N° 70 janv.-fév.-mars 1985, 59-77

NOTE DE SYNTHÈSE

# Nombre, numération et dénombrement : que sait-on de leur acquisition ?

Comme le remarquent Saxe et Posner (1983), la représentation numérique présente un double aspect. D'une part, elle renvoie à la **numération** comme système plus ou moins organisé, élaboré et mis en œuvre au sein d'une culture donnée. Il s'agit là d'un produit socio-historique d'emblée extérieur à l'enfant mais qu'il doit s'approprier, intérioriser jusqu'à parvenir à utiliser de lui-même les signes collectifs pour résoudre les problèmes auxquels il se trouve confronté. D'autre part, elle fait appel à un certain nombre de **relations logico-mathématiques** (sériation, itération, addition, soustraction, etc.) qui structurent le système de manière sous-jacente et qui conditionnent son organisation interne. On a là à faire à des opérations relevant des fondements logiques du nombre et de la numération ; lesquels fondements ne peuvent être transmis socialement de la même manière que la suite numérique. Ils exigent en effet une construction de la part de l'enfant lui-même ; cela ne signifiant pas que des paramètres sociaux ou culturels n'interviennent pas également à ce niveau. Simplement, leur impact ne saurait être aussi immédiat.

Cette distinction n'aurait qu'un intérêt relativement mineur si elle ne rendait pas compte de l'existence de deux problématiques différentes en ce qui concerne l'abord de la genèse du nombre et de la numération. On trouve en effet des chercheurs mettant plutôt l'accent sur l'acquisition de la chaîne numérique et de ses propriétés et d'autres qui insistent surtout sur le développement des fondements logiques. Les premiers se rattachent aux courants empiristes et/ou culturalistes et n'écartent pas a priori l'étude de l'impact des systèmes de numération particuliers sur la plus ou moins grande facilité de mise en œuvre par les sujets. Les seconds font plutôt référence au rationalisme et tendent à rechercher essentiellement des mécanismes cognitifs universels peu ou pas sensibles aux variations culturelles.

Non seulement ces deux courants coexistent mais ils ont beaucoup de difficultés à se coordonner. Les uns s'intéressent aux vérités empiriques — est vrai ce que je vois, ce que je compte — alors que les autres s'attachent aux vérités notionnelles — est vrai ce que je conclus (cf. Gréco, 1962 a). Pourtant, au cours de ces dernières années, on a pu observer une amorce de synthèse, encore partielle et hésitante, en même temps que se multipliaient à la fois les recherches empiriques et les tentatives de construction de « modèles » s'inspirant pour la plupart d'analogies informatiques.

Les données empiriques recueillies et les problèmes soulevés constituent désormais une somme de connaissances qui nous ont paru devoir être mises à la disposition des enseignants. En tant que psychologue, nous n'avons pas à conseiller ou même à suggérer telle ou telle pratique. La pédagogie n'est pas la science appliquée de la psychologie. En revanche, il nous a semblé important d'informer au moins succinctement les maîtres des développements récents relatifs à l'acquisition du nombre et de la numération. Il leur appartiendra d'en faire l'usage qui leur paraîtra le plus judicieux.

## I. — LES FONDEMENTS DU NOMBRE ET LEUR DÉVELOPPEMENT

Les travaux relatifs à l'aspect « logiciste » émanent essentiellement de l'École de Genève. Ainsi, pour Piaget et Szeminska (1941), la construction du nombre n'apparaît effective que dans la mesure où l'équivalence de deux ensembles numériques est admise par le sujet quelles que soient les transformations figurales qu'on peut leur faire subir. La correspondance terme à terme joue donc un rôle fondamental dans cette construction.

Les expériences menées par Piaget et Szeminska sont trop connues pour être rappelées dans le détail. L'exposé rapide du principe suffira.

En règle générale, l'expérimentateur dispose d'un ensemble d'éléments discrets (jetons, vases...) et demande à *l'enfant d'en placer autant par correspondance* terme à terme, de nature identique ou différente (jetons - jetons ; vases - fleurs ; coquetiers - œufs...). La formulation des consignes est évidemment adaptée. L'adulte effectue alors *une transformation figurale affectant seulement la disposition* d'un des ensembles (espacer ou resserrer les fleurs ou les œufs, les regrouper, etc.) et s'enquiert auprès de l'enfant de la conservation de quantité (y-a-t-il toujours pareil/la même chose de... ?).

Les données recueillies auprès de nombreux enfants confrontés à des situations légèrement différentes font apparaître un développement en trois phases.

1) *Chez les plus jeunes, la correspondance même* ne semble pas comprise. Les enfants se réfèrent à des rapports globaux (plus long, plus large) renvoyant à la forme d'ensemble de la configuration. Ils traitent les quantités discrètes comme s'il s'agissait de *grandeurs spatiales continues et s'appuient*, pour cela, sur une intuition, sur une perception globale, sans analyse ni coordination.

2) Au cours de la deuxième étape, la correspondance se révèle comprise mais de manière encore qualitative. Il y a bien un début de coordination des *relations mais elle* reste pratique et intuitive. Quant à l'équivalence ainsi admise, elle ne résiste pas aux transformations figurales imposées par l'expérimentateur : une fois regroupées les fleurs, l'enfant déclare par exemple qu'il y a plus de vases... parce que « c'est *plus long* ».

3) La troisième et dernière période se caractérise par la réussite immédiate à la correspondance et par la conservation de la quantité malgré les transformations figurales. Mais il y a plus. Désormais, le maintien de l'équivalence se voit **déduit, conclu** par l'enfant du fait qu'on n'a « rien ajouté rien enlevé ».

L'enfant passe donc graduellement d'une construction empirique *fragile à une conception* notionnelle du nombre qui aboutit à la conservation de celui-ci. Dès lors, Piaget et Szeminska (ibid.) ne pouvaient manquer de souligner combien l'accès au nombre se révélait tardif (cinq-six ans), contrairement à ce qu'aurait pu *laisser supposer l'utilisation* relativement précoce de la numération parlée. Celle-ci leur apparaît donc comme une manifestation purement verbale, sans incidence aucune sur la construction du nombre : « *La numération parlée* que *le milieu social impose parfois à l'enfant* (...) *demeure toute* verbale et sans signification opératoire » (ibid., p. 38).

Pourtant... pourtant, quelques années plus tard, Gréco (1962 a) met en évidence un curieux phénomène. En étudiant parallèlement les jugements de conservations numériques, dits de **quotité** (réponse à la question « combien de ? »), et ceux de **quantité** (où y-a-til plus de ?), il constate que les premiers précèdent toujours, quelle que soit la tâche, les seconds. Il en conclut qu'il ne s'agit pas, comme le concevait Piaget, d'une simple certitude verbale, mais vraisemblablement de quasi-nombres à statut cardinal. Cela l'amène à accorder un certain rôle au dénombrement : « D'abord pratique aveugle et cadeau que la société nous transmet prématurément, c'est un outil » (ibid., p. 61). Il établit en effet une correspondance bi-univoque entre mots de la chaîne numérique verbale et objets avec sommation implicite indépendamment de l'ordre. Il apparaîtrait donc comme une **procédure** aboutissant à des réussites locales mais provisoires et labiles, rapidement remises en cause par des indices perceptifs saillants. Il ne parviendrait en somme qu'à une vérité empirique moins assurée que celle notionnelle déductive qui, seule, aurait un caractère de certitude.

Le travail mené par Gréco a ainsi contribué à soulever un nouveau problème, celui des rapports entre l'accès tardif à la conservation et les activités relativement précoces de comptage. Dans cette perspective, Schaeffer, Eggleston et Scott (1974) ont eux aussi trouvé que le comptage précédait la conservation. Saxe (1979) a montré que, confrontés à des tâches de construction et de comparaison, tous les enfants conservants recouraient au dénombrement, la réciproque ne s'avérant pas. Plus important, il a découvert que les sujets comptant mal pour diverses raisons parvenaient néanmoins à la conservation.

Fuson, Secada et Hall (1983) ont conduit une série d'expériences destinées à étudier l'impact éventuel du comptage et de la correspondance terme à terme sur l'accès à la conservation. Ils soumettent des enfants de 4 ; 6 ans à 5 ; 5 ans, dont on sait (cf. infra) qu'ils se révèlent très sensibles au caractère saillant des indices perceptifs, à trois types de tâches aboutissant toutes à un jugement de conservation des quantités. Un premier groupe (G 1) est confronté à une épreuve classique (i.e. similaire à une de celles utilisées par Piaget) ; le deuxième (G 2) est invité à compter avant que ne lui soit posée la question relative à l'équivalence des deux ensembles ; le troisième (G 3) doit répondre après avoir observé une configuration dont les éléments — des écureuils et des noisettes — se trouvent mis en correspondance bi-univoque par le biais de liens visibles. Les résultats apparaissent au tableau I.

**Tableau 1**
**Nombre de sujets donnant des réponses de conservation en fonction des conditions expérimentales (d'après Fuson, Secada et Hall, 1983)**

| Conditions expérimentales | G1 | G2 | G3 |
|---|---|---|---|
| | Conservation « classique » | Comptage | Correspondance bi-univoque |
| Nombre total de sujets | 14 | 16 | 15 |
| Nombre de sujets donnant des réponses de conservation | 2 | 11 | 12 |

Les données recueillies montrent sans aucun doute que le comptage préalable comme la correspondance visualisée tendent à accroître de manière très importante la fréquence des réponses de conservation. De plus, l'analyse des justifications fournies par les enfants révèle que ceux qui comptent argumentent à partir de cette activité alors que ceux soumis à la correspondance n'y font pas allusion. Il semble qu'ils ne parviennent pas à la verbaliser, ce qui, évidemment, peut conduire à une sous-estimation de son influence.

