Langage et pensée dans l'apprentissage des mathématiques

Gérard Vergnaud

Les mathématiques ne sont pas un langage, mais une connaissance. Il est clair cependant que le langage naturel et le symbolisme jouent un rôle essentiel dans l'activité mathématique et dans l'apprentissage des mathématiques. Pour comprendre ce rôle il faut analyser le rapport du langage aux schèmes qui organisent l'action du sujet en situation. Des exemples comme le dénombrement, le traitement d'équations algébriques, et la résolution de problèmes élémentaires d'arithmétique illustrent le fait que les signifiants langagiers sont partie constitutive de certains schèmes mathématiques. Les schèmes comportent beaucoup d'invariants opératoires implicites : concepts-en-acte et théorèmes-en-acte. Il est intéressant cependant d'analyser comment l'activité langagière qui accompagne la pensée contribue à la planification et au contrôle de l'action et à la conceptualisation hic et nunc d'une situation, c'est-à-dire à l'extraction des invariants pertinents. Il est intéressant également d'analyser la transformation des formulations au cours de l'apprentissage des mathématiques, notamment la transformation des formes prédicatives en objets de pensée, qui deviennent ainsi arguments de fonctions propositionnelles. Plusieurs exemples sont présentés.

Cet exposé ne présente pas de recherches originales mais seulement une réflexion sur le langage, les activités langagières et la pensée, vue du point de vue d'un psychologue qui connaît bien les problèmes posés par l'apprentissage des mathématiques, mais dont les compétences en matière de linguistique restent assez limitées. M'adressant à des didacticiens du français, j'ai choisi d'aborder quelques problèmes de représentation et de communication langagière rencontrés par les enfants dans l'apprentissage des mathématiques, ainsi que des problèmes posés par l'activité langagière associée à la résolution de problème. Empruntant à la linguistique une partie de ma terminologie, mon propos risque d'être l'occasion de quelques malentendus, car j'utilise certains termes (référence, signifiant, signifié, résolution de problème, invariant...) dans un sens qui ne correspond pas toujours au sens le plus largement admis par les linguistes.

Les mathématiques sont une connaissance et non pas un langage : même si les mathématiques constituées peuvent être représentées par des textes, des énoncés et des mots, et par des représentations symboliques algébriques, graphiques ou autres, ce sont les concepts et les théorèmes qui constituent le contenu des mathématiques, non pas les formes langagières et symboliques qu'ils prennent.

L'énonciation joue certes un rôle essentiel dans la conceptualisation, et la connaissance explicite a *un autre statut que la connaissance implicite :* la géométrie est autre chose que la représentation spontanée de l'espace. Mais la conceptualisation trouve ses sources et ses critères dans la représentation du réel, pas dans les mots. De ce fait je suis amené à m'intéresser davantage à la pensée qu'au langage, et lorsque je cherche à déterminer la structure du signifié, je me tourne davantage vers la structure du réel représenté pour comprendre la représentation que peuvent en avoir les élèves, que vers la structure du signifiant langagier ou symbolique. Pourtant il est indispensable de s'intéresser aussi aux rapports qu'entretiennent signifiants et signifiés. J'essaierai donc de clarifier ce point par mes exemples.

La communication est une fonction première du langage, mais elle est indissociable de sa fonction de représentation. Bien qu'il existe des recherches très intéressantes sur la communication et la mise en scène de la communication en didactique des mathématiques (Balacheff, Laborde), je m'intéresserai plutôt à la résolution de problème et à la représentation. Et j'aborderai la question typiquement vygotskienne de l'accompagnement de l'action et de la pensée par le langage, tant il est vrai que cette fonction du langage est trop peu étudiée, en dépit des travaux sur la pensée à voix haute.

