Homomorphismes réel-représentation et signifié-signifiant

Exemples en mathématiques

Gérard VERGNAUD

CNRS, GR Didactique
46, rue Saint-Jacques
75005 Paris, France.

Texte transcrit par Philippe Prévost

Le texte de l'exposé de Gérard Vergnaud peut sembler à première vue s'écarter du thème de ce dossier. En évoquant de façon très transversale la question de la représentation, il replace le cas des cartes de concepts dans un ensemble plus large. Ce qui lui permet de mettre au jour des interrogations fortes, comme celle du rapport entre le réel et sa représentation, ou encore les différences entre représentation et symbolisation.

De plus, en illustrant cet exposé de nombreux exemples empruntés aux mathématiques, il souligne pourquoi la possibilité de disposer de plusieurs représentations (ou symbolisations), différentes mais homomorphes, peut devenir un atout. Ces représentations autorisent en effet plusieurs cheminements, par exemple pour une résolution de problèmes, qui diffèrent les uns des autres. Les cartes conceptuelles apparaissent ainsi comme un nouvel épisode d'une préoccupation permanente chez les didacticiens : disposer d'une panoplie aussi large que possible pour aider des apprenants à s'approprier des langages ou des procédures.

P. Prévost et D. Jacobi

Pages 25-34 Didaskalia - n° 5 - 1994

Résumé

Situant les représentations spatiales des concepts scientifiques dans le cadre plus général de la représentation conceptuelle, l'auteur souligne l'importance du concept d'homomorphisme dans l'analyse des rapports entre le réel et sa représentation, tant dans la conceptualisation que dans la symbolisation.

L'auteur s'interroge en particulier sur la fonctionnalité des représentations spatiales de concepts scientifiques. D'une part, il relie le problème de la sélection des éléments avec les opérations de pensée nécessaires à la lecture d'une représentation graphique. D'autre part, il pose le problème de la relation entre l'organisation de la représentation spatiale d'un concept scientifique et le rapport signifiant/signifié.

Mots clés : *concepts scientifiques, représentations spatiales, représentation conceptuelle, homomorphisme, conceptualisation, symbolisation, théorie de la représentation.*

Abstract

In this article, the author emphasizes that the concept of homomorphism is important for analyzing the relations between reality and its representation, as well as for graphic representations (concept maps and others) and other representations of scientific concepts.

The research adresses the functionnality of the spatial representations of scientific concepts. On one hand, the problem of selecting elements can be related with the thought operations necessary for reading a graphical representation. On the other hand, the relation between the organization of the graphical representation and the signifier/signified link poses a symbolization problem.

Key words : *scientific concepts, graphical representations, conceptual representation, homomorphism, conceptualization, symbolization, representation theory.*

Resumen

Situando las representaciones espaciales de conceptos científicos en el marco más general de la representación conceptual, el autor enfatiza la importancia del concepto de homomorfismo en el análisis de las relaciones entre lo real y su representación, tanto en la conceptualización como en la simbolización.

El autor se interroga en particular sobre la función de las representaciones espaciales de conceptos científicos. De una parte, él relaciona el problema de la selección de los elementos, con las operaciones de pensamiento necesarias en la lectura de una representación gráfica. Por otra parte, él plantea el problema de la relación entre la organización de la representación espacial de un concepto científico y la relación significante/significado.

Palabras claves *: conceptos científicos, representación conceptual, homomorfismo, conceptualización, simbolización, teoría de la representación.*

Pour une analyse rationnelle des rapports entre langage et pensée, entre représentations symboliques et conceptualisation, une théorie de la représentation aussi précise que possible est nécessaire.

Le concept d'homomorphisme, comme correspondance entre les éléments de l'ensemble d'arrivée et des classes d'éléments de l'ensemble de départ, est une clef de l'analyse des rapports entre réel et représentation conceptuelle, et des rapports entre signifié et signifiant.

Le concept d'homomorphisme a du sens à deux niveaux au moins :

– au niveau de la représentation en général, comme fonction psychologique : s'il n'y avait pas d'homomorphismes entre le réel et la représentation, celle-ci ne serait pas fonctionnelle ;

– au niveau du rapport signifié/signifiant : dans une représentation spatiale ou une représentation langagière, il faut savoir quelles propriétés du signifiant représentent quelles propriétés du signifié.

