre sa sensibilité vis à vis de ce thème.

C'est sous le nom TICE lycée qu'au sein de l'IREM d'Orléans, ils ont développé un site d'animations mathématiques en ligne (e-cureuil.fr). Ils se sont ensuite associés avec l'INRP, actuel IFE, sous le nom Crome afin d'étudier l'utilisation en classe d'un réseau de calculatrices : le TI-Navigator. Ils ont alors été sensibilisés au travail collaboratif des élèves, aux débats mathématiques dans la classe et aux genèses instrumentales. Ils ont ensuite abordé les thèmes de la genèse documentaire de l'enseignant et des critères de qualité d'une ressource à travers l'étude des clés USB distribuées aux professeurs néo-titulaires en mathématiques.

Le projet

Le développement des DIES dans la pratique des sciences, et plus particulièrement des mathématiques, est un des axes privilégiés pour encourager les élèves à se porter plus massivement vers les sciences.

Le projet a pour objectif d'étudier l'acceptabilité de ressources à fort potentiel DIES dans les pratiques de classes des enseignants et plus particulièrement dans leur système documentaire. L'étude se centrera plus particulièrement sur deux ressources : des animations issues du site collaboratif e-cureuil et un système multi-agents en cours d'élaboration conçu autour du logiciel GeoGebra.

C'est dans ce cadre que le groupe MATINaL a cette année participé à l'élaboration d'un nouvel outil et s'est approprié le cadre théorique cK¢(Balacheff 1995, Balacheff et Margolinas 2005).

Un nouvel outil de travail collaboratif

L'étude du système de réseau de calculatrices en classe TI-Navigator avait permis d'observer que les élèves s'engageaient davantage dans le travail de la classe, que différentes stratégies d'élèves se confrontaient sur un même espace graphique et que cela générait davantage de débats mathématiques au sein de la classe.

Ce sont ces aspects que le groupe MATINaL a essayé de retrouver en développant un outil permettant aux élèves d'une classe d'opérer simultanément sur une même figure GeoGebra. Un prototype a d'abord vu le jour, celui-ci fonctionne grâce au réseau internet, c'est une ressource d'une version bêta du site e-cureuil. Si cette version peut être utile pour une utilisation à distance elle n'est pas utilisable simultanément dans une salle informatique car trop dépendante de la qualité de la connexion internet.

Le groupe a alors travaillé avec Yannick Parmentier (que nous remercions au passage), enseignant-chercheur en informatique à l'IUT d'Orléans. Nos attentes et nos besoins lui ont été présentés et cela a donné lieu à un projet pris en charge par un groupe d'étudiants de l'IUT. Le cahier des charges devait être élaboré par les étudiants car c'est un objectif important de leur formation. Ils étaient pour cela en contact avec un interlocuteur privilégié du groupe MATINaL. Mais ce travail n'a pas été effectué et le produit ne correspondait alors pas aux besoins exprimés. Cependant ils ont réussi a encapsuler GeoGebra dans un logiciel qui fait communiquer les machines élèves avec celle du professeur dans un système client/serveur. Notre groupe a donc adapté ce système pour qu'il réponde à nos attentes.

Ce produit, en cours de finalisation, et des scenarii d'activités en classe ont commencé à être mis en œuvre. Notamment « Aire-périmètre » où les élèves construisent des figures géométriques (dans un environnement papier-crayon ou informatique), ils envoient ensuite des points ayant pour abscisse le périmètre de la figure et pour ordonnée son aire, le problème devient alors : quelle partie du plan peut être recouverte par l'ensemble des points envoyés ?

Un nouvel outil de travail collaboratif

Le groupe MATINaL avait essayé d'établir des critères permettant de qualifier une ressource de « fort potentiel DIES ». Ces critères, tout en croisant plusieurs cadres didactiques différents, semblaient répondre uniquement aux ressources auxquelles nous étions sensibles.

L'intervention de Michèle Artigue aux Journées mathématiques de l'IFE 2012 est éclairante de ce point de vue là (Voir page 14). En effet, il semble illusoire de définir les DIES. Celles-ci dépendent à la fois de la culture mathématique commune à un pays mais aussi de la sensibilité de chacun.

Celle du groupe MATINaL est clairement le travail collaboratif des élèves, et ce sont donc les activités liées à l'outil de travail collaboratif décrit précédemment qui seront étudiées dans le cadre du projet.

Les DIES étant ainsi de l'ordre du concept, le groupe MATINaL propose de l'étudier selon le cadre théorique cK¢développé par N. Balacheff. Une conception est caractérisé par :
- un ensemble de problèmes ;
- un ensemble d'opérateurs ;
- une structure de contrôle ;
- un système de représentation.

Le concept est identifié à travers les différentes connaissances communes qui lui sont liées. Les conceptions de chacun constituent les connaissances. Chaque conception est cohérente au sein de son domaine de validité.

Il s'agira alors d'identifier les conceptions qu'ont les sujets (des enseignants de mathématiques de lycée), de leur proposer les ressources qui rendent inopérants les opérateurs habituels car mettant en défaut leurs structures de contrôle.

Des entretiens à propos de la mise en place de problèmes ouverts dans la classe et de l'intégration des TICE ont été menés afin de voir si l'on peut dégager les problèmes se posant à l'enseignant, les opérateurs utilisés et les structures de contrôle. Les systèmes de représentation n'ont en revanche pas été clairement identifiés.

Cette démarche doit être approfondie afin d'obtenir des résultats plus robustes. Il faut au préalable essayer de dresser la liste exhaustive des connaissances liées aux DIES afin de pouvoir identifier clairement les conceptions des sujets, autrement dit : à quelles connaissances des DIES participent la conception du sujet ?

Il faut aussi mener les entretiens en regard du système documentaire du sujet car les ressources étant vives, elles auront le double avantage d'évaluer la pertinence des réponses données par le sujet et de témoigner de l'impact des nouvelles ressources dans le système documentaires du sujet et ainsi de la modification de ses conceptions.

Références

Balacheff N. (1995). Conception, connaissance et concept. In : Grenier D. (ed.) *Didactique et technologies cognitives en mathématiques*, séminaires 1994-1995 (pp.219-244). Grenoble : Université Joseph Fourier. http ://ckc.imag.fr/images/1/13/Balacheff1995.pdf

Balacheff N., Margolinas C. (2005). cK¢Modèle des connaissances pour le calcul de situation didactiques. in Mercier A., Margolinas C. (eds.) *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp.1-32). Grenoble : Editions La Pensée Sauvage. http ://ckc.imag.fr/images/d/df/Balacheff-Margolinas2005.pdf

4.3 Conception de ressources et apprentissage des mathématiques à l'école primaire

L'enseignement des mathématiques à l'école primaire a été pour la première fois en 2012 un des thèmes des journées mathématiques et l'objet d'un atelier qui a réuni une bonne vingtaine de personnes. Des travaux emblématiques sont menés depuis longtemps par l'INRP, tels que ceux de l'équipe ERMEL ou du laboratoire ADEF à l'école Saint Charles de Marseille. L'importance qu'a pris ce thème dans le programme scientifique et de recherche de l'IFÉ se traduit maintenant non seulement par la reconnaissance officielle de la contribution de nos collègues enseignants du primaire avec le statut d'enseignant associé, mais surtout par le lancement de nouvelles actions sur les premiers apprentissages en maternelle, sur la question des technologies et celle du développement professionnel des enseignants.

L'atelier 3 a travaillé ce thème à partir de quatre présentations.

Une présentation du groupe MARENE, qui participe au projet national Mallette, a concerné des travaux de grande section de maternelle sur l'aspect ordinal du nombre et des travaux de CP faisant usage de différents environnements informatiques tels que le logiciel « la course aux nombres » et le « boulier chinois » de Sésamath (voir le texte de Bueno-Ravel, Gueudet et Poisard dans ces actes).

Un autre groupe participant au projet Mallette et aussi au projet MaDyP - mathématiques dynamiques au primaire - pour le cycle 3, a présenté des situations dans les domaines numérique et géométrique, élaborées à partir de cahiers d'activités informatisés conçus avec la technologie Cabri Elem (voir le texte de Soury-Lavergne et Calpe dans ces actes).

Le groupe ERMEL a présenté une situation de repérage en CP pour travailler l'articulation entre le repérage relatif et le repérage absolu. Le principe de la situation est de faire utiliser aux élèves plusieurs sources d'information pour identifier une position ou un déplacement avec l'objectif de leur faire constituer un système de représentation-codage de cette position ou déplacement. Les situations sont élaborées à partir de situations réelles réalisées effectivement par les élèves, dans la cour par exemple, et de photos de ces situations reprises en classe. Ce groupe a mis en évidence des éléments de méthodologie pour la conception de situations pouvant être repris par tous les participants : y a-t-il dans chaque situation un problème à résoudre par l'élève ? Si oui, comment le formuler de façon générale à partir de données et d'une question. Quels sont les choix didactiques en terme de contraintes et de variables ? Quels sont les savoirs construits ? Quels ensembles d'objets sont mis en relation dans chaque situation ? Et finalement, comment se décide le vrai et le faux ? (Douaire et al. 2009).