Ces quelques expériences, parmi d'autres (cf. Lifschitz et Langford, 1977), tendent à montrer que les schèmes numériques d'une part, ceux de correspondance d'autre part, intervenant d'ailleurs peut-être de manière indépendante (Wang, Resnick et Boozer, 1971), facilitent l'accès à la conservation. Cela ne saurait toutefois signifier qu'ils la conditionnent (cf. Saxe, ibid.). En effet, s'ils permettent aux sujets de disposer d'éléments empiriques susceptibles d'étayer leurs jugements ils ne sauraient tenir lieu d'arguments de type notionnel.

Cela s'avère d'autant plus que, comme toute procédure empirique, le comptage est sujet à erreurs, celles-ci étant d'autant plus fréquentes et inaperçues que l'enfant est plus jeune. Ainsi Saxe et Sicilian (1981), ont mis en évidence que des sujets de cinq, sept et neuf ans, confrontés à trois tâches de dénombrement (objets touchables ou non et, parmi les premiers, amovibles ou non, faisaient preuve d'une confiance très variable dans leur évaluation. Ceux de cinq ans se trompent évidemment très souvent mais se déclarent sûrs d'eux quelle que soit la situation. En revanche, ceux de sept et neuf ans comptent de manière plus exacte et, dans le même temps, modulent leur opinion quant aux résultats en fonction de la difficulté perçue (le dénombrement est, par exemple, estimé moins fiable face aux collections d'objets inaccessibles au toucher). Ce résultat, très général dans la mesure où il ne concerne pas la seule numération, révèle la relation qu'entretiennent la maîtrise des activités numériques et l'auto-évaluation par le sujet de la validité des conclusions auxquelles elles aboutissent. Chez des adolescents de quinze ans encore, Newman (1984) a retrouvé des phénomènes similaires : les plus « habiles » sont aussi ceux qui portent le jugement le plus réaliste sur la fiabilité des dénombrements.

Les recherches précédemment citées acceptent a priori la définition du nombre telle que l'a formulée Piaget. Elles visent, pour la plupart, à dégager les facteurs susceptibles d'expliquer l'accès à la conservation : comptage et correspondance bi-univoque... Pourtant, elles se heurtent toutes, comme nous l'avons déjà souligné, à la difficulté de chercher à fonder une vérité notionnelle déductive à partir de vérités empiriques forcément limitées quant à leur extension (comment mettre en correspondance des ensembles aux cardinaux très élevés ?) et quant à leur fiabilité (cf. erreurs de comptage). Il ne semble pas qu'il puisse y avoir de celles-ci à celles-là filiation directe. On aurait, si l'on accepte les conclusions de Piaget, plutôt un « saut qualitatif » lié à la mise en place d'une « abstraction réfléchissante » opérant non pas directement à partir des « empiries » mais prenant pour objets les procédures elles-mêmes en les coordonnant (Piaget, 1975). Le problème reste donc posé. Nous y reviendrons ultérieurement.

Certains chercheurs n'acceptent pas, telle quelle, la conception de Piaget. Selon eux, ce dernier exige, des enfants qu'il interroge, non seulement une maîtrise des notions étudiées mais aussi une aptitude à évoquer et manipuler verbalement celles-ci. Siegel (1979-1980), trouve par exemple que les enfants se révèlent capables de comprendre les notions d'égalité et de différence numériques bien avant d'employer correctement les termes grand, petit et pareil couramment utilisés par Piaget au cours des entretiens. Hudson (1983) essaie de traiter séparément la notion de comparaison et son expression langagière. Il propose à des enfants de cours préparatoire des paires de cartes comportant des ensembles numériques inégaux d'éléments significatifs (3-2 ; 4-3 ; 5-4...) et pose, relativement à chaque couple deux types de questions ; par exemple :

a) Combien y-a-t-il de papillons de plus que de fleurs ? (formulation classique).

b) Chaque papillon va sur une fleur, combien de papillons n'auront-ils pas de fleur ?

Travaillant sur les mêmes sujets (mesures répétées), il obtient 100 % de réussites avec (b) contre seulement 64 % avec (a). Par ailleurs, il observe, avec (b), une tendance à mettre systématiquement en œuvre des procédures sophistiquées de comptage qui, toutes, présupposent acquise la règle de correspondance : deux ensembles sont égaux si on peut compter jusqu'au même nombre.

Ainsi, la méthode d'investigation employée par Piaget et ses épigones ne permettrait pas d'atteindre la « compétence » numérique des enfants mais seulement celle médiatisée par le langage qui, lui-même, introduit de nouvelles difficultés (cf. aussi Donaldson, 1978, p. 40-50). Il conviendrait donc de recourir à des procédures expérimentales non verbales.

Un autre aspect des recherches piagétiennes a fait l'objet de vives attaques. Il s'agit du choix des dimensions numériques des collections. En effet, de très nombreux chercheurs ont constaté que, lorsque le nombre d'éléments des deux ensembles à comparer est réduit et lorsque les différences perceptibles entre eux restent faibles, les enfants obtiennent des réussites fréquentes et précoces. (Cf. Bideaud, 1979-1980 pour une revue). Cela semble signifier que, très tôt, la numérosité constitue un indice saillant et opérationnel susceptible de dominer les leurres liés à la disposition spatiale (longueur, densité) à condition que le nombre d'éléments reste très limité.

Comme l'écrit Bideaud (ibid.), « A tous les âges, des jugements corrects sont observés dans un contexte où la réduction des éléments permet leur évaluation numérique ». Ce qui l'amène à estimer qu'une analyse en termes de traitement de l'information serait mieux à même d'expliquer les raisons des succès et échecs face à telle ou telle tâche comportant un nombre plus ou moins élevé d'éléments.

Au total, il apparaît clairement que les schèmes ou procédures de dénombrement s'avèrent relativement précoces et efficaces. Ce qui pose problème c'est leur emploi sporadique et limité à certaines situations : nombre réduit d'éléments, type d'épreuve, etc. (Meljac, 1979, trouve ainsi que la présence de deux collections peut soit favoriser soit inhiber le comptage selon que la tâche est dynamique — mettre pareil de... — ou statique — constater...). Un second problème a trait à l'impact mal maîtrisé des formulations, la part n'étant pas toujours facile à faire entre ce qui relève du notionnel et ce qui renvoie au langagier. Enfin, le troisième problème concerne la filiation éventuelle et, en tout cas, la (ou les) relation(s) entre procédures empiriques et vérités notionnelles.

On peut, à partir de là, développer deux thèses opposées. La première consisterait à rester dans un cadre piagétien strict et à considérer que l'enfant n'accède au nombre qu'avec la conservation. Avant cinq-six ans, il disposerait simplement et seulement de procédures limitées permettant des réussites locales mais de toute manière pré-notionnelles. La seconde considèrerait au contraire que, compte tenu des succès précoces attestés, l'enfant dispose très tôt de toutes les composantes nécessaires pour développer les concepts numériques. Mais, sa capacité restreinte de traitement de l'information lui rendrait très difficile la résolution de problèmes portant sur des ensembles numériques élevés faute de pouvoir coordonner, gérer (self-monitor), les différentes composantes impliquées.

L'argumentation en faveur de l'une ou l'autre de ces thèses nécessite, de toute manière, une meilleure connaissance de l'acquisition de la numération verbale. Les chercheurs l'ont bien perçu qui, ces dernières années, ont développé de nombreuses recherches dans cette perspective.

## II. — LA NUMÉRATION ET LE COMPTAGE

### 2.1. La numération verbale

La suite des nombres 1, 2, 3... apparaît comme une chaîne verbale dont l'acquisition relève, dans une large mesure, du linguistique. De ce point de vue, elle comporte, comme tout sous-système langagier propre à une langue donnée (par exemple en français, les formes verbales ou les déterminants...), un certain nombre d'entités et de lois de composition souffrant d'exceptions plus ou moins nombreuses (cf. soixante-dix au lieu de septante !). On peut donc l'analyser aussi dans cette perspective en particulier pour ce qui concerne le développement.

C'est en adoptant en partie au moins un tel mode d'abord que de récents travaux ont pu mettre en évidence certains phénomènes.

Fuson et Hall (1983), Fuson, Richard et Briars (1982) trouvent que, amorcée dès deux ans, la chaîne verbale atteint approximativement 100 vers la fin de la première année de scolarité ou le début de la deuxième, allant en général au-delà de ce qui est enseigné. L'étude des productions « spontanées » obtenues en réponse à des incitations du genre « montre-moi jusqu'où tu sais compter » révèle que les performances comportent, à tous les niveaux, trois parties :

a) une portion conventionnelle et stable équivalente à celle adulte,

b) une portion stable (i.e régulièrement utilisée par l'enfant) mais ne correspondant pas aux normes (nombres sautés...),

c) une portion ni stable ni conventionnelle.

Peu à peu, au cours du développement, (a) devient de plus en plus importante du fait du passage (b) → (a), alors même que les parties de type (c) se transforment en (b).

En somme, pour peu qu'on se départisse d'une conception trop strictement normative, on observe, comme l'avaient déjà noté Pollio et Whitacre (1970), que les enfants comptent avec des omissions jusqu'à un nombre beaucoup plus élevé que si on s'en tient à la stricte adéquation à la liste adulte. Cette remarque prend toute son importance lorsqu'on remarque que, dans les tâches de dénombrement, les mêmes sujets, malgré le recours à des listes idiosyncrasiques, tendent à respecter la correspondance un objet — un « nom de nombre » (cf. sous 3.2).