		COULEURS		
		jaune	bleu	rouge
FORMES	carré			
	rond			
	triangle			
	rectangle			

Classes d'objets possibles

Figure 1 : **Un exemple de tableau à double entrée : la classification croisée**

Ainsi, dans les représentations spatiales de concepts scientifiques, le rapport signifiant/signifié peut être traité en terme d'homomorphismes.

La métaphore spatiale introduit les propriétés de l'espace que sont les alignements, les directions, l'orthogonalité, l'ordre et la mesure ainsi que les symétries, le centre et la périphérie, etc. Certaines représentations peuvent utiliser plusieurs de ces propriétés.

Par exemple, une classification à double entrée utilise les alignements ligne-ligne et colonne-colonne, ainsi que l'orthogonalité et l'indépendance (figure 1).

Il en va de même pour la représentation de la double proportionnalité qui utilise l'espace. Dans un lycée professionnel, avec des élèves du bâtiment, on peut montrer les propriétés de la double proportionnalité à l'aide du diagramme commutatif ci-dessous (figure 2). Si quatre ouvriers, en trois jours, font vingt-cinq mètres linéaires de fondation, combien font douze ouvriers en six jours ? On utilise à la fois le fait qu'apparaissent verticalement des durées, horizontalement des nombres d'ouvriers, et à l'intérieur, la longueur de la fondation fabriquée, fonction des deux autres variables, indépendantes entre elles.

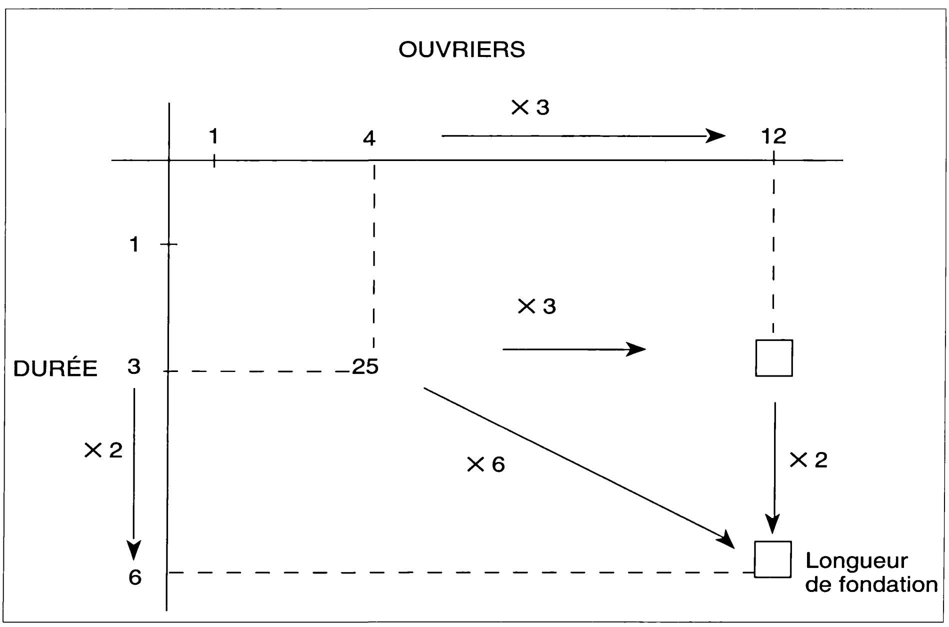

Figure 2 : **Un autre exemple : la proportionnalité double**

Avec cet exemple, on utilise un peu plus que les seules propriétés de l'espace puisque, sur cet espace, il y a un calcul relationnel, c'est-à-dire un raisonnement. Il est alors utile de distinguer dans les fonctions du signifiant l'aide à la sélection des informations et l'aide à l'organisation des relations : la seconde est une aide au raisonnement. La représentation spatiale va non seulement aider à représenter les relations, mais elle va aider aussi au passage de la représentation du problème à celle de sa solution.