Enfin, une présentation du groupe LéA Saint Charles de Marseille a permis de visionner des vidéos de classe pour discuter le rôle de l'enseignant dans la reprise d'une ingénierie en arithmétique conçue par Brousseau (1982) visant l'établissement de l'algorithme d'addition. Cette ingénierie utilise une « boîte » dans laquelle l'élève peut placer ou enlever des jetons et qui fonctionne à la fois comme un moyen de produire le résultat de l'addition et comme un moyen de vérifier ce résultat lorsqu'il est obtenu par d'autres moyens par l'élève. Les vidéos ont conduit les participants à l'atelier à interroger le rôle de la manipulation matérielle dans l'ingénierie. Si elle a l'avantage de permettre à tous les élèves de s'inscrire dans la situation elle peut aussi s'ériger en obstacle aux apprentissages, lorsque l'élève ne perçoit pas que le travail sur le code est plus efficace que la manipulation des objets.

Les discussions menées au cours de l'atelier montrent une forte convergence dans les problématiques et les préoccupations de chaque groupe. Elles concernent les caractéristiques des situations conçues, les potentialités et les difficultés liées à l'usage de la technologie et en premier lieu la nécessité de mieux cerner le rôle de l'enseignant dans la conception, l'appropriation et la mise en œuvre de ces situations.

Références

Brousseau G. (1982). Les objets de la didactique des mathématiques - Ingénierie didactique. In *Actes de la deuxième école d'été de didactique des mathématiques* (pp.10-60). Orléans : IREM d'Orléans.

Douaire J., Emprin F., Rajain C. (2009) *L'apprentissage du 3D à l'école, des situations d'apprentissage à la formation des enseignants*. Repères IREM n77, pp. 23-52.

4.3.1 Mathématiques dynamiques pour l'école primaire et mallettes de ressources

Sophie Soury-Lavergne*, Anne Calpe*

* IFÉ - ENS de Lyon
19, Allée de Fontenay
69007 Lyon
Sophie.Soury-Lavergne@ens-lyon.fr
Anne.Calpe@ens-lyon.fr

RÉSUMÉ. *Présentation du travail réalisé au sein des projets Mallette et MaDyP qui concernent l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques à l'école primaire avec les technologies, traités sous l'angle de l'appropriation des technologies par les enseignants. La production du groupe consiste en des cahiers d'activité informatisés, réalisés avec la technologie Cabri Elem, sur un ensemble variés de contenus mathématiques des domaines numériques et géométriques.*

ABSTRACT. *The projects Mallette and MaDyP deal with learning and teaching mathematics with technologies at primary school. The question is the appropriation of technologies by the teachers. The paper presents the digital books of mathematical activities that have been produced by the research group (teachers and researchers) using the Cabri Elem technology. The mathematical content of the digital books is diverse, mainly numerical and geometrical notions.*

MOTS-CLÉS. *Mathématique, école primaire, technologie Cabri Elem, appropriation, intégration*

KEYWORDS. *Primary school mathematics, Cabri Elem technology, appropriation, integration*

Ce texte s'appuie sur les contributions de Yasmina Chaachoua, Maëlle Chabert, Catherine Glaize, Michela Maschietto, Géraldine Mastrot, Jean-Pierre Rabatel, Valérie Turbeaux, Christine Vellat, Véronique Versaevel, Anne Voltolini, Hélène Zucchetta et Jean-François Zucchetta

Mallette et MaDyP, deux projets de l'IFÉ concernant l'appropriation des technologies par les enseignants du primaire

Nous présentons les travaux relatifs à l'utilisation des technologies pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques à l'école primaire, réalisés depuis septembre 2011 par un groupe d'enseignants et de formateurs de la région Rhône-Alpes et pilotés par l'IFÉ. Ces enseignants participent à deux projets complémentaires qui couvrent l'ensemble de l'école primaire, le projet Mallette de la maternelle au cycle 2 et le projet MaDyP pour le cycle 3. Dans ces deux projets, la problématique commune est celle de l'appropriation des ressources par les enseignants : comment rendre ces ressources utilisables et effectivement utilisées ?

Mallette, machines mathématiques et technologie pour l'apprentissage des mathématiques en maternelle et début de l'école élémentaire

Le projet « Mallette de ressources mathématiques pour l'école, cycle 1 et cycle 2 » est réalisé en partenariat avec la COPIRELEM et le CREAD (laboratoire de l'Université de Bretagne Occidentale). Il s'agit de concevoir une « Mallette » qui mettra à disposition des enseignants une collection de ressources pour enseigner, avec ou sans technologie, en réunissant du matériel concret nécessaire à la mise en œuvre, des logiciels, des fiches élèves et surtout l'accompagnement nécessaire pour l'enseignant : livre du professeur, tutoriels, vidéos de classe, moyens de collaboration et offre de formation. Les travaux du volet CREAD du projet, intitulé MARENE, sont présentés dans ces mêmes actes par Bueno-Ravel, Gueudet et Poisard.

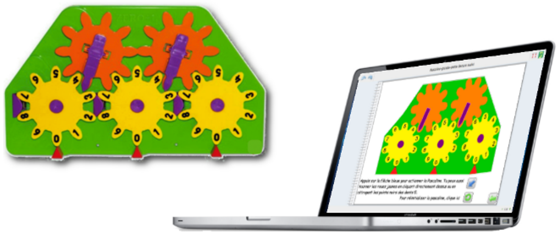


FIGURE 4.4 – La Pascaline, une machine mathématique du laboratoire des machines mathématiques italien et sa version informatisée avec Cabri Elem

Le volet Rhône-Alpes du projet Mallette, intitulé MACARhon, produit des ressources qui reposent sur l'utilisation de duo « artefacts et cahiers d'activité informatisés ». Le principe est que l'élève retrouve dans l'environnement informatique, les objets manipulés réellement. Ce principe a de multiples avantages potentiels tels que : celui d'étendre le fonctionnement du matériel concret, de favoriser l'autonomie de l'élève grâce à de nouvelles rétroactions permettant de valider et invalider ses stratégies, de poser de nouveaux problèmes ou de s'entraîner et enfin de varier les caractéristiques des situations dans lesquelles une même notion mathématique est travaillée. Nous élaborons un duo particulier à partir de la Pascaline (une machine mathématique, Maschietto et Bartoloni Bussi 2012) et d'un modèle informatisé de la machine (cf. Figure 1). Un scénario d'utilisation de ce duo pour l'apprentissage de la numération décimale est en cours d'élaboration sur la base d'un premier scénario initialement conçu en Italie dans le cadre du laboratoire de machines mathématiques1. Une présentation d'éléments du scénario est disponible dans Maschietto et Soury-Lavergne (2012).

MaDyP, autonomie de l'élève et qualité des apprentissages mathématiques au cycle 3

Le projet MaDyP vise plus spécifiquement la conception d'activités mathématiques utilisant les technologies pour impliquer les élèves dans une réelle activité mathématique avec une dimension expérimentale. Les environnements de mathématiques dynamiques sont un moyen de concevoir de telles activités car ils permettent aux élèves de manipuler des représentations d'objets mathématiques ayant un comportement cohérent avec le savoir mathématique et de développer plusieurs stratégies de résolution de problème qui sont validées par l'environnement (Soury-Lavergne et Maschietto 2012).

Nous concevons des cahiers d'activité informatisés, sorte de petits logiciels, avec la technologie Cabri Elem2, un environnement de conception qui permet, sans connaissances préalables en informatique, de fabriquer les objets que l'élève va pouvoir manipuler, de décider de leur comportement à l'interface et de créer les différentes rétroactions pertinentes relatives aux actions de l'élève. Organisé en une succession de pages, un cahier d'activité Cabri Elem permet également de scénariser l'activité de l'élève en choisissant les variables qui favorisent ou bloquent les procédures possibles. Cela nécessite une analyse didactique de la situation et doit prendre en compte les possibilités et contraintes de l'environnement auteur. Une fois le cahier conçu, il est utilisable par les élèves et les enseignants directement sans passer par l'environnement de conception. Les thèmes mathématiques, numériques ou géométriques, actuellement travaillés sont : les triangles, les quadrilatères, les patrons du cube, le repérage dans l'espace, les graduations (repérage de l'unité dans une graduation), les décimaux, les tables de multiplication et d'addition.