CONCEPTS, SCHÈMES ET SITUATIONS

L'histoire nous apprend que c'est en réponse à *des problèmes pratiques ou théoriques* que sont nées et se sont développées les connaissances mathématiques. Il est intéressant, et en même temps difficile, de transposer dans l'enseignement cette idée que la connaissance est fonctionnelle : *la théorie des situations didactiques* (Brousseau), qui est une théorie de la mise en scène du savoir, est une approche de cette question. Mais les notions de problème et de situation comme occasions de l'apprentissage et du développement des *connaissances sont évidemment des notions relatives* : ce qui est problématique pour un enfant de 5 ans ne l'est plus pour le même enfant 2 années plus tard. Cela est vrai aussi dans l'expérience *professionnelle des adultes, y compris dans la* recherche scientifique.

La meilleure manière d'aborder les choses paraît être de considérer l'évolution des conduites d'un sujet devant une classe de situations : depuis les premières formes de conduite qu'il adopte jusqu'aux formes largement automatisées qu'elles prennent lorsque les savoirs et savoir-faire nécessaires sont acquis. Appelons **schème** l'organisation invariante de la conduite pour une classe de situations donnée. Ce concept est emprunté à Piaget, qui l'avait emprunté à Kant, et qui voyait dans le schème une totalité dynamique fonctionnelle. Prenons quelques exemples.

— Le schème du dénombrement chez un enfant de 5 ou 6 ans : ce schème comporte une organisation du parcours spatial de la main, du doigt et des yeux, en liaison avec les objets à dénombrer d'une part, avec l'émission à voix haute de la suite des nombres d'autre part, de manière à établir une correspondance biunivoque : principe d'exhaustivité (on les compte tous sans en oublier aucun) et principe d'exclusivité (on ne compte pas deux fois le même). Une autre caractéristique du schème concerne la marque énonciative de la cardinalisation : le dernier mot-nombre prononcé représente le cardinal de tout l'ensemble et non pas le dernier élément. Cette marque énonciative consiste soit dans la répétition (1, 2, 3, 4, 5... 5), soit dans l'accentuation (1, 2, 3, 4... **5**).

On voit clairement avec ce premier exemple que l'activité langagière est étroitement associée au fonctionnement du schème, et qu'elle prend sa *fonction dans un ensemble de gestes perceptivo*-moteurs dont l'organisation dépend de la disposition des objets et de leur nature, et d'un problème à résoudre : associer un nombre invariant à une collection donnée.

— Le schème de résolution des équations $ax + b = c$ chez un élève de cinquième ou de *quatrième. Sous certaines conditions* (par *exemple* a, b et c entiers et positifs, $c > b$), on observe une organisation invariante des procédures de traitement utilisées par les élèves : les élèves soustraient c des deux côtés, puis divisent les deux côtés par a :

$4x + 7 = 39$	$12t + 312 = 732$
$4x + 7 - 7 = 39 - 7$	$12t + 312 - 312 = 732 - 312$
$4x = 32$	$12t = 420$
$4x/4 = 32/4$	$12t/12 = 420/12$
$x = 8$	$t = 35$

Ce schème repose à la fois sur des connaissances *conceptuelles* plus ou moins claires chez les élèves et plus ou moins explicitables : x est un nombre et non pas un objet ; on conserve une *égalité en soustrayant un même* nombre des deux côtés, ou en divisant les deux côtés par un même nombre. Il repose aussi sur l'utilisation d'un *signifiant écrit, qui joue un rôle essentiel* dans la suite des actions. On peut parler d'un véritable **script-algorithme** pour bien connoter cette idée du rôle *du signifiant dans le fonctionnement de l'algorithme*. Le script-algorithme est un schème et se situe de ce fait au plan du signifié.

La représentation, analysée à travers les conduites en situation, repose fondamentalement sur le concept de schème. Le fonctionnement des schèmes perceptivo-moteurs (la marche, la descente d'une échelle, le saut en hauteur, le maniement d'une truelle) implique un usage faible, sinon nul, de signifiants langagiers. Le fonctionnement des schèmes mathématiques comporte toujours une part non négligeable de langage, en même temps qu'une organisation perceptivo-motrice de la conduite. Les schèmes évoluent et l'on observe par exemple qu'au lieu de compter à voix haute, l'enfant se met à compter à voix basse ou intérieurement, ou encore que l'élève de quatrième raccourcit la suite des opérations et des écritures dans la résolution des équations $ax + b = c$, par exemple en escamotant les lignes 2 et 4, ou en calculant directement, dans le second cas