Dans la représentation spatiale d'un concept, il n'y a pas que l'espace qui est concerné parce qu'il y a également présence de traits, de flèches, de pavés (ou étiquettes) ronds, ovales ou rectangulaires. De même, des problèmes de voisinage peuvent induire certaines idées, qui sont utilisées consciemment ou inconsciemment. On peut avoir ainsi des effets pervers de l'espace. Dans un grand nombre de représentations spatiales utilisées en psychologie cognitive, on peut se poser la question de savoir si elles sont vraiment utiles. Parfois les propriétés de symétrie piègent l'auteur. On dispose par exemple à gauche et à droite des éléments qui n'ont guère de rapports, et on fait une mauvaise lecture de ces éléments.

Enfin, dans les cartes et autres représentations spatiales, les mots et les énoncés pèsent d'un certain poids. Si les propositions ou les énoncés sont susceptibles de vérité ou de fausseté, ce n'est pas le cas des mots. Et un mot ne résume pas toutes les propriétés d'un concept. De ce point de vue, les trames conceptuelles, qui utilisent beaucoup d'énoncés, et les cartes conceptuelles, qui n'utilisent guère que des mots, ne sont pas équivalents. On ne dit pas en général ce que le lecteur doit retenir ou comprendre des mots.

Des cartes, pour quoi faire ?

L'utilisation des représentations spatiales demande qu'on s'interroge sur leur fonctionnalité.

À titre d'exemples, en mathématiques, certains schémas résument assez bien les différentes relations d'addition et de soustraction.

Dans les représentations ci-après (figure 3), la première exprime la réunion de deux parties en un tout, la seconde la transformation par augmentation ou diminution d'un état initial, la troisième la relation de comparaison entre un référé et un référent. Les autres représentent la composition de deux transformations, la composition de deux relations et la transformation d'une relation. Avec ces schémas, on fait à peu près le tour de toutes les relations de base dans le domaine de l'addition et de la soustraction. La représentation spatiale contribue à faire comprendre le cadre théorique qui permet de rendre compte du cheminement des enfants dans le processus de conceptualisation des structures additives, car elle montre comment les enfants saisissent progressivement certaines relations et pas d'autres et, pour une même relation, certaines classes de problèmes et pas d'autres.

Mais pourquoi cette représentation est-elle symétrique ? La disposition sur une même ligne des relations II et III, ou IV et V, n'était pas une obligation.