Présentation d'un cahier d'activité informatisé : « la cible des nombres »

La première idée du cahier « la cible des nombres » a été initialement proposée par les collègues grenoblois du groupe : une cible et des palets qui prennent des valeurs différentes suivant la position qu'ils occupent dans la cible, de façon analogue aux chiffres qui prennent des valeurs différentes suivant la position qu'ils occupent dans l'écriture du nombre. Cette idée a été reprise par les collègues lyonnais qui l'ont développée jusqu'à obtenir une première version et l'ont expérimentée en classe de CP et de CE1 en

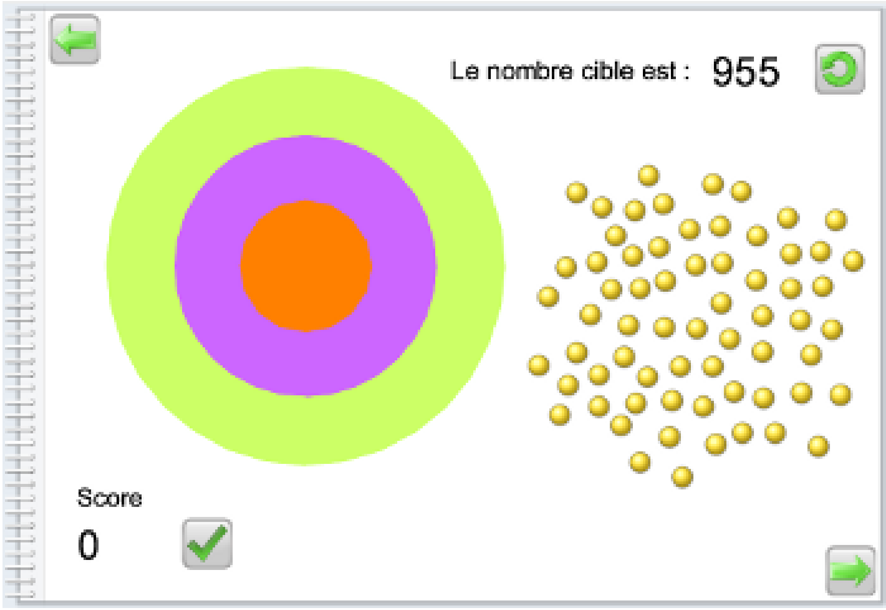


FIGURE 4.5 – Image écran de la page 3 du cahier d'activité « La cible des nombres » ouvert avec le logiciel Cabri Elem permettant de créer les cahiers.

mai 2012. Les collègues grenoblois ont prévu d'expérimenter ces cahiers à la rentrée 2012, avec l'objectif de travailler la question de l'appropriation de ressources et d'identifier ce qui devrait être modifiable par l'enseignant pour améliorer le processus d'appropriation.

Il y a actuellement, en juin 2012, deux cahiers « la cible des nombres », l'un pour le CP et l'autre pour le CE1, la différence étant uniquement sur la taille maximum du nombre cible proposé (99 pour les CP, 999 pour les CE1). Par ailleurs, la première campagne d'expérimentation en classe ayant permis d'envisager d'autres situations pertinentes d'utilisation du même « micro-monde » constitué d'une cible et de palets, d'autres cahiers sont en cours d'élaboration. Il s'agit donc d'une famille de cahiers, dont nous présentons l'un d'entre eux plus en détail.

Visite du cahier CE1 « la cible des nombres »

Le cahier CE1 est constitué de 10 pages : sept pages dans lesquelles l'élève agit (pages 2 à 8), une page de garde (page 1) et deux pages de commentaires à destination des enseignants (pages 9 et 10).

Sur la page 2 sont présentés les différents objets qui seront manipulés tout au long du cahier : la cible avec trois zones de couleur différentes, les palets déplaçables, le score obtenu lorsque des palets sont placés dans la cible et le bouton de remise à zéro (qui permet de replacer en une seule action les palets dans leur position initiale). Cette page ne propose pas de problème ou de consigne à l'élève. Il s'agit d'une page d'exploration, utilisable par l'enseignant pour présenter les différents objets.

En page 3 (cf. Figure 4.5) et 4, un premier problème est posé : il s'agit d'obtenir un score égal à un nombre cible proposé, le nombre cible étant tiré aléatoirement entre 0 et 999 (respectivement 99 pour le cahier CP). En page 3, le score est affiché en continu ce qui rend possibles plusieurs stratégies dont celle qui consiste à placer les palets dans la cible en ne contrôlant que l'affichage du score. Un bouton d'évaluation permet à l'élève de savoir s'il a réussit ou pas (autrement qu'en vérifiant par lui même l'égalité des nombres score et cible). L'affichage de l'évaluation consiste en une série de smiley souriants ou tristes suivant le résultat, le smiley de la dernière évaluation s'affichant à droite du précédent (il ne le remplace pas). En cas d'échec, l'élève peut continuer à placer les palets dans la cible et demander une nouvelle évaluation. En page 4, le score n'est pas affiché en continu, l'élève doit prendre en compte les palets dans les différentes zones de la cible pour déterminer le score. Cependant, une fois que l'évaluation est demandée, le score est affiché et l'élève peut l'utiliser pour terminer.

FIGURE 4.6 – A gauche, image écran de la page 5 du « Cahier cible des nombres ». Le nombre de palets à disposition de l'élève est réduit à 18 (3x9). A droite, image écran de la page 7, le nombre cible est toujours multiple de 10.

En page 5 (cf. Figure 4.6 gauche), le problème évolue : le nombre de palets est réduit à 18 pour rendre invalide la stratégie qui consiste à placer une quantité importante de palets dans la zone « unité » et obliger à prendre en compte les zones où un palet vaut soit 10 soit 100.

En page 6 et 7 (cf. Figure 4.6 droite), il s'agit d'une nouvelle évolution où le nombre cible est maintenant toujours multiple de 10, c'est à dire que son chiffre des unités est 0. En page 6 cela permet les mêmes stratégies que dans les pages précédentes, car la zone unité peut être, au choix, laissée vide ou bien remplie d'un nombre de palets multiple de 10. Cependant, en page 7, le problème apparaît car un palet est déjà dans la zone unité et ne peut pas être enlevé. La seule stratégie possible consiste à remplir la zone unité avec un multiple de 10 palets. Cette stratégie n'est pas immédiatement accessible aux élèves, d'où le problème.

La page 8 (cf. Figure 4) est une page de bilan de l'activité. Elle permet aux élèves de conserver une trace du travail réalisé en dehors de l'environnement informatique.

Expérimentation en CE1

La classe a été divisée en 3 groupes de 8 élèves, permettant à chaque élève de travailler seul devant un poste informatique durant deux séances d'une quarantaine de minutes. Les pages 1 (page de garde) et 2 ont été présentées en classe entière, grâce à l'utilisation d'un vidéo projecteur, pour mettre en place le vocabulaire et découvrir l'environnement. Tous les élèves sont facilement entrés dans le travail proposé, l'aspect ludique et attractif du cahier fonctionnant. A l'issue des séances, un bilan collectif a été organisé durant lequel les élèves ont explicité leurs procédures. L'enseignante et un observateur ont assisté au travail individuel des élèves. Les principaux constats à l'issue de cette expérimentation sont les suivants.

Une page de manipulation avec choix libre d'un nombre cible est nécessaire. La page 2 proposant les objets de l'environnement sans présence d'un nombre cible n'est pas très pertinente en CE1. En revanche, cette même page avec un nombre cible choisi librement pourrait permettre à l'enseignant de mieux gérer le travail en classe entière (introduction et bilan) ou de différencier les nombres suivant les élèves ou encore d'imprimer une page pour travailler sur papier et garder la trace du travail accompli, en complément de la page 8. Elle pourrait également être utilisée par les élèves pour se lancer des défis.

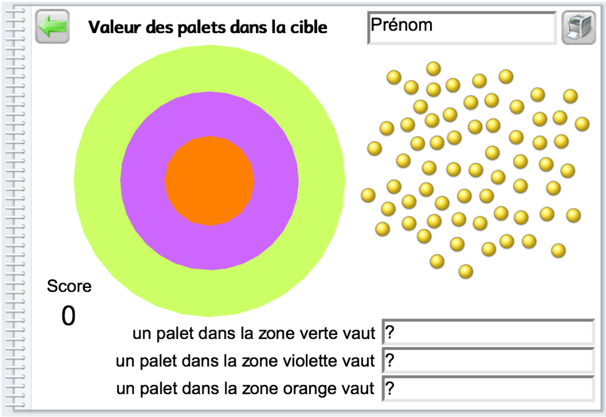


FIGURE 4.7 – Page finale du cahier (page 8) dans laquelle l'élève peut inscrire les valeurs prises par un palet dans chaque zone de la cible (réponses 1, 10 et 100), saisir son prénom et imprimer la page.

Les stratégies des élèves identifiées a priori ont été observées ainsi qu'une stratégie non prévue : l'utilisation du bouton recyclage pour obtenir un nouveau nombre cible considéré comme plus facile. C'est une sorte de différenciation effectuée par l'élève lui-même et qui peut être exploitée dans la conception des cahiers. En effet, il semble intéressant de conserver cette possibilité de changer de nombre cible, pour que l'élève adapte la tâche à ses compétences et finalement distingue explicitement les nombres cibles qu'il sait obtenir de ceux qui lui paraissent difficiles. Si de plus, la trace des nombres réussis ou échoués est conservée, cela offre un moyen pour l'élève de matérialiser ses réussites et d'identifier ce qui lui reste à apprendre. Mais il faut également pouvoir contrôler que l'élève rencontre tous les nombres, y compris ceux qu'il considère comme difficiles.