$$12t = 732 - 312$$

Le concept de schème a une grande portée : il s'applique à l'apprentissage de la marche chez le bébé, au saut en hauteur chez l'athlète, à la solution d'une classe de problèmes mathématiques, au discours explicatif chez le professeur ou chez l'homme politique. Organisation invariante ne signifie pas stéréotype : même si les stéréotypes sont des schèmes, ils sont caractérisés, péjorativement, par leur faible flexibilité ; les schèmes au contraire sont flexibles et permettent au sujet d'adopter une conduite opératoire dans des circonstances relativement variées, à l'intérieur d'une même classe de situations. Une bonne partie de l'apprentissage et du développement cognitif (les deux processus sont si étroitement liés dans les conduites complexes qu'on ne peut pas les dissocier), consiste justement à élargir le *domaine* d'application d'un schème, à le restreindre, à décombiner et recombiner des éléments de schèmes pour constituer de nouveaux schèmes, à simplifier, raccourcir ou automatiser certaines parties des schèmes lorsqu'ils sont devenus familiers et que le contrôle de l'attention consciente est distribué sur une partie seulement des variables de situation. Par exemple, le conducteur expérimenté, comparé au novice, contrôle une très petite partie des informations qui lui viennent en retour de son action sur le véhicule ; l'étudiant expérimenté également ne contrôle qu'une partie du processus de résolution lorsqu'il résout un problème classique.

Je soulèverai maintenant trois questions théoriques qui me paraissent essentielles :

— les filiations et les ruptures dans l'apprentissage et le développement des connaissances ;

— les éléments constitutifs des schèmes ;

— les différents rôles possibles des activités langagières dans le fonctionnement de la pensée.

FILIATIONS ET RUPTURES

Les premières compétences et conceptions des *enfants se forment localement*, dans des situations familières ou dans des situations relativement simples. C'est ainsi que les jeunes enfants, entre 3 et 5 ans, élaborent une conception simple de l'addition et de la soustraction : l'addition c'est une quantité qui s'accroît, la soustraction c'est une quantité qui décroît. Associées à cette conception, les compétences des enfants sont très réduites : l'enfant peut éventuellement trouver ce qui résulte, à partir d'une petite quantité connue, de l'adjonction ou du retranchement d'une petite quantité : 1, 2 ou 3 bonbons par exemple.

De même, entre 7 et 9 ans, les enfants se forment de la multiplication une idée relativement simple qui est celle de l'itération d'une même *quantité un petit nombre de fois.*

Or l'addition et la soustraction s'appliquent à beaucoup d'autres cas de figure que ceux que je viens d'évoquer. La soustraction peut par exemple concerner :

— la recherche par complément d'une partie connaissant le tout et l'autre partie : A l'anniversaire d'Annie, il y avait 7 enfants dont 4 filles. Combien de garçons ?

— la recherche d'une transformation entre deux états connus : Pierre avait 7 voitures, il n'en trouve plus que 4. Combien lui en a-t-on prises ?

— la recherche d'une relation de comparaison entre deux quantités : Josette à 7 francs, Robert a 4 francs. Combien Josette a-t-elle de plus que Robert ?

— la recherche d'un état initial : Paul vient de gagner 4 billes. Il en a maintenant 7. Combien avait-il de billes avant de jouer ? ou encore : André a 7 000 francs de découvert sur son compte bancaire, il vient d'être débité d'un chèque de 4 000 francs. Combien avait-il auparavant ?

— la recherche de la valeur d'un terme de comparaison (pris comme référence) : René a 7 ans, Il a 4 ans de plus que son petit frère Paul. Quel âge a Paul ?

On sait aujourd'hui qu'il faut plusieurs années aux élèves pour maîtriser cette diversité de cas de soustraction. Pour cela, les élèves doivent minimiser et circonscrire la portée de leur conception initiale (la soustraction c'est une quantité qui décroît), puisque plusieurs des cas précédents n'ont aucun rapport avec cette idée. On sait aussi qu'il existe un obstacle épistémologique durable dans le cas de la décombinaison d'une transformation composée connue en deux transformations élémentaires, comme dans l'exemple suivant :

Thierry a joué deux parties de billes. Il ne se souvient plus de ce qui s'est passé à la première partie. Il en a perdu 7 à la seconde partie. Mais en recomptant ses billes à la fin, il s'aperçoit qu'il en a gagné 5 en tout. Que s'est-il passé à la première partie ?