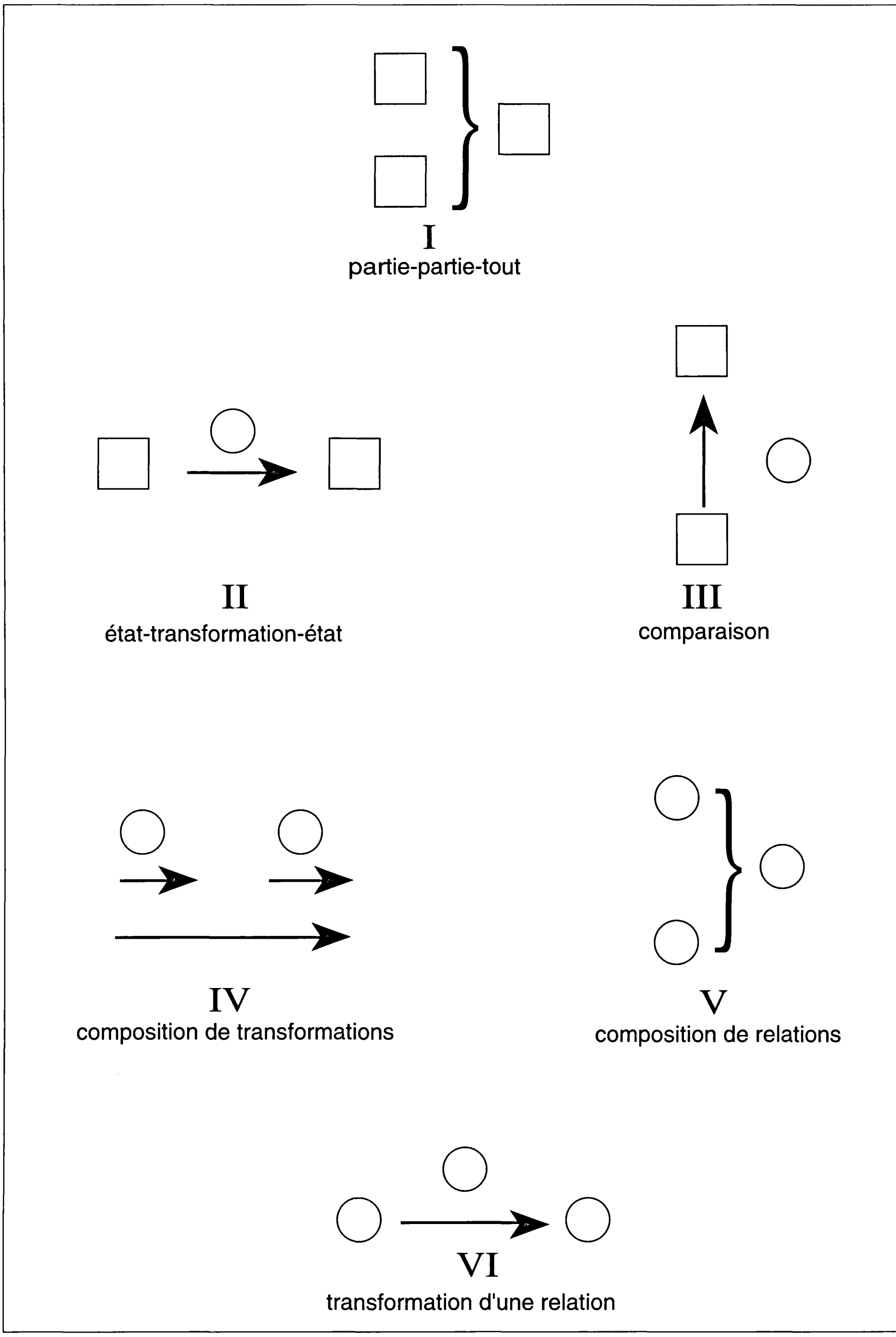

Figure 3 : Les six relations additives de base

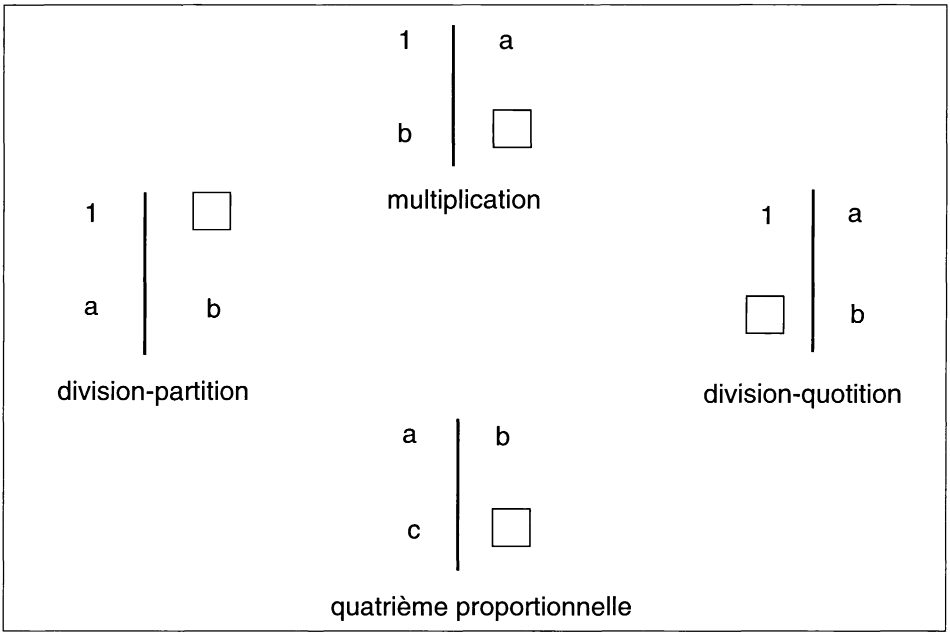

Figure 4 : **Les quatre catégories de problèmes dans la proportion simple**

Prenons un autre exemple, celui de la proportionnalité simple (figure 4) :

– la multiplication se trouve en haut avec deux variables proportionnelles l'une à l'autre. Par exemple, un gâteau coûte 3 F, combien coûtent 6 gâteaux ?