Enfin, la question de l'aide à apporter aux élèves qui restent en difficulté, en particulier à la page 7, n'est pas résolue. Ces élèves ne calculent pas le score à partir de la valeur des palets dans la cible pour essayer de modifier la disposition des palets. Une piste encore non explorée est de proposer une activité de lecture de la cible qui consiste à placer des palets dans la cible et à demander à l'élève de déterminer le score.

Ces observations conduisent à l'évolution des cahiers et à une plus grande distinction entre le cahier CP et le cahier CE1. Cette évolution se traduira par des modifications du fonctionnement de certaines pages, la conception de nouvelles pages, voire même de nouveaux cahiers (à partir du même « micro-monde » constitué d'une cible et de palets). Mais surtout, nous ajouterons des paramétrages à disposition de l'enseignant (par exemple la possibilité de tirer le nombre cible au hasard dans une liste de nombres choisis par l'enseignant) et des pages plus ouvertes, sans consigne, comme celle envisagée avec le nombre cible choisi et saisi par l'utilisateur.

Conclusion : des ressources modifiables pour les rendre appropriables par les enseignants

Pour travailler la question de l'appropriation des technologies par les enseignants et atteindre un usage en classe, nous étudions deux pistes complémentaires mais distinctes.

La première est celle de l'articulation des ressources entre elles et de l'accompagnement de leurs usages. Dans le projet Mallette, nous proposons des ressources qui associent utilisation des technologies et utilisation de matériel pédagogique concret tel que la machine mathématique « Pascaline ». De plus, ces ressources seront organisées en progression. Enfin, le projet prévoit l'accompagnement de l'utilisation des ressources par de multiples moyens dont la collaboration entre enseignants au sein de projets et la mise en place de formations.

L'autre hypothèse étudiée est celle de ressources modifiables et adaptables. Il faut des ressources suffisamment construites et robustes pour que l'enseignant sache immédiatement ce qu'il va pouvoir obtenir en classe en les utilisant et en même temps suffisamment flexibles pour qu'il puisse les modifier et les adapter à son contexte précis d'enseignement (contexte matériel, contexte pédagogique, etc...). Dans le projet MaDyP, le recours à l'environnement de conception Cabri Elem a été choisi car il permet de mettre à disposition des enseignants les outils pour modifier les ressources. Cependant, les travaux de l'année confirment que Cabri Elem est très difficilement utilisable par les enseignants pour produire des cahiers ayant le niveau de finition attendu pour un usage en classe. En revanche, cet environnement suscite l'intérêt et l'implication des enseignants dans tout le processus de conception, de mise en œuvre et d'évolution des cahiers. Ce processus permet d'identifier les différentes versions des cahiers qu'il serait utile et souhaitable de proposer à l'enseignant utilisateur. Ainsi, une première modalité d'adaptation et de modification consiste en un paramétrage du cahier, c'est-à-dire que l'enseignant opère une sélection parmi une liste de possibilités déterminées a priori par les auteurs. Cette piste sera testée l'année prochaine au sein du groupe maintenant que nous disposons de cahiers finalisés. Mais le paramétrage n'est qu'une modalité d'adaptation de la ressource parmi d'autres que nous continuons à explorer.

Références

Maschietto M. Bartoloni-Bussi M.G., (2012) Des scénarios portant sur l'utilisation d'artefacts dans l'enseignement et apprentissage des mathématiques à l'école primaire, in *actes du XXXIXème colloque COPIRELEM*, 20-22 juin 2012 Quimper France.

Maschietto M, Soury-Lavergne S, (2012) À la découverte de la "Pascaline" pour l'apprentissage de la numération décimale, in *actes du XXXIXème colloque COPIRELEM*, 20-22 juin 2012 Quimper France.

Soury-Lavergne S., Maschietto M. (2012) *Les stratégies du garagistes*, Les cahiers pédagogiques, juin 2012, n498, pp. 34-35.

4.3.2 Mallette de ressources pour le numérique à l'école

Laetitia Bueno-Ravel*, Ghislaine Gueudet*, Caroline Poisard*

* CREAD IUFM Bretagne UBO
Laetitia.Bueno-Ravel@bretagne.iufm.fr
Ghislaine.Gueudet @bretagne.iufm.fr
Caroline.Poisard@bretagne.iufm.fr

RÉSUMÉ. *Dans le cadre du projet « mallette mathématique pour le cycle 2 », notre travail consiste à élaborer, tester et diffuser des scénarios d'usages de logiciels pour le cycle 2 de l'école primaire. Ces logiciels, concernant tous les domaines numériques, correspondent à des usages variés : situation d'apprentissage ; travail au quotidien sur le nombre ; aide personnalisée.*

ABSTRACT. *Within the national project « mathematical suitcase for school », we work on the design, test and broadcasting of scenarios for the use of software, for grade 1 and grade 2 pupils. These software concerne the learning of numbers. They are associated with various uses : learning of a new concept ; ritual work on numbers ; individual support.*

MOTS-CLÉS. *Cycle 2, logiciels, ressources, usages*
KEYWORDS. *Grade 1, software, resources, uses*

Introduction

Les logiciels de mathématiques sont peu employés à l'école élémentaire, et notamment en cycle 2. Le manque d'équipement est parfois invoqué ; cependant, les recherches ont montré qu'un élément essentiel pour l'intégration de logiciels est l'articulation de ceux-ci avec d'autres ressources disponibles pour les professeurs, et leur compatibilité avec les connaissances professionnelles des professeurs, notamment sur les différents scénarios possibles pour l'enseignement de notions mathématiques (Poisard, Bueno-Ravel & Gueudet 2011).

Ainsi, notre travail s'inscrit clairement dans le thème 3 des journées mathématiques : conception de ressources et apprentissage des mathématiques à l'école élémentaire. Dans le cadre du projet « mallette mathématique pour le cycle 2 » (projet MEN-IFé-CREAD), notre groupe, MAlette de REssources pour le Numérique à l'Ecole (MARENE) a expérimenté différents logiciels ainsi que des scénarios correspondants. Des ressources pour la diffusion de ces scénarios sont en cours de réalisation, nous en donnerons des exemples lors des journées. Nous présentons ici brièvement trois logiciels retenus et les types d'usages associés.

Une situation d'apprentissage et un logiciel : le train des lapins

Le logiciel « le train des lapins » a été conçu au sein du groupe MARENE. Il s'adresse à des élèves de grande section (GS - 5 ans) comme situation d'apprentissage du « nombre mémoire de la position » ainsi qu'à des élèves de CP (6 ans) comme entraînement sur cette notion en début d'année scolaire. Il s'agit pour un élève de placer un lapin dans un train, dans le même wagon que le train modèle, le train modèle n'étant pas disponible pendant que l'élève travaille. Le train modèle « revient » à l'écran pour permettre la validation de la tâche par l'élève.

La validation de la tâche par les élèves permet à la plupart d'entre eux de travailler en semi-autonomie, permettant au professeur de se libérer pour être présent auprès des élèves en soutien. Le professeur doit cependant observer régulièrement le travail des élèves en s'appuyant sur le « tableau des scores » pour pouvoir ajuster le paramétrage du logiciel au niveau des élèves (nombre de lapins à placer, position des lapins dans le train, nombre de wagons). Ce logiciel a été testé en GS en atelier dirigé et atelier libre, avec des équipements informatiques variables (de un à trois postes par classe) ainsi qu'en CP en classe entière en salle informatique.

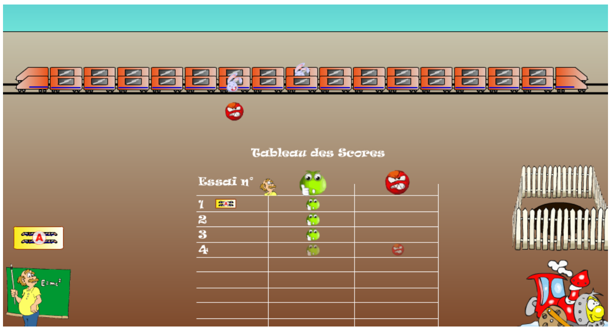


Figure 4.8 – Logiciel « Le train des lapins »

Dans les deux classes de GS observées, ce logiciel a été utilisé en articulation avec une version papier du « train des lapins » soit dans le cadre d'une évaluation diagnostique soit dans celui de la présentation de la situation aux élèves, soit dans celui d'une évaluation en fin de séquence.