Cette fois la solution implique l'addition 5 + 7, alors que les élèves très majoritairement rejettent cette idée. Cet obstacle, pour être surmonté, demande aux élèves d'effectuer une rupture dans leurs conceptions. Cette rupture est du même ordre que le passage des nombres naturels aux nombres relatifs. Dans le problème « Thierry », la soustraction est la bonne réponse, mais il s'agit d'une soustraction de deux nombres de signes contraires ; d'où l'addition.

Pour une majorité d'élèves, ces difficultés se prolongent, au cours de l'apprentissage de l'algèbre, jusqu'à la fin du collège au moins.

En ce qui concerne les structures multiplicatives, les filiations et les ruptures sont également faciles à identifier. Deux grandeurs proportionnelles covarient tout en conservant entre elles un coefficient constant ; ce coefficient représente une grandeur-quotient (vitesse, masse volumique, prix unitaire, etc.) et son inversion pose de sérieux problèmes. Une autre difficulté vient de l'extension à des nombres plus petits que un, des opérations de multiplication et de division ; la difficulté vient alors du fait que leur modèle primitif étant celui de la multiplication par un entier (nombre d'itérations), les enfants considèrent que la multiplication agrandit et la division diminue le nombre de départ ; or cette conception est contredite dans le cas des nombres plus petits que un. Une troisième difficulté concerne le cas de la proportion multiple, telle qu'on la rencontre dans les formules d'aire, de volume, de physique ; la proportion multiple peut en effet être analysée comme un produit de covariations indépendantes ; il y a une covariation linéaire entre deux grandeurs quand les autres grandeurs sont tenues constantes : par exemple il y a une proportion simple entre le volume et la hauteur du prisme quand l'aire de base est tenue constante. La proportion multiple demande donc une certaine représentation des concepts d'indépendance et de dépendance.

Ce tour d'horizon est très rapide ; mais on peut dire qu'il existe entre les situations à traiter, les classes de problèmes à résoudre, les schèmes à mettre en œuvre, et les concepts à appréhender, des filiations et des ruptures repérables, aussi bien dans le champ conceptuel des structures multiplicatives, que dans celui des structures additives.

SCHÈMES

Dans cette évolution des conceptions et des compétences de l'enfant, il faut accorder une place centrale aux schèmes. C'est le mérite de Piaget de l'avoir mis le premier en évidence : dans le processus d'adaptation au réel que constitue le développement de nos savoir-faire et de nos savoirs, ce sont en premier lieu les schèmes qui s'accommodent et se généralisent. Cette adaptation peut éventuellement se faire sans grande difficulté, par combinaisons, adjonctions et différenciations simples, à partir des premières situations qu'*ils* permettent de maîtriser, éventuellement aussi par de véritables révolutions, c'est-à-dire des transformations et des recombinaisons radicales.

Cette théorie est évidemment une théorie pragmatiste de l'évolution des connaissances. C'est notre relation au réel, et notamment aux situations à maîtriser, qui nous oblige à cette évolution. D'où le rôle de l'expérience et de l'apprentissage. La didactique est dans une large mesure une théorie des situations susceptibles de provoquer ou de favoriser les meilleures évolutions.

Mais pour aller plus avant, et notamment pour comprendre le rôle du langage et du symbolisme dans l'activité mathématique et dans la relation didactique, il nous faut analyser avec un peu plus de soin le concept de schème.

Organisation invariante de la conduite pour une classe de situations données, le schème comporte nécessairement des règles de production des actions, et des anticipations des effets à obtenir. Mais le schème ne serait qu'un stéréotype s'il ne comportait pas les moyens de s'adapter à la diversité des valeurs possibles des variables de situation. Un schème n'est presque jamais mis en œuvre sans inférences hic et nunc, et sans prise d'information sur le réel, puisque c'est cela qui lui donne son caractère opératoire et adaptatif. On peut désigner par l'expression globale d'**invariants opératoires** les concepts-en-acte et les théorèmes-en-acte qui permettent au sujet de prélever l'information pertinente et d'en inférer règles d'action et anticipations.