Si on étudie, comme l'ont fait Siegler et Robinson (1982), les « points d'arrêt » lors de la récitation de la suite des nombres, on observe que, lorsque le comptage reste dans la portion inférieure à 20, les sujets ne disposent apparemment pas de la règle (linguistique) de formation des dizaines. Quand le comptage s'étend jusqu'à 99, cette règle paraît maîtrisée : si l'on donne à l'enfant un nombre de deux chiffres terminé par 1 (31, 61...), il complètera la liste jusqu'à d9 (39, 69...) mais rencontrera des difficultés lors du changement de dizaine. Ce phénomène se révèle très général et il n'est pas sans intérêt de signaler qu'on le rencontre systématiquement chez les adultes ayant à manipuler des bases autres que celle de dix (Pollio et Reinhart, 1970).

Cela ne signifie toutefois pas que, au CP, les enfants manipulent sans problème la suite verbale des nombres de 0 à 100. Les travaux de Comiti (1980) comme ceux de Lemoyne et Vincent (1982) révèlent à cet âge des difficultés importantes d'intégration en mémoire de la chaîne numérique. Selon les derniers auteurs, elle ne suit pas encore à ce niveau les règles simples d'itération et de succession. De plus, les nombres inférieurs à 40 semblent différemment et mieux traités que ceux s'étendant au-delà.

Un problème intéressant consiste à se demander comment s'organise cette liste et, en particulier, si elle fonctionne comme un bloc ou si on peut y « entrer » n'importe où.

Les recherches rapportées par Fuson et al. (ibid.) révèlent qu'elle fonctionne d'abord comme un tout, un chapelet (string level) non scindable. A ce niveau, l'enfant se trouve obligé de commencer par le début et peine à poursuivre si on lui fournit un départ arbitraire (compter à partir de 3 ou 4...) sauf si l'expérimentateur « amorce » la liste en énumérant lui-même trois ou quatre chiffres successifs. Il parvient toutefois à compter « jusqu'à » une limite fixée et à répondre, parfois laborieusement, à la question « qu'est-ce qui vient après ? ». A l'étape suivante, le comptage devient possible à partir de n'importe quel point et permet donc de résoudre des problèmes simples de type additif ou soustractif (en allant de $a$ à $b$ avec $a < b$ et $a + c = b$). L'enfant dispose désormais de ce que Resnick (1983) dénomme une « ligne numérique » rendant possible le comptage et la comparaison de nombres. Le parcours « en arrière » de celle-ci reste cependant difficile mais il pose aussi quelques problèmes à l'adulte (Nairne et Healy, 1983). Enfin, dans une dernière phase, les nombres ne sont plus simplement produits mais deviennent susceptibles d'être eux-mêmes comptés et mis en correspondance avec des ensembles numériques ; ce qui autorise le stockage en mémoire du déjà compté alors même que se poursuit le comptage.

La chaîne numérique apparaît donc d'abord comme un outil utilisable pour compter, outil qui se perfectionne, se complète, s'étend et s'assouplit graduellement. Puis, à une étape ultérieure, et sans doute là encore très progressivement, les « mots » de nombres deviennent eux-mêmes objets de comptage.

### 2.2. Le comptage mental, addition et soustraction

Comme nous l'avons précédemment signalé, la construction de la ligne numérique permet à l'enfant de résoudre mentalement des opérations simples — addition et soustraction — à condition qu'elles portent sur des quantités relativement petites. Il reste à savoir comment procède l'enfant et, surtout, comment évoluent les procédures pendant la période scolaire et jusqu'à l'état adulte.

Ce problème a, au cours de la dernière décennie, particulièrement retenu l'attention des chercheurs. Ceux-ci ont en effet trouvé l'occasion de développer de nouvelles théories mais aussi d'utiliser une méthode d'approche qui, pour n'être pas neuve, est devenue très accessible du fait de l'extension des micro-ordinateurs : la mesure des temps de réaction (« reaction time », abrégé en RT).

Groen et Parkman (1972) ont été parmi les premiers à mettre en œuvre une telle méthodologie. Etudiant la résolution mentale d'additions simples par l'enfant de CP (6;10 ans), ils ont a priori considéré que ces opérations pouvaient être abordées selon deux grandes catégories de procédures. La première consisterait à récupérer directement en mémoire à long terme les résultats (par exemple **6** pour 4 + 2) ; il s'agirait alors d'une méthode « **reproductive** ». La seconde exigerait, elle, une reconstruction du résultat par le biais d'un calcul ; la procédure étant « **reconstructive** ».

Groen et Parkman découvrent que le temps de latence qui s'écoule entre la présentation du problème et sa résolution par l'enfant peut être prédit par une équation simple de la forme $y = ax + b$, $b$ étant une constante et **a** correspondant au temps nécessaire pour augmenter de 1 une quantité donnée. Ceci revient à constater que, confronté à une addition du type 3 + 5, l'enfant de CP effectue une commutation (5 + 3), amorce son comptage à 5 et incrémente de un en un jusqu'à avoir ajouté 3 : le temps de réaction observé est ainsi une fonction linéaire directe du plus petit des deux nombres à additionner.

Pour surprenant qu'il soit — il semble contredire le caractère relativement tardif de l'accès à la commutativité de l'addition (Gréco, 1962 b) — ce modèle s'est avéré robuste. Plusieurs autres chercheurs l'ont confirmé en travaillant soit, comme Groen et Parkman, à partir de mesures de temps de réaction soit en s'appuyant sur les justifications fournies par les enfants et sur l'analyse des comportements (Svenson, 1975 ; Svenson et Sjöberg, 1983).

Plus surprenant encore, cette procédure se révèle inventée par les enfants. Personne en effet ne la leur enseigne. Qui plus est, Groen et Resnick (1977) qui ont fait apprendre à additionner avec une autre méthode des enfants de quatre ans ont observé, chez la moitié d'entre eux, un passage spontané à cette procédure qu'on rencontre également chez les sourds profonds rééduqués (Hitch, Arnold et Phillips, 1983).

Il semble donc bien avéré que les enfants utilisent systématiquement, au moins au CP et peut-être même avant, une procédure spontanément mise en œuvre pour la résolution d'additions simples ; procédure qui s'appuie sur le comptage et, en particulier, sur l'incrémentation par pas de un.

Les choses sont moins simples pour la soustraction. Woods, Resnick et Groen (1975) ont en effet trouvé que les enfants utilisaient là encore une procédure reconstructive mais plus complexe. Tout semble se passer comme si, confrontés à une soustraction mentale du type $m - n$, ils comparaient d'abord $m$ à $2n$ (Svenson et Hedenborg, 1979) pour, ensuite, soit incrémenter par pas de un de $n$ jusqu'à $m$ si $m < 2n$, soit décrémenter de $m$ jusqu'à $n$ si $m > 2n$. Mais, contrairement à ce qu'on observe relativement à l'addition, les différences interindividuelles se révèlent très importantes.

Les faits mis en évidence en ce qui concerne l'effectuation mentale d'additions et soustractions simples tendent donc à accréditer un modèle de résolution reposant sur des procédures de comptage par pas de un. Or, des recherches du même type et recourant à la même méthode démontrent que les adultes n'utilisent vraisemblablement pas la même démarche.

Ashcraft et Battaglia (1978), Miller, Perlmutter et Keating (1984), Stazyk, Ashcraft et Haman (1982) s'accordent tous pour admettre que, confrontés à des additions ou à des multiplications portant sur des nombres de 0 à 10, les adultes procèdent à une récupération directe en mémoire à long terme des résultats. Tout se passe comme s'ils effectuaient mentalement la consultation d'une table classique d'addition ou de multiplication organisée en lignes et colonnes. L'attestent les temps de réaction très brefs et prédictibles à partir du carré de la somme ; ce qui pose d'ailleurs le problème de l'organisation en mémoire des informations numériques.

Il est fondamental de constater que, chez l'adulte, les temps de réaction se révèlent similaires ou tout au moins très comparables avec l'addition et la multiplication. Cela permet de supposer que l'organisation du stockage en mémoire et les procédures de récupération sont identiques (Miller et all, ibid.).

A l'évidence, si les enfants jeunes procèdent par comptage itératif et si les adultes, eux, recourent directement à la récupération en mémoire, il doit exister une période de transition au cours de laquelle s'effectue le passage de la méthode reconstructive à celle reproductive (Groen et Parkman ibid.).

*Ashcraft et Fierman (1982) situent cette période* approximativement au niveau du cours élémentaire deuxième année. En effet, les temps de réaction relevés chez les enfants de cours moyen et de sixième se révèlent, bien que plus lents, prédictibles à partir du même paramètre que celui mis en évidence chez l'adulte (le carré de la somme). En revanche, au CE 2, la population se scinde clairement en deux sous-groupes : d'une part, *ceux qui réagissent déjà comme leurs aînés et, d'autre part, ceux qui se comportent* encore comme les sujets de CP. Il reste bien sûr à essayer de comprendre pourquoi et comment s'effectue le passage de la reconstruction à la récupération (cf. aussi Findlay, 1978).