Aide individualisée : la course aux nombres

Le logiciel « la course aux nombres » (Wilson et al. 2006) a été conçu pour la remédiation, auprès d'élèves de 4 à 8 ans. Il s'agit pour le joueur de reconnaître laquelle de deux collections a le plus grand nombre d'éléments, suffisamment rapidement pour devancer son adversaire. Les collections peuvent être présentées par un ensemble d'objets, ou par leur cardinal écrit en chiffres, ou encore comme une somme ou une soustraction. Le joueur doit ensuite déplacer des personnages sur une piste, en fonction de ce que chacun a gagné. Parfois un « piège » sur la piste fait qu'il vaut mieux éviter de choisir la collection la plus nombreuse.

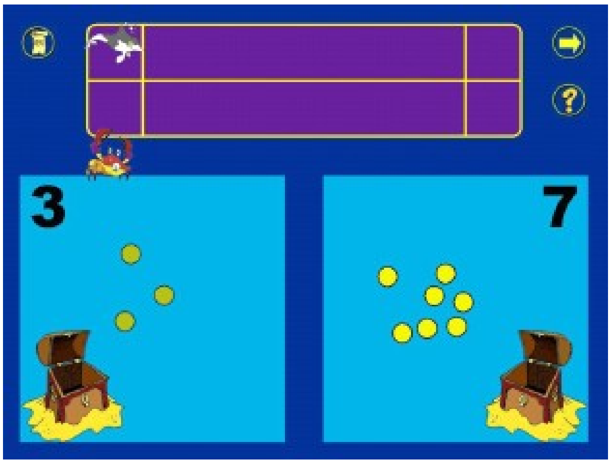


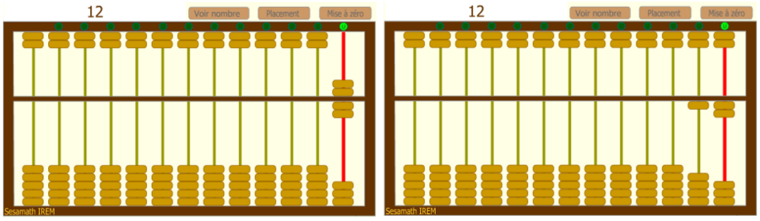
Figure 4.9 – Logiciel « la course aux nombres »

Chaque élève est inscrit sur le logiciel. Le niveau de difficulté s'adapte automatiquement, en fonction de la réussite au jeu. Nous avons testé ce logiciel en CP et CE1. Trop simple, pour des élèves en réussite, il s'est en revanche avéré très intéressant avec des élèves en difficulté. Motivés par le support ludique, ceux-ci ont travaillé les différentes représentations du nombre proposées. Ils ont progressivement développé des capacités d'anticipation, notamment en positionnant directement les personnages sur la piste, sans compter les cases une à une.

Le travail peut se faire seul ou en binôme ; il faut cependant que le professeur observe régulièrement les choix des élèves, pour comprendre où se situent d'éventuelles difficultés résistantes. Ainsi ce logiciel semble convenir plus particulièrement à un scénario de type aide individualisée.

Un travail au quotidien : le boulier chinois virtuel

Le groupe MARENE poursuit nos travaux déjà engagés sur l'apprentissage de la numération décimale à l'école avec le boulier chinois virtuel (Poisard, Bueno-Ravel & Gueudet 2011). Dans le groupe, le boulier virtuel Sésamath - IREM de Lille est utilisé par des professeurs de classes de la GS au CE2 (4 à 8 ans) pour un travail sur la numération, en particulier sur les échanges (Figure 4.10), ainsi que sur les opérations avec la notion de retenue pour les additions et les soustractions (à partir du CP).



12 inscrit sur le boulier comme 12 unités : deux quinaires et deux unaires. L'icône « voir nombre » est activée.

12 inscrit comme une dizaine et deux unités. L'icône « placement » a été utilisée.

FIGURE 4.10 – Les échanges sur le boulier chinois : l'exemple de 12

Concernant l'intégration de cette ressource, certains points importants restent stables et se confirment pour le niveau de Grande Section de maternelle. Tout d'abord, dans l'organisation retenue par les professeurs, c'est l'intégration du boulier dans un travail hebdomadaire voire quotidien qui semble la plus efficace pour l'apprentissage. Le boulier est un support pédagogique qui vient compléter ceux en usage dans la classe (calcul mental, calculatrice, etc.) et s'intègre dans la progression de classe, pour consolider certaines connaissances, s'entraîner dans les calculs et donner du sens à la numération et aux opérations. L'entraînement en groupe classe est en général hebdomadaire, mais l'accès libre au logiciel sur un ordinateur dans la classe peut en faire un outil quotidien. Ensuite, nous observons la nécessité de compléter les manipulations par des traces écrites pour avoir la mémoire du travail des élèves, soit par des fiches (CP au CE2), soit par un « Livre du boulier » (en GS). Nous notons l' importance de faire le lien entre les différentes représentations d'un même nombre : écriture chiffrée, inscriptions sur le boulier, décompositions additives des nombres, représentations des quantités par des objets, etc. Nous observons aussi l'importance d'un travail sur la lecture des nombres inscrits sur le boulier, en effet, le travail d'inscription des nombres doit se compléter par un travail sur la lecture des nombres (en général proposé par le professeur avec le TBI).

Nous assistons cette année à une modification des usages concernant l'articulation du boulier matériel et du boulier virtuel. En effet, les professeurs qui possèdent un TBI (tableau blanc interactif) ou un vidéo projecteur dans leur classe ne se déplacent plus en salle informatique pour les séances.

Ainsi, les élèves manipulent chacun un boulier matériel alors que le boulier virtuel (avec le TBI) est manipulé soit par un élève, soit par le professeur pour la correction collective. Ainsi, il est nécessaire de passer d'une représentation horizontale (boulier matériel) à une représentation verticale (boulier virtuel). Notons que le codage des nombres n'est pas tout à fait le même sur les deux bouliers : avec le boulier matériel le codage de six par exemple peut se faire d'un seul geste (une unaire et une quinaire dans les unités) alors que sur le boulier virtuel, il faut deux gestes.

Conclusion

La variété de logiciels disponibles, et d'usages possibles associés, permet d'avoir recours aux TICE en cycle 2, même avec un équipement restreint. Nous avons pu le constater dans notre groupe ; reste maintenant à aborder la question de la diffusion de ressources correspondant à nos scénarios. Quelles modalités ? Comment en favoriser l'appropriation ? Répondre à ces questions sera essentiel, dans la suite de notre travail.

Références

Poisard, C., Bueno-Ravel, L., & Gueudet, G. (2011). *Comprendre l'intégration de ressources technologiques en mathématiques par des professeurs des écoles.* Recherches en didactique des mathématiques. 31(2), 151-189

Wilson, A. J., Dehaene, S., Pinel, P., Revkin, S. K., Cohen, L., & Cohen, D. (2006). *Principles underlying the design of "the number race", an adaptive computer game for remediation of dyscalculia.* Behavioral and Brain Functions, 2(19).

4.4 Conception de ressources et apprentissages des mathématiques pour l'enseignement secondaire

Le contenu principal de ce thème portait sur la production de ressources autres que celles que consultent en premier lieu les enseignants, majoritairement constituées des manuels scolaires (cf. Margolinas, C. & Wozniak, F. (2010)). Plusieurs questions étaient adressées aux participants parmi lesquelles on retiendra essentiellement celles-ci : « En quoi vos productions se démarquent-elles de celles des manuels, notamment en matière d'enseignement et d'apprentissages potentiels ? A quelle échelle sont-elles utilisées et quels effets produisent-elles en termes d'apprentissage ? » L'atelier a donné lieu à quatre exposés de travaux venus d'équipes associées à l'IFE et expérimentés dans des classes, chacun d'eux débouchant sur un débat. On trouvera leur description dans les pages qui suivent, mais ces quelques lignes voudraient rendre compte de certains des points soulevés lors de débats loin d'être clos.

Ces quatre présentations promeuvent une démarcation par rapport à la forme traditionnelle prise par l'enseignement des mathématiques ; qu'elle porte sur la place des élèves dans la construction du savoir, les exercices proposés ou qu'elle concerne le savoir proprement dit (par exemple « l'oubli traditionnel » des grandeurs, le recours à des modèles discrets et non pas continus pour l'abord des fonctions, la mobilisation d'un seul registre, l'enseignement mono-disciplinaire, etc.) Toutes proposent un enseignement s'inscrivant dans une continuité de recherches menées par les élèves, à l'opposé d'un découpage en chapitres plus ou moins étanches les uns aux autres, se déclinant en activités fortement guidées. Cette situation est celle des manuels du commerce, à l'exception d'un seul non édité au-delà de la classe de 6e, faute sans doute d'avoir trouvé suffisamment d'acheteurs...