Dans le cas des structures additives on a pu ainsi mettre en évidence les concepts-en-acte nécessaires : mesure, état, transformation, relation, loi de composition binaire, opération unaire, nombre naturel, nombre relatif, abscisse, déplacement, décomposition, etc., ainsi que différents théorèmes-en-acte :

— card $(A \cup B)$ = card (A) + card (B) pourvu que $A \cap B = \emptyset$

— transformation = état final − état initial

— état initial = transformation réciproque appliquée à l'état final

etc.

Dans le cas des structures multiplicatives également, on a pu mettre en évidence la nécessité de différents concepts-en-acte : linéarité, isomorphisme, rapport scalaire, rapport fonction, nombre rationnel, analyse dimensionnelle, combinaison linéaire, etc. ainsi que de certains théorèmes-en-acte :

— $f(x + x') = f(x) + f(x')$

— $f(nx) = nf(x)$

— $f(n_1x_1 + n_2x_2) = n_1f(x_1 + n_2f(x_2)$

Les schèmes sont donc d'une grande richesse, si on prend la peine de les analyser. Or cette analyse apparaît indispensable, non seulement pour rendre compte de l'action opératoire du sujet en situation, mais aussi pour analyser certaines fonctions du langage.

ACTIVITÉS LANGAGIÈRES ET PENSÉE

Partons d'un exemple, recueilli par Danièle Morange pour la préparation de sa thèse.

L'information suivante est donnée à l'enfant : « Véronique a acheté 24 cartes postales. Elle a écrit à ses amis. Il lui reste 11 cartes postales ». Quelle question peut-on se poser et comment peut-on y répondre ?

Charlotte : On pourrait se demander combien elle en a utilisé (elle prend des jetons) ; je vais en prendre 24. 1, 2, 3 et... 24 ça y est. Alors je vais en garder 11 maintenant, je vais en prendre 11 ; 5 et 6 alors ça fait... ça me fait 10 déjà, alors il m'en manque une ; en voilà un... alors là y'en avait 11, je vérifie parce que... 1, 2, 3... 10, 11. Alors là j'en ai 11, j'écris là (elle montre son cahier), il m'en reste combien ? 2, 4, 6... 12, 14. Y'en a 14.

Expérimentatrice : Tu es sûre ?

Charlotte : 1, 2, 3... 13. Ah 13 !

Expérimentatrice : Qu'est-ce que tu peux dire ?

Charlotte : C'est les 13 cartes postales qu'elle a envoyées.

Ce qui saute aux yeux d'abord, c'est le nombre important de déictiques, qui renvoient à la situation hic et nunc et notamment au sujet de l'action. Charlotte en outre annonce ce qu'elle va faire, accompagne son action par des verbalisations, comme s'il fallait donner à cette action un statut plus assuré, anticipe la nature de ce qu'elle doit obtenir. Ce luxe de verbalisations n'est pas fortuit ni inutile, car Charlotte se trompe. Vygotski a beaucoup insisté sur le rôle du langage dans la planification et le contrôle de l'action. Mais il faut bien apprécier que cette fonction est d'autant plus facile à mettre en évidence que le problème à résoudre est difficile pour le sujet. Devant le même problème, certains enfants (et peut-être Charlotte elle-même deux ans plus tard) ne parlent presque pas et fournissent d'emblée la réponse.