D'autres recherches, conduites à partir de méthodes moins sophistiquées (mais tout aussi pertinentes !) confirment cette évolution graduelle du comportement des enfants. Ainsi, Svenson et Sjöberg (1982, 1983) qui ont suivi une promotion de douze enfants du CP au CE 2 en les soumettant régulièrement à des épreuves comportant des additions et soustractions ont, à partir de l'observation des conduites et des rapports verbaux, constaté que le développement s'effectuait d'une phase primitive au cours de laquelle les sujets recouraient à des aides mémorielles extérieures (comptage sur les doigts...) à une autre terminale où la récupération s'opérait directement en mémoire à long terme en passant par une étape intermédiaire de comptage mental intériorisé (i.e sans aide extérieure). Cette période de transition correspond à celle au cours de laquelle les temps de *réaction présentent un accroissement linéaire en fonction du plus petit des deux nombres* à additionner.

La nécessité du recours graduel et de plus en plus fréquent à la récupération directe en mémoire à long terme est actuellement conçue comme résultant du caractère très limité de la capacité de traitement de l'information. On a en effet constaté que la mémoire de travail (ou mémoire à court terme) ne pouvait « contenir et traiter qu'un nombre très restreint d'éléments, cela pendant une durée relativement brève. Cela s'avère encore plus chez le jeune enfant qui dispose à la fois d'une capacité moins étendue et d'une moindre vitesse de traitement (Case, 1978, 1982 ; Case, Kurland et Goldberg, 1982 ; Dempster, 1981 ; Pascual-Leone, 1970 ; Ribeaupierre, 1979-1980, 1983 ; Richard, 1982). La fragilité de la mémoire de travail, le fait qu'elle se trouve très vite surchargée même chez l'adulte (Hitch, 1978) obligent le sujet humain à faire au maximum appel à la mémoire à long terme qui se caractérise, elle, par une capacité quasi illimitée. C'est d'ailleurs ainsi que procèdent les calculateurs experts (Hunter, 1978).

L'évolution va donc, en ce qui concerne le comptage, se marquer par un recours de plus en plus fréquent au stockage en mémoire de « faits numériques » (résultats tout prêts qu'il suffit de récupérer tels quels), par une automatisation croissante des algorithmes de résolution mais aussi par une souplesse accrue dans l'utilisation des diverses stratégies disponibles.

Carpenter, Hiebert et Moser (1981), Carpenter et Moser (1982), Ginsburg (1977, 1978, 1982), qui ont, les uns ou les autres, travaillé sur la résolution d'additions ou de soustractions chez des enfants jeunes (CP, CE 1...), scolarisés ou non, de culture occidentale ou africaine, soulignent tous que les procédures de comptage utilisées sont le plus souvent inventées par l'enfant (i.e non enseignées), disponibles dès la période préscolaire et influencées par la culture ambiante. Ainsi Ginsburg (1977, 1978) démontre que les sujets issus d'une tribu pratiquant le commerce ont, en arithmétique, à cinq ans, un relatif avantage par rapport à ceux appartenant à une ethnie d'agriculteurs. Toutefois, à un âge plus avancé (neuf-dix ans), ni la culture ni la scolarisation n'entraînent de différences significatives dans les performances, au moins pour les tâches considérées (1).

Par ailleurs, comme le montrent Houlihan et Ginsburg (1981) et Russel (1977), les enfants passent graduellement d'une stratégie relativement rigide — compter systématiquement — à des procédures diversifiées, adaptées aux situations — problèmes qu'ils ont à affronter.

En résumé, on peut donc dire que le développement des activités de comptage numérique mental s'amorce par une phase où les enfants additionnent ou soustraient une par une les unités correspondant au plus petit des deux nombres. Pour cela, ils s'aident d'abord de supports extérieurs qui permettent d'alléger la charge en mémoire de travail. Ensuite, le calcul s'effectue « dans la tête » mais toujours selon le même principe. Peu à peu, sans doute sous l'impact conjugué de l'automatisation, de la pratique et de la maturation, ils tendent à stocker et à récupérer directement en mémoire à long terme les résultats concernant les opérations simples. Il faut signaler à nouveau que cette évolution semble actuellement, compte tenu des recherches dont on dispose, avérée dans toutes les cultures et classes sociales. Ce constat amène Ginsburg (1978) à suggérer l'existence, en ce qui concerne l'arithmétique élémentaire, de capacités cognitives universelles.

### 2.3. La représentation en mémoire des nombres

Bien que le concept de « représentation » soit, en psychologie, extrêmement flou et contesté, la plupart des chercheurs sont, à un moment ou un autre, amenés à l'utiliser.

Le problème devrait nécessairement se poser dès lors qu'on avait à tenter de rendre compte du stockage et de la récupération en mémoire à long terme de faits numériques. Les premiers travaux menés chez l'adulte ayant abouti à des résultats intéressants (Shepard, Kilpatric et Cunningham, 1975), la question était de savoir si la représentation mentale des nombres avait, chez l'enfant, la même organisation. Plus précisément, on était amené à se demander si l'acquisition de nouvelles opérations entraînait des modifications dans la structuration en mémoire des données numériques.

On sait (cf. sous 2.1) que l'enfant de cinq-six ans paraît disposer d'une représentation des nombres correspondant grossièrement à une « ligne numérique » alors que, chez l'adulte, l'organisation semble plus complexe, plus proche de ce qu'on trouve dans les recherches relatives à la mémoire sémantique. Miller et Gelman (1983) ont repris ce problème en soumettant des sujets de cinq, huit et douze ans à une tâche d'appariement. Pour cela, on présente des triplets de nombres en demandant aux enfants de désigner les deux qui « vont le mieux ensemble ». On obtient ainsi des matrices résumant les fréquences d'associations entre paires de nombres. Ces matrices sont alors traitées à l'aide de méthodes mathématiques permettant de visualiser, sous une forme graphique, les proximités. Les descriptions ainsi obtenues autorisent alors les comparaisons d'un âge à un autre.

Les résultats obtenus par Miller et Gelman (ibid.) révèlent que, comme on pouvait s'y attendre, les jugements de similitude reposent, chez les plus jeunes, essentiellement sur la séquence des nombres liée au comptage. Il s'agit donc d'une représentation unidimensionnelle dans laquelle les nombres apparaissent comme des symboles abstraits dotés

(1) Dans le cadre restreint de cette revue, nous n'abordons pas les questions relatives à la résolution de problèmes additifs, soustractifs ou multiplicatifs. Ce thème nécessiterait à lui seul un travail de synthèse compte tenu du grand nombre de travaux actuellement disponibles (cf. Lesh et Landau, 1983 ; Van Lehn, 1983 ; Vergnaud, 1982, 1983 ; Vergnaud et Errecalde, 1979).

d'une magnitude et d'une position. Seul le zéro occupe un emplacement peu orthodoxe (cf. aussi Bednarz et Janvier, 1982) à cinq ans, alors qu'à huit ans, sa place correspond à celle rencontrée ultérieurement.

A douze ans, en revanche, on relève une nette rupture avec la réprésentation unidimensionnelle. D'autres critères se manifestent, en particulier les relations pair/impair et celles multiplicatives, qui font apparaître l'organisation comme très proche de celle adulte.

Miller et Gelman en concluent que la représentation du nombre évolue en relation avec la pratique scolaire des opérations, celles-ci influant en retour sur les jugements de similitude. En effet, l'organisation en mémoire reposerait à cinq *ans sur la succession* (addition de 1 en 1), à huit ans sur l'addition en général et, à douze ans, aussi sur la *multiplication*.

Toutefois, le travail rapporté par Miller et Gelman reste, du fait de la méthodologie *employée, très descriptif. Il ne nous informe* en particulier aucunement quant à l'utilisation éventuelle des représentations » en mémoire à long terme. Or, on dispose d'intéressantes données relativement à ce problème.

Par exemple, si, pour étudier la résolution d'additions mentales chez l'adulte, on recourt à une tâche de jugement (a + b = c : vrai ou faux ?) plutôt qu'à une épreuve de production, on observe que le délai de réponse est systématiquement et significativement plus élevé lorsque le terme **c** erroné est plus proche du résultat exact. Ainsi, on évalue plus rapidement comme *fausse une équation du type* 3 + 5 = 14 *qu'une autre de la forme* 3 + 5 = 9 (Ashcraft et Battaglia, 1978). Ce phénomène se révèle très général pour autant que les sujets se trouvent confrontés à un matériau linéairement organisé : la suite des lettres de l'alphabet entre autres (Hamilton et Sanford, 1978).

Le processus sous-jacent aux activités de comparaison (comparer a + b et c) ne peut, compte tenu des données observées, se ramener à un comptage mental. Celui-ci aboutirait en effet à des résultats inverses (pour l'exemple ci-dessus considéré 9 serait plus rapidement estimé faux que 14 pour 5 + 3, car, par comptage, *il* se trouve *plus vite* atteint : 8 + 1 au lieu de 8 + 6). On fait donc appel, pour expliquer ce phénomène, à *l'hypothèse d'une représentation analogique* des nombres en mémoire à long terme. Il s'agirait d'une sorte de ligne mentale numérique sur laquelle interviendraient des effets liés à la « distance symbolique » : les comparaisons prendraient d'autant moins de temps que les termes occupent des positions distanciées l'un par rapport à l'autre.

Cette « distance symbolique subjective » dont l'impact se manifeste chez l'adulte se retrouve chez l'enfant dès l'âge de cinq ans (Sekuler et Mierkiewicz, 1977). Cela implique donc que déjà, à cette période du développement et dans les limites de la suite numérique connue, *les activités de comparaison font appel à des processus similaires à ceux rencon*trés ultérieurement dans l'évolution et ne reposent pas sur le comptage.