Cette dernière remarque a débouché sur la question des attentes des enseignants à propos des ressources mises à leur disposition. Un regret : promouvoir un enseignement épistémologiquement consistant, qui engage les élèves dans la recherche et s'inscrive dans un continuum, implique que les ressources produites explicitent et décrivent le rôle dévolu au professeur, et non pas celui de l'élève que l'on sait le plus souvent inférer. Or, prendre en compte cette nécessité dans la fréquentation de ressources est inhabituel chez les enseignants, de même que celle de devoir s'approprier une proposition engageant dans une lecture plus longue et plus ardue que les quelques pages d'activités d'un manuel. On se heurte en ce point à la question de la formation professionnelle enseignante, au poids des habitus corporatifs, à la vision culturelle de ce que l'on entend par « faire cours », aux contraintes institutionnelles dont certaines pourraient être levées, comme le montrent les propositions de l'atelier. Autre point : si tous les participants indiquent un changement positif du rapport des élèves aux mathématiques et à leur étude - certains soulignant que l'on parvient à les motiver de nouveau pour les mathématiques -, il n'a pas été possible d'évaluer la diffusion de ces ressources, et a fortiori leur impact, au-delà des groupes de leurs promoteurs. Que deviennent les brochures éditées par les groupes et diffusées dans le réseau des IREM, quel retour sur les parcours P@irformance ? 15 % seulement des exercices de Sésamath paraissent utilisés, et de manière inégale. Les ressources produites semblent majoritairement sous-utilisées.

A l'issue du débat de l'atelier, nombre de questions initialement posées aux participants sont restées ouvertes ou n'ont pu être traitées. Parmi celles-ci : Comment évaluer les changements dans les apprentissages, au-delà d'impressions forcément subjectives ? Comment promouvoir la formation des enseignants à l'appropriation des ressources ? De quoi alimenter le débat lors de la session 2013 de ces journées.

4.4.1 Enseigner les mathématiques en section européenne ; une rencontre avec d'autres cultures d'apprentissage

Jérôme Brunel*, Guy Chevallier*, Maryse Duprey*, Ghislaine Gueudet, Véronique Guillemot*, Yannick Le Gruiec*, Agnès Le Métayer*, Élisabeth Simpson***

* IREM de Rennes
Campus de Beaulieu
35042 RENNES CEDEX
Marie-Pierre.Lebaud@univ-rennes1.fr

** IUFM Bretagne
153 rue de Saint-Malo
RENNES
ghislaine.gueudet@bretagne.iufm.fr

RÉSUMÉ. *Enseigner les mathématiques en section européenne demande de nouvelles compétences professionnelles. Il s'agit de mettre les élèves en situation de prise de parole dans une langue étrangère et de les confronter à une autre culture sur des notions mathématiques déjà travaillées. Des dispositifs pédagogiques doivent donc être repensés dans ce sens.*

ABSTRACT. *Teaching mathematics in a european class requires new professional habilities. Teachers need both having a dialogic learning and interesting pupils about mathematical knowledge they already study in french courses. New pedagogical situations have to be built.*

MOTS-CLÉS. *mathématiques en anglais, formation des enseignants, production de ressources*

KEYWORDS. *teaching in a foreign language , teacher education, resources design*

Introduction

Les sections européennes proposent l'enseignement d'une discipline non linguistique (DNL) en langue étrangère. Créées en 1992, elles connaissent un fort développement depuis la loi d'orientation de 2005, qui a introduit le cadre européen commun de référence pour les langues, puisqu'elles permettent la pratique d'une langue étrangère en situation. Notre contribution porte plus spécifiquement sur l'enseignement des mathématiques au lycée comme DNL en anglais. Celui-ci demande le développement de nouvelles compétences dans la pratique professionnelle d'un enseignant, outre la maîtrise d'une autre langue : il suppose en effet de rendre les élèves actifs à l'oral, au moins davantage que dans le cadre d'un enseignement classique...Il ne s'agit pas de faire un cours tel qu'il se ferait en Angleterre ou de traduire en anglais un cours classique de mathématiques (Degraeve & Dubuisson) mais de créer de nouvelles formes d'apprentissage.

Nous nous plaçons dans le thème 4 des Journées Mathématiques 2012 de l'IFÉ : l'enseignement des mathématiques en DNL se démarque d'un enseignement traditionnel et suppose à la fois la production de nouvelles ressources et de nouveaux dispositifs pédagogiques. On peut s'interroger sur les formes de transposition possibles de ces dispositifs au cours traditionnel.

Les spécificités de l'enseignement des mathématiques en DNL

Un enseignement hors temps d'apprentissage usuel

Le cours de mathématiques en français est souvent contraint par le programme et la nécessité de le traiter dans le temps imparti. En général, les heures en DNL s'ajoutent aux heures de mathématiques usuelles, pour le même programme. Cela laisse une grande liberté pédagogique à l'enseignant dans le choix des thèmes abordés (Bouty, 2011). Cependant, dans certains lycées, les élèves d'un même cours de DNL peuvent être issus de différentes sections et il s'agit alors de proposer des activités qui satisfassent tout le monde.

Un enseignement... en langue étrangère

S'il n'y a pas de nouvelles notions mathématiques à enseigner, il y a par contre beaucoup de vocabulaire. Outre celui proprement mathématique (fonction, dérivation, ...), l'enseignant doit faire travailler tout le vocabulaire du raisonnement (si alors, d'où, donc, ...). Dans ce cas, il s'agit pour l'élève d'avoir une nouvelle opportunité de distinguer les différents emplois du langage naturel dans le cours de mathématiques. Cet enseignement en langue étrangère change de plus le rapport entre enseignant et élèves. Le professeur peut en effet être mis en difficulté dans l'emploi de la langue, certains élèves étant bilingues.

Un enseignement tourné vers la pratique de l'oral

La plus importante spécificité de l'enseignement des mathématiques en DNL reste la nécessité de faire parler les élèves. Or mettre une classe en situation de prise de parole n'est pas habituel en mathématiques, comme cela peut l'être en cours d'anglais. Une collaboration entre enseignants des deux disciplines semble nécessaire pour échanger sur les pratiques, mais le vocabulaire mathématique n'est pas toujours connu des enseignants de langue.

Des exemples

Des ressources

Un des objectifs du groupe, dans le cadre du projet Parcours de l'IFÉ, est d'élaborer et de tester des ressources pour la formation. Nous avons davantage privilégié le travail sur des dispositifs pédagogiques, de nombreuses ressources brutes en anglais étant disponibles sur le web. Toutefois, au cours de notre travail, un type de ressources, d'habitude peu employées en cours de mathématiques, est souvent revenu : des séquences vidéos, soit comme support d'introduction de nouveau vocabulaire en contexte, soit directement pour avoir une autre vision d'une notion mathématique déjà travaillée en cours classique. On pourra trouver de tels exemples concernant la dérivation sur http ://www.calculus-help.com/tutorials/. Citons également le site Émilangues1 spécifiquement dédié aux sections européennes qui comporte quelques activités.

Des dispositifs pédagogiques

Le groupe s'attache à créer des scénarios pédagogiques adaptables à plusieurs thèmes mathématiques : Time's Up ! en est un exemple. Il s'agit d'un jeu de cartes classique, souvent connu des élèves, que le groupe a adapté aux mathématiques. Son intérêt est double : d'abord il permet une mise en parole de l'élève dans les deux premières manches ; ensuite, la demande de mimer le mot, pour le faire deviner dans la 3e manche, permet à l'enseignant de vérifier la compréhension de concepts mathématiques. Mimer le mot « function » en traçant un trait de son doigt, comme l'ont fait certains élèves, traduit une assimilation abusive d'une fonction à une droite qu'il convient de corriger...D'un point de vue des apprentissages, ce jeu oblige à travailler les définitions mathématiques, en plus du vocabulaire.

Dans une autre situation, « Race to the board2 », les élèves travaillent par équipe de deux à résoudre des exercices issus d'une liste fournie par l'enseignant. Dès qu'un exercice est résolu, un des membres de l'équipe doit aller rédiger leur solution au tableau. Si celle-ci est validée par l'enseignant, l'exercice leur est attribué. Le jeu s'arrête quand tous les exercices ont été résolus. Dans ce cas, c'est davantage l'écrit qui est travaillé avec une forte émulation due au principe de compétition.

Des questions en suspens

La recherche demande à être approfondie mais les dispositifs étudiés lors des séances observées semblent être transposables en classe de mathématiques ordinaires. Les enseignants du groupe ne le font pas, bien que satisfaits des activités proposées en ce qui concerne l'effet sur les apprentissages de leurs élèves. La raison essentielle invoquée est le manque de temps, la nécessité de « finir le programme ». On peut s'interroger en voyant en particulier l'activité mathématique déployée par les élèves lors des séances en DNL sur cette absence de transposition directe. Les enseignants impliqués dans ces sections européennes reconnaissent cependant un changement dans leurs pratiques : la confrontation à une culture différente modifie leur conception de l'enseignement des maths.

Dans le cours en français, les enseignants impliqués sont plus sensibles aux aspects de langage, naturel comme formel : ils vont par exemple demander aux élèves d'écrire une expression factorisée et une développée. Ceci met en évidence certaines difficultés des élèves : ils n'écrivent que des expressions avec des nombres ou échangent le sens des deux termes. Ces types de difficultés sont ainsi plus faciles à identifier qu'avec des exercices du type « factoriser l'expression suivante ».