Mais je voudrais souligner un point des verbalisations de Charlotte qu'il n'est pas facile d'apercevoir à qui n'a pas étudié les structures additives. Il s'agit de cette phrase : « Alors je vais en garder 11 ; maintenant je vais en prendre 11 ». C'est un moment important de transformation du problème qui va permettre à Charlotte de résoudre le problème, que sans cela elle ne pourrait pas résoudre. « Garder 11 » c'est rester fidèle à l'énoncé « il lui reste 11 cartes ». Mais Charlotte ne sait soustraire que par prélèvement d'une quantité connue à partir d'une quantité connue. Elle transforme donc le problème en « je vais en prendre 11 », ce qui lui permet d'engager sa procédure de prélèvement. On peut symboliser cette transformation de *la manière suivante* :

le problème

$$\boxed{24} \xrightarrow{\bigcirc} \boxed{11}$$

est devenu le problème

$$\boxed{24} \xrightarrow{-\,11} \boxed{}$$

On peut se demander si Charlotte aurait pu faire cette opération de pensée sans parler.

Les schèmes de la soustraction sont nombreux et concernent des conduites variées. Le schème de transformation d'un problème en un autre, est autre chose que le schème qui consiste à prélever 11 et à compter ce qui reste, ou encore que le schème que d'autres enfants utilisent en posant la soustraction :

$$\begin{array}{r} 24 \\ -\ 11 \\ \hline 13 \end{array}$$

Pour illustrer d'autres points, prenons quelques exemples dans le domaine des structures multiplicatives.

Voici tout d'abord plusieurs manières d'exprimer la valeur unitaire, c'est-à-dire la valeur prise par *une fonction pour l'unité* :

— les gâteaux coûtent 4 francs chacun
chaque
pièce
la pièce

— un gâteau coûte 4 francs

— chaque gâteau coûte 4 francs

— papa a donné 2 bonbons à chaque enfant

— papa a acheté 2 gâteaux par enfants
pour chaque
enfant

— maman roule à 120 kilomètres à l'heure
kilomètres-heure

— l'huile coûte 15 francs le litre

Toutes ces formulations ne sont pas également fréquentes, ni également acceptables en français, mais on les observe.

On peut imaginer que les enfants ont quelque peine à reconnaître que tous ces énoncés expriment en fait la même information f (1) = a, d'autant que la référence à la valeur 1 n'est presque jamais explicitement présente. La plus paradoxale de ces expressions est « kilomètres-heure » qui exprime habituellement un produit, comme dans kilowatt-heure, et non pas un quotient de mesures.

Voici maintenant quelques autres exemples de formulation de questions par des élèves de BEP. Ceux-ci avaient reçu comme informations un certain nombre de données, et il leur était demandé de formuler des questions, d'abord individuellement, puis en groupe. La formulation individuelle étant terminée, il s'agissait de se mettre d'accord sur un choix unique de questions pour tout le groupe, et sur une formulation unique lorsque plusieurs élèves avaient proposé la même question sous des formes différentes.

Or on constate d'une part que cette reconnaissance est loin d'être triviale pour certains élèves, et d'autre part que la demande d'une formulation unique pour le groupe crée un certain désarroi. Les élèves s'engagent dans un processus laborieux de reformulation qui peut passer par plusieurs étapes. Nous avons notamment observé :

— des difficultés spécifiques à la formulation des quantificateurs. Voici par exemple 4 formulations successives dans un même groupe d'élèves :
(...) pour les semelles de toutes les maisons
(...) pour toutes les semelles
(...) nécessaire à la construction des semelles
(...) nécessaire à la construction de l'ensemble des semelles ;

— des phénomènes de désambiguïsation.

La question « A combien reviendra le tout en mètres cubes de béton ? » fait l'objet d'un travail collectif qui permet d'aboutir à deux questions distinctes :

Quel sera le prix total pour le béton ?
Combien faudra-t-il de mètres cubes de béton pour l'ensemble des maisons ?

— des phénomènes de réduction de la redondance

Voici encore quatre formulations successives :
A combien sera évalué le coût de...
Combien coûtera le prix...
Quel sera le prix de toutes les semelles ?
Quel en sera le prix ?

— l'émergence de connaissances métalinguistiques

On observe par exemple que dans la combinatoire des questions possibles, certains élèves découvrent que la même structure d'énoncé peut être utilisée en substituant des expressions paradigmatiques.