Pour autant qu'on accepte de faire référence à la notion de représentation, *il* apparaît que celle-ci présente, pour ce qui concerne la suite numérique, de grandes similitudes chez l'enfant jeune et l'adulte. Celles-ci semblent largement responsables de l'identité des phénomènes rencontrés chez l'un et l'autre dans des activités de comparaison. Toutefois, au fur et à mesure du développement et de la pratique scolaire, cette représentation va se complexifier, en particulier sous l'influence de la maîtrise de nouvelles opérations (la multiplication notamment).

Elle va peu à peu s'organiser en un « réseau mental » dont les recherches actuellement disponibles considèrent qu'il se structure comme les classiques « tables » d'addition et *de multiplication. Dès lors, le délai d'accès à un nombre résultat apparaît dépendant*, encore que de manière non linéaire, du nombre de rangées et colonnes à « parcourir » mentalement.

Cette organisation, apparemment très proche de celle plus générale relative à la mémoire sémantique, a évidemment l'avantage de permettre un accès rapide aux données stockées en mémoire à long terme. Elle a en revanche un inconvénient. Elle semble en effet responsable de « confusions associatives » (Winkelman et Schmidt, 1974). De fait, on observe que le temps de vérification d'équations fausses du type $3 + 5 = 15$ (ou $3 \times 5 = 8$) est anormalement élevé, comme l'est également la fréquence des erreurs de jugement (vrai/faux). Winkelman & al. interprètent ce phénomène comme résultant de l'existence de processus associatifs et tentent, dans cette perspective, une ré-interprétation des faits mis en évidence par Parkman (ibid. ; cf. sous 2.2).

Les données recueillies apparaissent relativement claires et cohérentes les unes avec les autres. Pourtant tout n'est pas dit. En effet, les conceptions que nous avons évoquées dans ce second chapitre postulent toutes, en général implicitement, l'existence d'**une** et une seule forme de représentation du nombre. Celle-ci serait donc à un niveau abstrait indépendante de la symbolisation « de surface ». En d'autres termes, la représentation et le traitement des faits numériques ne dépendraient en aucune manière du type de symboles utilisés : chiffres arabes ou romains, etc. Or, une série de résultats récemment rapportée par Gonzalez et Kolers (1982) semble montrer qu'il n'en est rien chez l'adulte, même si l'on contrôle la familiarité des sujets avec le symbolisme.

En l'absence d'autres recherches de ce type, il serait imprudent de généraliser. Notons cependant que si ces résultats devaient ultérieurement se confirmer ils amèneraient inévitablement à reposer le problème de l'articulation d'opérations cognitives souvent considérées comme universelles avec des systèmes de symboles dépendant, eux, des cultures.

## III. - LE DÉNOMBREMENT

L'activité de dénombrement, c'est-à-dire la mise en correspondance terme à terme de tous les éléments d'une collection d'« objets » avec les termes d'une série numérique verbale de telle sorte que chacun de ceux-là soit considéré une fois et une seule associé avec une et une seule « étiquette numérique », a été très tôt étudiée. Puis l'intérêt qu'elle suscitait, notamment pour la mise au point de tests, a presque disparu. Aujourd'hui, à nouveau, les travaux se multiplient, la concernant. Or ceux-ci fournissent sinon la synthèse entre courants empiriste et logiciste du moins des éléments et des modes d'approche susceptibles d'y conduire à plus ou moins long terme.

### 3.1. Recherches empiriques sur le dénombrement

Dès 1921, Descœudres fournit les résultats d'une série de recherches empiriques relatives au comptage et au dénombrement chez les enfants de deux à sept ans (cf. Descœudres, 1921, p. 206-248). Les données que nous rapportons au tableau II démontrent que, en dehors des progrès observés en fonction de l'âge (ce qui est trivial), un nombre donné — **trois** par exemple — ne s'avère pas maîtrisé à la même période selon le type de tâche demandée à l'enfant. L'évolution ne se manifeste donc clairement que dans la mesure où l'on s'en tient à une épreuve bien définie (cf. les items « numériques » du Binet-Simon et les révisions successives aboutissant à la N.E.M.I ; in Zazzo, Gilly et Verba-Rad, 1966).

Ce phénomène quelque peu paradoxal n'a, dans un premier temps, guère retenu l'attention des psychologues. Il est vrai que, en considérant le dénombrement comme une tâche à dominante verbale ne relevant pas de la pensée logique, ils n'avaient guère de raison de soulever ce problème. Et pourtant !

Pourtant, si l'enfant « sait » compter jusqu'à trois (par exemple) en reproduisant un nombre donné d'objets, on voit mal, a priori, pourquoi il échoue à imiter ce même nombre lorsqu'il concerne des coups frappés. « Possède »-t-il effectivement ou non le nombre « trois » ? Et, si oui, qu'est-ce qui gêne sa mise en œuvre dans telle ou telle épreuve ?

A ces questions, de très récents travaux ont apporté des éléments de réponse.

**Tableau 2**

**Nombres maîtrisés par 75 % des enfants en fonction des âges et des types de tâches (d'après *Descœudres, ibid*)**

| *Types de tâches* / Âges | 2 1/2 | 3 | 3 1/2 | 4 | 4 1/2 | 5 | 5 1/2 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Reproduire un nombre *donné* d'objets | 2 | — | 3 | — | — | 4 | — | — |
| Montrer autant de doigts que d'objets | — | 1-2 | — | 3 | — | 4 | — | — |
| Montrer autant d'objets que de doigts | — | 1-2 | — | — | 3 | 4 | — | — |
| *Imiter un nombre de coups* frappés | — | — | 1 | — | 2 | — | 3 | — |
| Dire combien on a entendu de coups | — | — | — | — | 1-2 | 3 | — | 4 |
| Dire combien d'objets sans compter | 1 | 2 | — | — | 3 | — | — | 4 |
| Donner un certain nombre d'objets à *1, 2, 3 personnes* | 1 | 2 | — | — | 3 | — | — | 4 à 10 |
| Repérer la suite des nombres | 1 à 4 | 1 à 5 | 1 à 6 | — | 1 à 7-8 | 1 à 10 | — | — |
| Dénombrement avec les doigts | — | — | — | — | 2 à 6 | 7 à 10 | — | — |

### 3.2. **Recherches cognitives sur le dénombrement**

Dans une série de recherches, Gelman et *ses collaborateurs* (Gelman, 1977, 1978, 1983 ; Gelman et Gallistel, 1978 ; Gelman et Meck, 1983) développent une nouvelle théorie de l'acquisition du nombre et l'étayent par de nombreuses recherches empiriques aux *résultats souvent étonnants*.

*Selon eux*, l'*activité* de comptage serait gouvernée par cinq **principes** implicites (i.e mis en œuvre au niveau comportemental sans prise de conscience ni verbalisation) :

1) la mise en correspondance un à un de chaque objet décompté avec une et une *seule « étiquette verbale »*,

2) l'ordre stable : la suite des « étiquettes verbales » suit une séquence fixe,

3) la cardinalité d'une collection est obtenue directement par la dernière « étiquette verbale » formulée,

4) l'*abstraction* : l'hétérogénéité (vs l'homogénéité) des entités d'une collection n'a aucun impact sur leur dénombrement,

5) la non-pertinence de l'ordre : l'amorce du comptage à un endroit ou un autre de *la collection n'a pas d'incidence sur les résultats.*

Toujours selon Gelman, ces cinq principes seraient très tôt disponibles chez l'enfant et, en tout cas, beaucoup plus tôt que ne le laisse penser la thèse de Piaget. Toutefois, c'est leur mise en œuvre simultanée au cours du comptage *qui poserait des problèmes* à l'enfant.

En d'autres termes, le très jeune sujet disposerait des compétences nécessaires (i.e des concepts et des règles) mais rencontrerait des difficultés au niveau de la performance. *Celles-ci proviendraient de ce que l'enfant*, du fait de sa capacité limitée de traitement de l'information, ne parviendrait pas à coordonner, à gérer (monitor) l'application conjointe de ces différents principes.

Il reste évidemment à recueillir des données empiriques susceptibles d'étayer cette conception qui a l'avantage de rendre élégamment compte des décalages observés par Descœudres (cf. ci-avant). Or, les faits recueillis s'accordent relativement bien avec cette thèse.

Tout d'abord, les travaux menés chez le nouveau-né ont montré que celui-ci était très tôt (quelques heures selon Antell et Keating, 1983 ; quelques mois selon Strauss et Curtis, 1981) en mesure de distinguer entre petits nombres (2 et 3 voire 3 et 4) quelles que soient les variations de forme, couleur et densité des éléments. Ce phénomène d'aperception immédiate globale (subitizing) n'implique pas que le nouveau-né sait compter et comprend mais il démontre que celui-ci dispose des capacités d'extraction des traits relatifs à la numérosité. De plus, selon Gelman (1983) il serait également très précocement en mesure d'établir une correspondance abstraite ayant pour base la seule numérosité entre des stimuli visuels (p. ex. trois points) et auditifs (trois coups frappés).

Ensuite, Gelman (1977) démontre que, dans la mesure où on s'en tient à de petits nombres et où on adapte la tâche aux possibilités des sujets (« jeu magique » — avec un « gagnant » — ne nécessitant pas le recours aux étiquettes verbales), on trouve que, dès trois ans, les enfants réagissent aux nombres et semblent raisonner en termes d'addition et de soustraction. Ils admettent en particulier que certaines transformations (ajouter, enlever) modifient la numérosité alors que d'autres (déplacer) ne l'affectent pas. D'autres expériences révèlent que le principe (1) est respecté dès deux ans et demi, celui (2) dès trois ans, celui (4) ne posant jamais de problème. Seuls ceux (3) (cardinal) et (5) (non-pertinence de l'ordre) révèlent l'existence de difficultés (Gelman, 1978).