Le cours de maths en DNL n'introduit pas de nouvelles notions mathématiques. Pour motiver les élèves, l'enseignant doit donc proposer des présentations différentes, parfois issues d'une autre culture. L'intérêt d'avoir plusieurs approches pour une notion est aussi retenu. Par exemple, pour introduire la notion de dérivée, une des enseignantes du groupe propose maintenant, dans le cours classique, un travail en groupe. Chaque groupe travaille sur une activité différente : une avec une approche économique avec la notion de coût marginal, d'autres avec des approches plus géométriques avec la notion de tangente, d'autres plus analytiques...Puis les groupes confrontent leurs résultats. Ces différentes approches permettent aux élèves de mieux s'approprier la notion.

La comparaison des programmes français et ceux d'un autre pays, ainsi que les différences entre les pratiques en France et celles observées lors d'échanges avec d'autres classes semblent avoir un effet sur les pratiques professionnelles. Ce point reste à étudier plus précisément.

Références

Bouty, R. (2011). *Deux séances de mathématiques en langue étrangère.* Repères IREM, 85, p. 93-101.

Degraeve, L., Dubuisson, E. (2007). *Enseigner les mathématiques en Section Européenne. Exemples de pratiques.* 35 p. Disponible sur Internet <http ://www.math.unicaen.fr/irem/IMG/pdf/docdegraeve.pdf> (consulté le 25 mars 2012)

4.4.2 Introduction des fonctions affines en troisième. La bande qui se déroule.

Groupe didactique des mathématiques de l'IREM d'Aquitaine

* IFE
19, Allée de Fontenay
69007 Lyon

** Irem d'Aquitaine
40 rue Lamartine
33400 Talence

RÉSUMÉ. *Introduction des fonctions affines en troisième : comparaison entre des activités proposées par des manuels et la production de l'équipe AMPERES de l'IREM d'Aquitaine, « La bande qui se déroule ». Quelle différence entre une « activité » de manuel et une « situation d'enseignement » dans le cadre de la recherche AMPERES ? Comment organiser la dévolution de la responsabilité de l'étude aux élèves dans le cadre de la classe « ordinaire » ?*

ABSTRACT. *Introduction of affine function in tenth grade : comparison of activities of textbooks and activities made by the AMPERES' s team of IREM d'Aquitaine : 'the uncoiling strip'. What are the differences between a textbook's activity and a 'teaching situation' in the AMPERES' meaning ? How is it possible to organise the 'devolution' of the study's responsability to students in an ordinary classroom.*

MOTS-CLÉS. *collège, troisième, fonctions affines*

KEYWORDS. *low secondary school, affine functions, tenth grade*

Introduction

Dans cet atelier, nous proposons d'examiner les différences entre notre situation « La bande qui se déroule » et des activités prises dans des manuels pour l'introduction des fonctions affines en troisième. Il s'agit d'étudier spécifiquement les fonctions affines après un chapitre complet sur les généralités concernant les fonctions.

Présentation générale

Notre groupe de l'IREM d'Aquitaine a produit une brochure consacrée à l'enseignement des fonctions au collège et en seconde. Notre but est de conduire les élèves à donner du sens à la notion de fonction à travers la résolution de problèmes.

Dans nos productions, l'enseignant trouvera des ressources différentes de ce que proposent les manuels scolaires qui se limitent souvent à des « activités » introductives ou à des problèmes et exercices d'application.

Dans les « activités » des manuels les fonctions sont présentées de façon souvent artificielle. L'objet existe a priori et son utilité pour répondre à certaines questions n'est pas mise en évidence. Beaucoup de manuels de troisième se contentent de faire le tour de différents registres à travers lesquels s'exprime la notion de fonction. Ces registres sont proposés aux élèves sans qu'une véritable question problématique y soit associée. Les élèves sont guidés afin de les faire fonctionner sous forme de petites questions successives. Par exemple, la variable est souvent imposée en disant : « On appellera $x\dots$ » et les graphiques rarement interprétés en terme de variation.

Ces exercices, intéressants pour travailler les techniques, ne nous semblent pas adaptés pour faire comprendre aux élèves la nature mathématique d'une fonction. Son intérêt en tant qu'outil pour résoudre des problèmes n'apparaît pas.

Par exemple des manuels introduisent la fonction en la présentant comme une machine, dans laquelle on rentre un nombre de départ et qui produit après transformation, un autre nombre. Cette analogie est intéressante pour mettre en évidence l'aspect procédural de la fonction. Mais, d'après nous, cela n'a de sens qu'après une activité mathématique effective des élèves, au cours de laquelle ils découvrent la nécessité de faire appel à une procédure de calcul pour définir une fonction, par exemple en calculant plusieurs images avec leur calculatrice afin de répondre à une question dans un problème .

Dans les séquences que nous proposons, les fonctions apparaissent successivement comme un outil pour étudier une relation de dépendance entre deux grandeurs puis comme un objet d'étude (par exemple : caractérisation des fonctions affines). Il s'agit de situations simples, d'ordre mathématique (on s'intéresse à des longueurs et à des aires qui varient, par exemple) mais relativement concrètes cependant souvent par l'introduction d'un support matériel manipulable. Les élèves ont le choix de la variable et des registres. Le vocabulaire et les notations sont mis en place progressivement, en lien avec le problème posé.

Les séquences proposées sont conçues pour être traitées en classe, ce qui permet d'en retirer toute la richesse du fait des échanges.

Construction d'une situation d'enseignement

Pour réussir l'appropriation du problème par les élèves et le démarrage d'une réelle activité mathématique, la transmission du simple énoncé du problème ne suffit pas. Mais la solution ne consiste pas à baliser le chemin avec des questions intermédiaires. Nous avons appris de la didactique des mathématiques comment construire à partir d'un problème bien choisi une situation d'enseignement en introduisant une organisation spécifique qui permette de faire entrer les élèves dans le problème puis de favoriser l'échange et l'argumentation au sein de la classe.

La situation choisie doit être suffisamment complexe pour être réellement problématique. Le problème doit être assez concret mais pas trop artificiel : nous privilégions parfois une situation interne aux mathématiques (problèmes d'aires, de périmètres...) à une situation « issue de la vie courante » qui pourrait apparaître finalement très anecdotique. Nous évitons les « habillages » qui font croire à une pseudo-réalité et qui n'introduisent qu'une motivation superficielle des élèves, voire une distance plutôt qu'une familiarité selon l'expérience de chacun. Nous pensons que de nombreuses situations issues de la réalité comportent des difficultés de modélisation mathématique qui pourraient occulter l'intérêt des fonctions pour résoudre le problème, ou rendre leur mise en œuvre très compliquée. C'est pourquoi nous préférons partir de situations dont le contexte est relativement dépouillé et la modélisation simple. Lorsque c'est possible, nous utilisons un support matériel (ficelle, morceaux de papier, dots). La plupart des activités proposées peuvent faire l'objet de TICE (géométrie dynamique, tracés de courbes, utilisation du tableur, utilisation de la calculatrice...).

Lors d'une séquence l'élève va pouvoir progresser vers des réponses aux questions qu'il s'est lui-même posées à partir de la situation proposée par le professeur. Il part de ses connaissances antérieures et utilise les apports sur les fonctions que le professeur amène lorsque c'est nécessaire pour avancer dans la résolution du problème. L'usage des mathématiques s'impose de lui-même aux élèves.

Pour cela, le professeur doit faire confiance aux élèves dans leur capacité à s'investir et accepter de ne pas maîtriser entièrement leurs réponses et leurs stratégies. C'est la condition pour leur laisser la possibilité de se poser eux-mêmes les bonnes questions. L'enseignant est là pour les entendre et leur donner les outils pour y répondre de manière collective.

Conclusion

Cette façon de gérer la classe n'est pas évidente pour l'enseignant quand il n'a qu'un énoncé. C'est pourquoi nous montrons comment nous tenons compte des questions, des conjectures et des productions des élèves pour amener la classe à résoudre le problème. Nous fournissons et commentons des exemples de travaux réels d'élèves. Ainsi, nous donnons aux professeurs une idée de leurs difficultés et de leurs initiatives, pour lui permettre d'anticiper le déroulement de la séance.