– les deux catégories de divisions sont placées sur la ligne suivante. À gauche, la recherche d'une valeur unitaire, ou partition (j'ai acheté 5 gâteaux pour 30 F, combien coûte chaque gâteau ?), à droite la quotition (un gâteau coûte 6 F, j'ai 24 F, combien puis-je acheter de gâteaux ?).

Et je place toujours au-dessous la recherche d'une quatrième proportionnelle, pour des raisons de symétrie.

La contingence joue son rôle dans ce travail de représentation spatiale. On fait des catégorisations et on essaie de les résumer dans l'espace sous une forme laconique, mais il y a une part non négligeable de contingence.

L'espace graphique permet sans nul doute de représenter certains concepts plus aisément : par exemple, l'ordre total et l'ordre partiel. Le formalisme de l'ordre partiel transitif mais non connexe, est très lourd ; l'espace est une ressource intéressante pour représenter la notion d'ordre partiel.

Dans un modèle développemental comme celui représenté à la figure 5, on comprend que la compétence E et la compétence F s'appuient toutes les deux sur la compétence A, que la compétence E ne s'appuie pas sur la compétence B, que la compétence F s'appuie à la fois sur A et sur B, et H sur G, E, C et A, bien que E et G soient des compétences indépendantes.

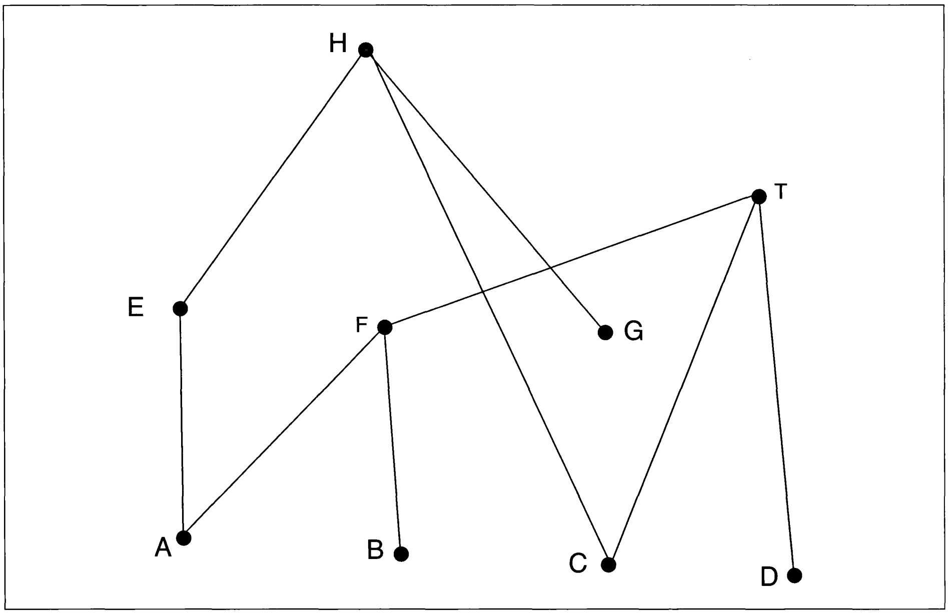

Figure 5 : **Un exemple d'ordre partiel : la formation des compétences**

Ainsi, les représentations spatiales aident dans de nombreux cas à visualiser des concepts, mais deux problèmes se posent dans la représentation spatiale des concepts scientifiques : celui de la sélection des éléments et celui de l'établissement de liens, autrement dit de l'organisation.