Enfin, les problèmes rencontrés par les enfants semblent résider dans la trop lourde charge cognitive qu'impose la gestion simultanée des « principes ». Par exemple, l'application conjointe des trois premiers donne lieu aux pourcentages de réussite reportés dans le tableau 3 en fonction de la taille des collections.

**Tableau 3**

**Pourcentages d'enfants appliquant correctement les trois premiers principes (ordre stable, correspondance, cardinalité) en fonction de l'âge et de la taille des collections (d'après Gelman, 1983)**

| Ages / Tailles des collections | 3 ans | 4 ans | 5 ans |
|---|---|---|---|
| n = 7 | 19 % | 47 % | 80 % |
| n = 11 | 5 % | 37 % | 47 % |

Dès lors, si effectivement les échecs et difficultés rencontrés par les enfants tiennent à ce qu'ils sont « submergés » par la coordination des différentes composantes impliquées, il devrait être possible d'observer des améliorations importantes de la performance en « allégeant » la charge de traitement auquel doit faire face le sujet.

Tel est bien le résultat obtenu par Gelman et Meck (1983). En proposant à des enfants non plus de compter eux-mêmes — car la charge cognitive s'avère trop lourde — mais de détecter les éventuelles erreurs commises par des poupées dans une tâche de dénombrement, les auteurs démontrent que, pour des collections comportant jusqu'à **vingt** éléments, les sujets ne se trompent pratiquement jamais dès trois ans en ce qui concerne les principes d'ordre stable, de correspondance et de cardinalité. On notera que les performances relevées sont très supérieures à celles généralement retenues comme caractéristiques de ces âges (trois et quatre ans).

Inversement, si l'on accroît la difficulté de traitement — par exemple en ne permettant pas à l'enfant de toucher des entités à dénombrer — on relève une chute sensible des performances (cf. aussi les travaux de Bastien et Bovet, 1980, sur la notion de parcours ordonné et ceux de Potter et Levy, 1968 et Shannon, 1978 relatifs aux stratégies de pointage exhaustif *nécessaires au dénombrement des collections ; pointage qui, loin d'être* une activité simple, pose des problèmes aux enfants jeunes).

En résumé, **dès trois ans,** les enfants semblent disposer d'une connaissance implicite des cinq principes de base sur lesquels repose le dénombrement. Ils sont capables de les appliquer à des collections beaucoup plus étendues que celles affrontées lors du comptage spontané ; cela sous réserve que les tâches proposées n'aboutissent pas à une surcharge cognitive. Les progrès ultérieurs ne consistent donc pas en une acquisition de nouveaux concepts et principes mais en une meilleure coordination et gestion des procédures consécutives à l'automatisation de celles-ci et/ou à l'accroissement des capacités de traitement.

Comptage et dénombrement mettent donc en jeu une organisation cognitive **modulaire,** structurée en composants relativement indépendants devant être combinés et fusionnés pour résoudre un problème donné. Les erreurs de performance résultent d'une « mauvaise » coordination ou d'une mise en séquence (timing) déficiente. Le développement, lui, consiste essentiellement en une meilleure auto-gestion (self-monitoring) des re-combinaisons de composants.

Wilkinson (1984), s'est inspiré de cette conception pour montrer que ce qui caractérise le développement c'est l'existence de périodes intermédiaires au cours desquelles les *performances se révèlent instables. En utilisant une méthode test-retest dans quatre* épreuves de comptage hiérarchisées quant à la difficulté, croisées avec six tailles de collections (3, 6, 9, 12, 19 et 26 éléments), il observe, conformément à la thèse des composants modulaires de Gelman, une variabilité croissante dans les performances en fonction de la complexité des tâches. Il interprète ce résultat en considérant que le développement s'effectue essentiellement dans le sens d'un accroissement des coordinations des composants indépendants. Il considère enfin que les faits rapportés sont compatibles avec la théorie de l'équilibration élaborée par Piaget (1975).

Plus récemment, Greeno, Riley et Gelman (1984) ont construit un modèle simulant les séquences de comportement liées au comptage. Ce modèle inspiré des travaux de l'intelligence artificielle, comporte trois composantes. La première concerne la compétence et inclut les « principes » répertoriés par Gelman. La seconde a trait à la mise en œuvre procédurale permettant, par le biais de règles du type condition-action, de passer des « principes » à la réalisation. La troisième, dite utilisationnelle, prend en considération les conditions propres aux situations particulières de dénombrement avec leurs contraintes spécifiques.

Le modèle élaboré intègre aussi en un tout les principales découvertes empiriques de ces dernières années. Il simule une structure cognitive susceptible de produire des séquences de comportements dans le cadre d'activités de comptage. En tant que tel, il n'apporte aucun élément nouveau en ce qui concerne les composantes. En revanche, il a l'avantage d'obliger les chercheurs à utiliser des définitions rigoureuses et à organiser et coordonner (eux-aussi) des données jusqu'alors simplement juxtaposées. Lorsque l'ordinateur, programmé avec ce modèle, « comptera » en commettant, en fonction des contraintes inhérentes aux diverses activités de dénombrement, les mêmes erreurs que les enfants, on pourra estimer avoir atteint une approximation satisfaisante d'un fonctionnement cognitif donné. Il restera alors à se préoccuper de son évolution, ce qu'on ne sait pas encore faire.

### 3.3. Dénombrement et nombre

La thèse de Gelman se démarque assez sensiblement de celle de Piaget. Contrairement à cette dernière elle attribue à l'enfant la capacité de compter. Elle accorde également une moindre importance à la correspondance terme à terme. Enfin, le développement du nombre y est considéré comme lié au comptage et non au concept de nombre (conservation).

Ceci repose, une fois de plus, le problème de savoir dans quelle mesure une vérité notionnelle — l'invariance de la quantité — peut être dérivée d'une vérité empirique toujours dépendante des aléas de la performance. Certes, en invoquant et en mettant en évidence la précocité des « principes », en démontrant que, pour ce qui concerne les collections de petite dimension, les enfants se comportent très tôt, dans des tâches éliminant les problèmes liés à la verbalisation, comme s'ils admettaient l'invariance du nombre quelles que soient les modifications perceptives imposées aux ensembles, Gelman et ses collaborateurs ont contribué à faire admettre que la numérosité était une acquisition très précoce. Mais ils n'ont pas résolu le problème. Ils l'ont simplement déplacé dans la genèse en le situant à une période antérieure.

Seul, à notre connaissance, Glasersfeld (1981, 1982) a tenté d'élaborer une théorie susceptible d'articuler entre elles les deux types de « vérité » : notionnelle et empirique. Partant du constat que toutes les thèses psychologiques considèrent comme allant de soi la notion d'unité, il s'efforce, lui, de construire celle-ci à partir d'une conception neurophysiologique reposant sur l'**attention.** Celle-ci est conçue comme un principe organisateur indépendant de la sensation et aboutissant, par abstraction empirique, à des patrons figuraux (spatiaux ou temporels).

Vers trois ans, les étiquettes verbales séquentielles se trouveraient associées à ces patrons figuraux par le biais de l'aperception globale immédiate (subitizing) dont on sait (cf. Antell et Keating, ibid. ; Strauss et Curtis, ibid.) qu'elle est très précoce et indépendante, pour les petits nombres, de la disposition spatiale. A cette association sémantique entre nom de nombre et totalité figurale dotée de caractéristiques de numérosité s'ajouterait très vite le fait que le comptage aboutit, toujours avec les petites collections, à ce que le dernier nom de nombre émis correspond précisément au mot associé préalablement à la totalité. L'enfant aurait ainsi, par coordination de l'énumération verbale avec la dénomination de configurations numériques (subitizing) pour lesquelles la conservation ne pose pas de problème, une première expérience de la **cardinalité**. Le nombre deviendrait ainsi une unité d'unités.

Cette conception très récente n'a pas encore donné lieu à des investigations empiriques susceptibles de l'étayer. Elle a néanmoins l'avantage d'offrir une synthèse permettant de dépasser la contradiction entre vérités empirique et notionnelle. Il faut toutefois bien voir que, si les faits devaient confirmer sa pertinence, elle soulèverait un nouveau problème, celui relatif à l'explication des réactions de non-conservation observées jusqu'à cinq-six ans !

## IV. — CONCLUSION

Les travaux menés au cours de la dernière décennie ont quelque peu bouleversé la conception de l'acquisition du nombre et de la numération telle qu'elle ressortait des recherches menées par Piaget. Les activités de dénombrement, le développement de la série verbale des nombres ont à nouveau retenu l'attention des chercheurs alors même que les notions d'invariance et de correspondance terme à terme perdaient un peu de leur intérêt.

Il semble clair aujourd'hui que, très tôt, l'enfant compte et sait utiliser cette activité de manière pertinente et adaptée en suivant les règles de base qui sont celles utilisées par ses aînés. Il apparaît aussi évident *que ce qui pose problème c'est* la coordination, la gestion simultanée des différentes composantes impliquées par telle ou telle activité particulière de dénombrement.

En somme, l'enfant, même *très jeune* (*trois, quatre* ans) disposerait de toutes les « compétences » nécessaires mais se heurterait à des difficultés liées à la mise en œuvre procédurale. Celles-ci proviendraient soit de ce que la capacité de traitement de l'information serait encore trop réduite (Pascual-Leone, 1970) soit de la trop grande charge cognitive imposée par la gestion de procédures non encore automatisées (Case, 1978, 1982) soit *des deux*. Les progrès résulteraient donc de l'accroissement de la capacité générale et/ou de la « routinisation » des procédures, l'enfant disposant alors d'un « espace mental » suffisant *pour coordonner* et *gérer simultanément les diverses composantes*.