4.4.3 Démarches d'investigation en mathématiques au collège

Sonia Grodowski*, Ghislaine Gueudet, Carole Le Beller*, Marie-Pierre Lebaud*, Christophe Pépino*, Yann Rouault***

* IREM Rennes
Campus de Beaulieu
RENNES
Marie-Pierre.Lebaud@univ-rennes1.fr

** IUFM Bretagne
153 rue Saint-Malo
RENNES
ghislaine.gueudet@bretagne.iufm.fr

RÉSUMÉ. *Notre groupe travaille sur les démarches d'investigation, dans l'enseignement des mathématiques au collège. Nous élaborons et testons des situations, correspondant à divers aspects de ces démarches : emploi ou non de manipulations ; en référence ou non à des objets centraux du programme etc. Notre objectif est de concevoir des ressources qui puissent contribuer à la mise en œuvre de DI par les professeurs.*

ABSTRACT. *The work of our group concerns inquiry-based mathematics teaching, for lower secondary grade. We design and test situations, corresponding to different aspects of inquiry : using material or not; concerning central themes of the curriculum or not etc. Our aim is the design of resources that can support the development of inquiry in class.*

MOTS-CLÉS. *démarches d'investigation, formation des enseignants, production de ressources*
KEYWORDS. *inquiry-based teaching, teacher education, resources design*

Introduction

L'emploi de démarches d'investigation (DI), dans l'enseignement des mathématiques, a donné lieu à de nombreux travaux de recherche (Loisy et al. 2010). Cependant, pour les professeurs de collège, la mise en œuvre de DI reste délicate. Quand peut-on considérer que les élèves pratiquent réellement l'investigation, en mathématiques ? Quelles ressources peuvent être utilisées pour préparer un enseignement selon des DI ? Quelles ressources peut-on concevoir et diffuser pour soutenir la mise en place de DI ? Ce sont les questions que notre groupe étudie. Ici nous exposons d'abord des points retenus comme importants, pour délimiter ce qui relève de la démarche d'investigation. Nous évoquons ensuite un support de formation continue spécifique : le parcours Pairform@nce « DI avec des logiciels », dont l'évolution fait partie de notre travail. Nous présentons finalement des situations que nous expérimentons cette année, en vue en particulier d'élaborer un autre parcours, adressant plus largement les DI.

L'investigation en mathématiques au collège ?

Quand peut-on considérer que les élèves pratiquent l'investigation, en classe de mathématiques au collège ? Différents critères doivent être pris en compte, comme l'ont montré les recherches sur cette question (Matheron 2010). Un élément important est ce qui concerne le rapport au « réel ». Qu'est-ce que le réel, dans la classe de mathématiques ? Une situation familière aux élèves ? La possibilité de manipulations ? Dans certains cas, les élèves ne peuvent pas mener d'expérimentations ; mais on considérera tout de même qu'ils pratiquent l'investigation, s'ils sont impliqués dans la recherche d'une solution. Le « réel » qu'il conviendrait de prendre en compte serait alors plutôt « à quel point la question posée est-elle pour les élèves une réelle question » ? Dans cette perspective, la manipulation peut, bien entendu, jouer un rôle.

Autre élément central, le lien entre DI et preuve, en mathématiques. Peut-on pratiquer une DI qui ne débouche pas sur une démonstration ? Cette question est spécialement sensible au collège.

Dernier point enfin : le lien entre DI et programmes scolaires. Désormais la « démarche scientifique » fait partie des compétences évaluées. Cependant, pratiquer une DI ne peut se réduire à un travail sur ces compétences ; peut-on aborder tous les contenus du programme sous forme de DI ? Nous essayons, dans notre travail, de produire des ressources associées à certains de ces contenus.

« DI avec des logiciels » : un parcours en évolution

Le parcours « DI en mathématiques avec des logiciels au collège » a été conçu en 2010. Il s'agit d'un parcours de formation Pairform@nce (Soury-Lavergne et al. 2010), c'est-à-dire d'un support en ligne pour organiser des formations continues basées sur la conception collaborative de séquences de classe. En effet, les recherches ont montré que, pour le développement de pratiques de type DI, ce mode de formation était particulièrement adapté (Lebaud & Gueudet 2012). Le parcours proposé a été expertisé en 2011. Cette expertise, et le test de ressources du parcours par les membres du groupe, ont donné lieu à des modifications et la soumission d'une deuxième version du parcours en avril 2012. Nous avons en particulier ajouté des ressources : réflexions sur le travail de groupe, sur l'évaluation.

Le test de situations proposées dans le parcours a conduit à réfléchir à nouveau la formulation des énoncés choisis pour éviter des réponses trop évasives. Il a été aussi jugé souhaitable de laisser à la charge de l'élève les tracés de figures pour une meilleure dévolution du problème. Les tests dans les classes de début de collège ont, à nouveau, mis en évidence la nécessité d'une bonne aisance dans la manipulation du logiciel pour que celui-ci soit une réelle aide à la réflexion.

Ce parcours Pairform@nce est centré sur l'emploi de logiciels pour les DI. Dans notre travail, nous considérons plus largement les DI, sans nous centrer sur les apports de logiciels.

Exemples de situations

Autour du théorème de Pythagore

Pour ce thème, les DI ont été testées avec deux objectifs différents : découvrir la relation entre les longueurs des côtés d'un triangle rectangle, et réinvestir la connaissance de cette relation.

Dans le premier cas, les élèves ont à disposition un matériel figurant un triangle rectangle et les trois carrés construits sur ses côtés : le carré qui s'appuie sur l'hypoténuse est rempli d'un liquide coloré. En faisant pivoter ce matériel, le liquide va aller remplir les deux autres carrés. Ce matériel leur est présenté sans commentaire de l'enseignant : « qu'observe-t-on ? ». Les élèves doivent donc remarquer l'égalité d'aires pour trouver la relation de Pythagore.

Dans le second cas, il est demandé aux élèves de construire un « arbre de Pythagore » à partir d'une branche de taille donnée. Le problème posé est d'anticiper la taille du grand arbre (le nombre de « branches » est imposé) pour déterminer si on pourra l'afficher sur le mur de la classe. Diverses stratégies sont mises en place par les élèves, aussi bien pour la construction que pour le calcul de la taille.

Autour du soleil et des planètes

La question posée « peut-on représenter les planètes et le soleil sur une feuille de papier format A3 ? » est très ouverte : faut-il faire une représentation à l'échelle ? Que faut-il représenter : les distances entre les planètes ? Leurs diamètres respectifs ? Après une période de réflexion et de recherche d'information sur Internet, l'enseignant précisera sa demande pour que chaque groupe d'élèves travaille sur le même sujet. Cette activité permet de travailler les notions d'agrandissement/réduction, de puissances, des grands nombres...

Autour des alignements du XXIème siècle

« Les alignements du XXIe siècle » est une sculpture conçue par Aurélie Nemours, et réalisée à Rennes en 2005. Il s'agit de 72 colonnes de granit, disposées selon une grille régulière 8x9. Le point de départ de cette situation est une simple question posée aux élèves (de troisième) : « que sont les alignements du XXIe siècle » ? Ils doivent préparer une réponse pour la séance suivante. Lors de cette séance, une mise en commun des réponses est faite, puis le professeur demande aux élèves : « quelles questions vous posez-vous, à propos de ces alignements » ? On trie alors les questions selon le critère : « à quelles questions les mathématiques permettent-elle de répondre » ? Par exemple : « Pourquoi 72 colonnes et pas 3 ? Les ombres à midi se rejoignent-elles d'une colonne à l'autre ? Pourquoi ces intervalles entre les colonnes ? » sont retenues comme questions mathématiques. Ces questions sont ensuite étudiées par groupe en classe, avec à disposition des ordinateurs. Les notions travaillées à cette occasion comprennent : la trigonométrie, les fonctions, agrandissement-réduction, solides de l'espace etc.

Conclusion

En plus des aspects des DI déjà envisagés ci-dessus, différentes caractéristiques qui nous semblent importantes ressortent de notre travail. Les activités de type DI demandent au professeur beaucoup de préparation, avant la mise en œuvre et au fur et à mesure du déroulement de l'activité. De plus une part significative de ce travail ne peut être anticipée, car ces activités très ouvertes amènent une grande variété de réponses d'élèves. Or il est essentiel que le professeur s'appuie sur ces réponses, pour gérer l'avancement du travail. Nous avons pu observer, par ailleurs, que les élèves se souviennent à long terme des activités pratiquées avec une DI (ils semblent se rappeler d'abord de la situation, puis des contenus travaillés).

Références

Lebaud, M.-P. & Gueudet, G. (2012). *Démarches d'investigation et collectifs dans la formation des enseignants.* Colloque EMF 2012, Genève.

Loisy, C., Trgalova, J. & Monod-Ansaldi, R. (2010). Ressources et travail collectif dans la mise en place des démarches d'investigation dans l'enseignement des sciences (pp.30-37). *Actes des journées scientifiques DIES 2010.* Lyon : INRP

Matheron, Y (2010). *« Démarches d'investigation » et Parcours d'Étude et de Recherche en mathématiques : entre injonctions institutionnelles et étude raisonnée des conditions et contraintes de viabilité au sein du système.* Conférence invitée au colloque de la CORFEM, Juin 2010, Caen

Soury-Lavergne, S., Gueudet, G., Loisy, C. & Trouche, L. (2010). *De la conception de parcours de formation à leur appropriation par des formateurs*, Rapport du projet INRP-Pairform@nce INRP, 152p.

Table des figures