Quelle quantité de ciment faut-il pour
un F4 ?
deux F4 ?
trois F6 ?
un m^3 de béton ?

et de même
Quelle quantité de sable faut-il pour 15 m^3 de béton ?
Quelle quantité de gravier faut-il pour 15 m^3 de béton ?

En bref, on peut dire que les activités langagières en situation et les activités cognitives sur le langage mettent nécessairement à contribution des conceptualisations spécifiques sur le contenu de la pensée, qu'elles sont de ce fait conditionnées par le contenu des connaissances, et qu'en retour elles jouent un rôle dans le fonctionnement de la pensée et notamment dans le processus de conceptualisation.

Je terminerai par un dernier exemple qui permet d'illustrer comment la nominalisation permet de transformer les concepts, d'outils de pensée en objets de pensée.

1. Le triangle ABC est le symétrique du triangle A'B'C' par rapport à Δ.

2. La symétrie orthogonale conserve les longueurs et les angles.

3. La symétrie orthogonale est une isométrie.

La première proposition est composée d'un prédicat à trois places et de trois arguments-objets.

La seconde est composée d'un prédicat à une place et d'un argument-objet.

La troisième est composée d'un prédicat à deux places et de deux arguments-objets.

Entre l'énoncé 1 et l'énoncé 2 le prédicat à trois places « ... est symétrique de... par rapport à ... » a été nominalisé. Il est devenu objet et peut prendre une position d'argument dans l'énoncé 2.

Entre l'énoncé 2 et l'énoncé 3, le prédicat a une place « conserve les longueurs et les angles » a été nominalisé. Il est devenu objet et peut prendre une position d'argument dans l'énoncé 3.

CONCLUSION

Le langage a bien entendu comme première fonction la communication, mais les travaux sur les apprentissages et les activités complexes tels qu'on peut les conduire dans l'éducation et le travail montrent que le langage a de multiples fonctions dans le travail de la pensée :

— rendre explicite ce qui n'était qu'implicite et lui donner ainsi un caractère public, qui permet de le soumettre au débat et à la preuve ;

— accompagner et aider la pensée dans son travail d'identification des propriétés, des relations et des objets, et dans son travail de programmation et de contrôle de l'action ;

— contribuer à la transformation du statut des connaissances, en favorisant notamment l'élaboration d'objets de niveau de plus en plus élevé.

La référence pour un psychologue cognitiviste, c'est d'abord le réel, et les situations dans lesquelles se joue la transformation des compétences et des conceptions du sujet.

Le signifié, c'est les schèmes, et les invariants opératoires implicites sur lesquels ils reposent.

Le signifiant, c'est la langue naturelle, et les autres symbolismes.

Mais les signifiants langagiers et non-langagiers ne font pas que renvoyer aux signifiés, c'est-à-dire en bonne logique aux schèmes et aux invariants opératoires ; ils sont également pris dans un jeu très serré avec les schèmes : d'une part ils font partie intégrante de certains schèmes d'action, d'autre part les productions langagières résultent elles-mêmes de la mise en œuvre de schèmes énonciatifs qui ne relèvent que pour partie de la théorie de la langue.

Gérard Vergnaud
CNRS

Bibliographie

BALACHEFF N. (1988). — **Une étude des processus de preuve en mathématique chez les élèves de collège.** Thèse d'état, Université Joseph Fourier, Grenoble.

BROUSSEAU G. (1986). — Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. **Recherches en Didactique des Mathématiques,** 7, 2, pp. 33-115.

LABORDE C. (1990). — Language and Mathematics. In P. Nesher and J. Kilpatrick (Eds), **Mathematics and Cognition : A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education,** Cambridge University Press, Cambridge.

LABORDE C. (1982). — **Langue maternelle et écriture symbolique : Deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique.** Thèse d'état, Université Joseph Fourier, Institut IMAG, Grenoble, France.

PIAGET J. (1967). — **Biologie et Connaissance.** Paris, Gallimard (notamment le chapitre V sur l'épistémologie des niveaux élémentaires de comportements).

VERGNAUD G. (1981). — **L'enfant, la mathématique et la réalité.** Berne, Peter Lang.

VYGOTSKI (1986). — **Langage et Pensée.** Paris, Éditions Sociales, Messidor.