L'importance des automatismes — si souvent décriés — se retrouve soulignée en ce qui concerne le comptage mental. Là encore, on observe un passage de procédures *d'additions et soustractions coûteuses en temps* et *en* charge cognitive à des modes d'accès directs aux résultats stockés en mémoire à long terme. Et il est vraisemblable que le recours à cette seconde méthode, *outre qu'il accélère les résolutions, libère de* « l'espace-mental » pour représenter les situations-problèmes (2).

Encore que la plupart des chercheurs ne se préoccupent pas des incidences de leurs découvertes *sur la pratique enseignante, certaines implications apparaissent* néanmoins évidentes. En premier lieu, s'il est actuellement très difficile d'envisager comment on peut aider les enfants à coordonner les différentes opérations à mettre en œuvre, *au moins* peut-on essayer de construire des tâches n'exigeant pas un trop grand nombre de coordinations et imposant une charge cognitive telle que le sujet se trouve mis en situation d'échec. En second lieu, l'exercice systématique des composantes, parce qu'il aboutit à une automatisation, à une gestion de routine ne requérant plus d'attention, retrouve un *certain intérêt : « l'espace mental » ainsi libéré* devient disponible pour assurer une meilleure gestion de l'ensemble de la tâche. En troisième lieu, les résultats concordants obtenus par plusieurs chercheurs démontrent que *l'auto-évaluation se révèle d'autant* meilleure que les sujets sont plus « habiles » dans une épreuve d'un type donné (cf. Newman, ibid.). Il convient donc de rester prudent dans le recours à cette procédure et cela d'autant plus que les enfants sont jeunes. Enfin, mais là les problèmes s'avèrent multiples et mal délimités, les formulations verbales elles-mêmes (consignes, énoncés, *questions*...) doivent être manipulées avec précautions. Malheureusement, seul le tâtonnement permet, pour l'heure, une adaptation aux élèves.

Comme le note Ginsburg (1978) en ce qui concerne les mathématiques : « Cross-cultural *research* suggest universal cognitive capacities. Why do schools fail to exploit them ? ». Et, effectivement, le bilan que nous avons présenté amène à se demander, comment et *pourquoi, compte tenu des « habiletés » précoces décelées chez les enfants*, l'apprentissage des mathématiques peut être difficile !

Michel FAYOL
*professeur de psychologie*
Université de Dijon

(2) Comme tend à le montrer une série d'expériences menées dans notre laboratoire au cours de ces dernières années (Fayol et Abdi, à paraître).

**Bibliographie**


ANTELL (S.E.), KEATING (D.P.). — Perception of numerical invariance in neonates, **Child Development**, 1982, **54**, 695-701.

ASHCRAFT (M.H.). — The development of mental arithmetic : a chronometric approach, **Developmental Review**, 1982, **2**, 213-236.

ASHCRAFT (M.H.), BATTAGLIA (J.). — Cognitive arithmetic : evidence for retrieval and decision processes in mental addition, **Journal of Experimental Psychology : Human Learning and Memory**, 1978, **4** (5), 527-538.

ASHCRAFT (M.H.), FIERMAN (B.A.). — Mental addition in third, fourth, and sixth graders, **Journal of Experimental Child Psychology**, 1982, **33**, 216-234.

BASTIEN (C.), BOVET (P.). — La découverte du parcours ordonné par l'enfant, **Enfance**, 1980, n° 3, 123-133.

BEDNARZ (N.), JANVIER (B.). — The understanding of numeration in primary school, **Educational Studies in Mathematics**, 1982, **13**, 33-57.

BIDEAUD (J.). — Nombre, sériation, inclusion : irrégularités du développement et perspectives de recherche, **Bulletin de Psychologie**, 1979-1980, **33** (345), 659-665.

BRAINERD (C.J.). — Young children's mental arithmetic errors : a working memory analysis, **Child Development**, 1983, **54**, 812-830.

CARPENTER (T.P.), HIEBERT (J.), MOSER (J.M.). — Problem structure and first grade children's initial solution processes for simple addition and substraction problems, **Journal for Research in Mathematical Education**, 1981, **12** (1), 27-39.

CARPENTER (T.P.), MOSER (J.M.). — The development of addition and subtraction problem-solving skills, in T.P. CARPENTER, J.M. MOSER & T.A. ROMBERG (Eds.), **Addition and subtraction : a cognitive perspective**, Hillsdale : Erlbaum, 1982.

CASE (R.). — Intellectual development from birth to adulthood : a neo-piagetian interpretation, in R.S. SIEGLER (Ed.), **Children's thinking : what develops**, Hillsdale : Erlbaum, 1978.

CASE (R.). — General developmental influences on the acquisition of elementary concepts and algorithms in arithmetic, in T.P. CARPENTER, J.M. MOSER & T.A. ROMBERG (Eds.), **Addition and subtraction : a cognitive perspective**, Hillsdale : Erlbaum, 1982.

CASE (R.), KURLAND (D.M.), GOLDBERG (J.). — Operational efficiency and the growth of short-term memory span, **Journal of Experimental Child Psychology**, 1982, **33**, 386-404.

COMITI (C.). — Les premières acquisitions de la notion de nombre par l'enfant, **Educational Studies in Mathematics**, 1980, **11**, 301-318.

DANSEREAU (D.F.), GREGG (L.W.). — An information processing analysis of mental multiplication, **Psychonomic Science**, 1966, **6** (2), 71-72.

DESCŒUDRES (A.). — **Le développement de l'enfant de deux à sept ans**, Neuchâtel, Paris : Delachaux & Niestlé, 1921, éd. 1946.

DEMPSTER (F.N.). — Memory span : sources of individual and developmental differences, **Psychological Bulletin**, 1981, **89** (1), 63-100.

D'MELLO (S.), WILLEMSEN (E.). — The development of the number concept : a scalogram analysis, **Child Development**, 1969, **40**, 681-688.

FINDLAY (J.M.). — What form of memory do schoolchildren use whilst performing mental arithmetic, in M.M. GRUNEBERG, P.E. MORRIS & R.N. SYKES (Eds.), **Practical aspects of memory**, New York : Academic Press, 1978.

FISCHER (J.P.). — La perception des problèmes soustractifs aux débuts de l'apprentissage de la soustraction, Université Nancy I, Thèse de Doctorat de Troisième Cycle, 1979, ronéo.

FLAVELL (J.H.). — **Cognitive development**, Englewood Cliffs : Prentice Hall, 1977.

FUSON (K.C.), HALL (J.W.). — The acquisition of early number word meanings : a conceptual analysis and review, in H.P. GINSBURG (Ed.), **The development of mathematical thinking**, New York : Academic Presse, 1983.

FUSON (K.C.), RICHARD (J.), BRIARS (D.J.). — The acquisition and elaboration of the number word sequence, in C.J. BRAINERD (Ed.), **Progress in cognitive development**, volume 1, New York : Springer Verlag, 1982.

FUSON (K.C.), SECADA (W.G.), HALL (J.W.). — Matching, counting, and conservation of numerical equivalence, **Child Development**, 1983, **54**, 91-97.

GELMAN (R.). — How young children reason about small numbers, in N.J. CASTELLAN, D.B. PISONI & G.R. POTTS (Eds.), **Cognitive theory**, volume 2, Hillsdale : Erlbaum, 1977.

GELMAN (R.). — Counting in the preschooler : what does and does not develop, in R.S. SIEGLER (Ed.), **Children's thinking : what develops**, Hillsdale : Erlbaum, 1978.

GELMAN (R.). — Les bébés et le calcul, **La Recherche**, 1983, **14** (149), 1382-1389.

GELMAN (R.), GALLISTEL (C.R.). — **The child's understanding of number**, Cambridge : Harvard University Press, 1978.

GELMAN (R.), MECK (E.). — Preschoolers' counting : principles before skill, **Cognition**, 1983, **13**, 343-359.

GEORGE (C.), RICHARD (J.F.). — Contributions récentes de la psychologie de l'apprentissage à la pédagogie, **Revue Française de Pédagogie**, 1982, n° 58, 67-90.

GINSBURG (H.P.). — **Children's arithmetic : the learning process**, New York : Van Nostrand, 1977.

GINSBURG (H.P.). — Poor children, african mathematics, and the problem of schooling, **Educational Research Quarterly**, 1978, **2** (4), 26-44.

GINSBURG (H.P.). — The development of addition in the context of culture, social class and race, in T.P. CARPENTER, J.M. MOSER & T.A. ROMBERG (Eds.), **Addition and subtraction : a cognitive perspective**, New York : Academic Press, 1982.

GLASERSFELD (E. von). — An attentional model for the conceptual construction of units and number, **Journal for Research in Mathematics Education**, 1981, **12** (2), 83-94.

GLASERSFELD (E. von). — Subitizing : the role of figural patterns in the development of numerical concepts, **Archives de Psychologie,** 1982, **50,** 191-218.

GONZALEZ (E.G.), KOLERS (P.A.). — *Mental manipulation* of arithmetic symbols, **Journal of Experimental Psychology : Learning, Memory and Cognition,** 1982, **8** (4), 308-319.

GRECO (P.). — Quantité et quotité, in P. GRECO & A. MORF, **Structures numériques élémentaires,** Paris : PUF, 1962.

GRECO (P.). — Une recherche sur la commutativité de l'addition, in P. GRECO & A. MORF, **Structures numériques élémentaires,** Paris : PUF, 1962.

GREENO (J.G.), RILEY (M.S.), GELMAN (R.). — *Conceptual competence and children's counting,* **Cognitive Psychology,** 1984, **16,** 94-143.

*GROEN (G.J.),* PARKMAN (J.M.). — A chronometric analysis of simple addition, **Psychological Review,** 1972, **79** (4), 329-343.

GROEN (G.J.), RESNICK (L.B.). — Can preschool children invent addition algorithms ?, **Journal of Educational Psychology,** 1977, **69** (6), 645-662.

HAMILTON (J.M.E.), SANFORD (A.J.). — The symbolic distance effect for alphabetic order judgements : a subjective *report and reaction time analysis,* **Quarterly Journal of Experimental Psychology,** 1978, **30,** 33-43.

HITCH (G.J.). — The role of short-term memory in mental arithmetic, **Cognitive Psychology,** 1978, **10,** 302-323.

HITCH (G.J.), ARNOLD (P.), PHILLIPS (L.J.). — Counting processes in deaf children's arithmetic, **British Journal of Psychology,** 1983, **74,** 429-437.

HOULIHAN (D.M.), GINSBURG (H.P.). — The addition methods of first and second grade children, **Journal of Research in Mathematics Education,** *1981,* **12** *(2), 95-106.*

HUDSON (T.). — Correspondences and numerical differences between disjoint sets, **Child Development,** 1983, **54,** 84-90.

HUNTER (I.M.L.). — The role of memory in expert mental calculations, in M.M. GRUNEBERG, P.E. MORRIS & R.N. SYKES (Eds.), **Practical aspects of memory,** New York : Academic Press, 1978.

KINGMA (J.), KOOPS (W.). — On the sequentiality of ordinality and cardinality, **International Journal of Behavioral Development,** 1981, **4,** 391-402.

*KINGMA (J.), ROELINGA (U.). — Cardinal equivalence of small number in young* children. **Perceptual and Motor Skills,** 1982, **54,** 1023-1037.

LEMOYNE (G.), VINCENT (S.). — Intégration en mémoire de la suite des nombres naturels chez les enfants de première année, **Cahiers de Psychologie Cognitive,** 1982, **33,** 227-258.

LEPLAT (J.), PAILHOUS (J.). — Quelques remarques sur l'origine des erreurs, **Bulletin de Psychologie,** 1974, **27** *(312), 729-736.*

LESH (R.), LANDAU (M.). — **Acquisition of mathematic concepts and processes,** New York : Academic Press, 1983.

LIFSCHITZ (M.), LANGFORD (P.E.). — The role of counting and measurement in conservation learning, **Archives de Psychologie,** 1977, **45,** 1-14.

MELJAC (C.). — **Décrire, agir et compter,** Paris : PUF, 1979.

MILLER (K.), GELMAN (R.). — The child's representation of number : a multidimensional scaling analysis, **Child Development,** 1983, **54,** 1470-1479.

*MILLER (K.), PERLMUTTER (M.), KEATING (D.). — Cognitive arithmetic : comparison of operations,* **Journal of Experimental Psychology : Learning, Memory, and Cognition,** 1984, **10** (1), 46-60.

NAIRNE (J.S.), HEALY (A.F.). — Counting backward produces systematic errors, **Journal of Experimental Psychology : General,** 1983, **112** (1), 37-40.

NEWMAN (R.S.). — Children's numerical skill and judgements of confidence in estimation, **Journal of Experimental *Child Psychology*,** *1984,* **37,** *107-123.*

PARKMAN (J.M.). — Temporal aspects of simple multiplication and comparison, **Journal of Experimental Psychology,** 1972, **95** (2), 437-444.

PASCUAL-LEONE (J.). — A mathematical model for the transition rule in Piaget's developmental stages, **Acta Psychologica,** 1970, **32,** 301-345.

PIAGET (J.). — **L'équilibration des structures cognitives,** *Paris : PUF, 1975.*

PIAGET (J.), SZEMINSKA (A.). — **La genèse du nombre chez l'enfant,** Neuchâtel, Paris : Delachaux & Niestlé, 1941.

*POLLIO (H.R.), REINHART (D.). — Rules and counting behavior,* ***Cognitive Psychology,*** *1970, 1, 388-402.*

POLLIO (H.R.), WHITACRE (J.D.). — Some observations on the use of numbers by preschool children, **Perceptual and Motor Skills,** 1970, **30,** 167-174.

POTTER (M.C.), LEVY (E.I.). — Spatial enumeration without counting, **Child Development,** 1968, **39,** 265-272.

RESNICK (L.B.). — A developmental theory of number understanding, in H.P. GINSBURG (Ed.), **The development of mathematical thinking,** New York : Academic Press, 1983.

RIBEAUPIERRE (A. de). — Application d'un modèle néo-piagétien à l'étude du stade des opérations formelles, **Bulletin *de Psychologie*,** *1979-1980,* **33** *(345), 699-709.*

RIBEAUPIERRE (A. de). — Un modèle néo-piagétien du développement : la théorie des opérateurs constructifs de Pascual-Leone, **Cahiers de Psychologie Cognitive,** 1983, **3** (3), 327-356.

RICHARD (J.F.), — Mémoire et résolution de problèmes, **Revue Française de Pédagogie,** 1982, n° 60, 9-17.

RILEY (M.S.), GREENO (J.G.), HELLER (J.I.). — Development of children's problem-solving ability in arithmetic, in H.P. GINSBURG (Ed.), **The development of mathematical thinking,** *New York : Academic Press, 1983.*

RUSSELL (R.L.). — Addition strategies of third grade children, **Journal of Children's Mathematical Behavior,** 1977, **1** (2), 149-160.

SAXE (G.). — Developmental relations between notational counting and number conservation, **Child Development,** 1979, **50,** 180-187.

SAXE (G.), POSNER (J.). — The development of numerical cognition : cross-cultural perspectives, in H.P. GINSBURG (Ed.), **The development of mathematical thinking,** New York : Academic Press, 1983.

SAXE (G.), SICILIAN (S.). — Children's interpretation of their counting accuracy : a developmental analysis, **Child Development,** 1981, **52,** 1330-1332.

SCHAEFFER (B.), EGGLESTON (V.H.), SCOTT (J.L.). — Number development in young children, **Cognitive Psychology,** 1974, **6,** 357-379.

SECADA (W.G.), FUSON (K.C.), HALL (J.W.). — The transition from counting-all to counting-on in addition, **Journal for Research in Mathematics Education,** 1983, **14,** 47-57.

SEKULER (R.), MIERKIEWICZ (D.). — Children's judgments of numerical inequality, **Child Development,** 1977, **48,** 630-633.

SHANNON (L.). — Spatial strategies in the counting of young children, **Child Development,** 1978, **49,** 1212-1215.

SIEGEL (L.S.). — Le jeune enfant est-il vraiment pré-opératoire ? **Bulletin de Psychologie,** 1979-1980, **33** (345), 637-644.

SIEGLER (R.S.), ROBINSON (M.). — The development of numerical understanding, in H.W. REESE & L.P. LIPSITT, **Advances in child development and behavior,** vol. 16, New York : Academic Press, 1982.

STRAUSS (M.S.), CURTIS (L.E.). — Infant perception of numerosity, **Child Development,** 1981, **52,** 1146-1152.

SVENSON (O.). — Analysis of time required by children for simple additions, **Acta Psychologica,** 1975, **39,** 289-302.

SVENSON (O.), HEDENBORG (M.L.). — Strategies used by children when solving simple subtractions, **Acta Psychologica,** 1979, **43,** 477-489.

SVENSON (O.), SJÖBERG (K.). — Solving simple subtractions during the first three school years, **Journal of Experimental Education,** 1982.

SVENSON (O.), SJÖBERG (K.). — Evolution of cognitive processes for solving simple additions during the first three school years, **Scandinavian Journal of Psychology,** 1983, **24,** 117-124.

VAN LEHN (K.). — On the representation of procedures in repair theory, in H.P. GINSBURG (Ed.), **The development of mathematical thinking,** New York : Academic Press, 1983.

VERGNAUD (G.), ERRECALDE (P.). — **La coordination de l'enseignement des mathématiques entre le CM 2 et la classe de sixième,** Paris : INRP, 1979.

VERGNAUD (G.). — A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and substraction problems, in T.P. CARPENTER, J.M. MOSER & T.A. ROMBERG (Eds.), **Addition and subtraction : a cognitive perspective,** Hillsdale : Erlbaum, 1982.

VERGNAUD (G.). Multiplicative structures, in R. LESH & M. LANDAU (Eds.), **Acquisition of mathematics concepts and processes,** New York : Academic Press, 1983.

WANG (M.C.), RESNICK (L.B.), BOOZER (R.F.). — The sequence of development of some early mathematics behavior, **Child Development,** 1971, **42,** 1767-1778.

WILKINSON (A.C.). — Children's partial knowledge of the cognitive skill of counting, **Cognitive Psychology,** 1984, **16,** 28-64.

WINKELMAN (J.H.), SCHMIDT (J.). — Associative confusions in mental arithmetic, **Journal of Experimental Psychology,** 1974, **102** (4), 734-736.

WOODS (S.S.), RESNICK (L.B.), GROEN (G.J.) — An experimental test of five process models for subtraction, **Journal of Educational Psychology,** 1975, **67,** 17-21.

ZAZZO (R.), GILLY (M.), VERBA-RAD (M.). — **Nouvelle échelle métrique de l'intelligence,** Tomes 1 & 2. Paris : Colin, 1966.