La sélection et l'organisation des éléments

C'est un besoin général de la représentation que d'être sélective. L'espace aide certainement à sélectionner ce qui est pertinent ; mais encore faut-il que l'on retienne ni trop, ni trop peu. Quand on regarde certaines cartes conceptuelles, on a des doutes. Il me paraît donc indispensable d'analyser à chaque fois ce qui est retenu, ce qui ne l'est pas, ce qui est opératoire, etc.

La sélection est une caractéristique très générale de la pensée, qui vaut à la fois pour l'action, l'expression linguistique et l'expression graphico-spatiale. Elle s'effectue à trois niveaux au moins.

– La prise d'information sur le réel : en situation, nous sélectionnons une très petite partie de l'information, celle qui est pertinente. Ce sont les invariants opératoires, les concepts en acte et théorèmes en acte, qui assurent cette sélection de l'information pertinente et son traitement.

– La forme linguistique de la connaissance : on n'exprime pas tout ce qu'on a retenu dans la perception et dans l'action. Les mots ne disent pas tout de la pensée. Par exemple, pour les structures additives, on peut faire la liste d'une bonne quinzaine de concepts indispensables pour comprendre la manière dont les élèves traitent les problèmes en situation. Mais on ne retient pas cette quinzaine de concepts lorsqu'on parle des structures additives à l'école élémentaire. On n'en retient que trois ou quatre. Par exemple les relations de comparaison quantifiées existent quand on écoute les enfants parler entre eux. Mais on n'en parle pas et on ne les représente pas à l'école. Quand un enfant utilise l'imparfait pour un état initial et le présent pour un état final, l'opposition entre les temps verbaux suffit pour indiquer qu'il s'agit de l'état initial et de l'état final. Mais l'étiquetage état initial/état final est une nominalisation qui n'est pas faite habituellement en classe.

- La représentation spatiale : elle introduit une sélection supplémentaire en même temps qu'elle modifie le rapport signifiant/signifié. On sait aujourd'hui qu'il y a une énorme ambiguïté sur ce que signifient les représentations graphiques pour les enfants de l'école primaire et du collège, à commencer par le fait qu'un point n'est pas mesurable et qu'il y a quelque paradoxe à représenter une donnée numérique par un point. On ne sait faire cela que depuis Descartes ; les enfants n'ont pas de raison de réinventer Descartes seuls. L'une des questions est de savoir quelles opérations de pensée sont nécessaires pour lire une représentation spatiale.

Quant à **l'organisation de la représentation spatiale**, elle renvoie au problème général du rapport signifiant/signifié. Quelles propriétés du signifiant représentent quelles propriétés du signifié ; et parmi ces propriétés, lesquelles sont vraiment utiles dans l'apprentissage ?

Cette question ne pourra jamais être abordée tant que l'on ne distinguera pas, dans la représentation, la référence aux objets et la référence aux situations. Dans le triangle épistémologique classique (figure 6), on distingue l'objet réel, la représentation de l'objet, et le symbolisme associé à la représentation de l'objet. Les objets ont des propriétés, des relations avec d'autres objets, s'intègrent dans des systèmes, et sont soumis à des transformations.

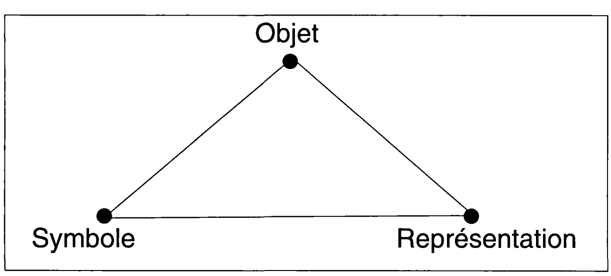

Figure 6 : **Le triangle épistémologique classique**

Notre conceptualisation du réel est liée à notre action sur le réel et la référence aux objets est ainsi liée à l'action du sujet. Il est donc nécessaire de complexifier le triangle. Le réel doit être regardé non pas comme un simple ensemble d'objets munis de propriétés et de relations (c'est le discours habituel de la science), mais aussi comme un ensemble de situations. Il faut intégrer une vision du réel en termes de classes de situations. Mais les situations ne se laissent pas classer facilement ; pourtant si l'on n'a pas une double lecture du réel, comme un ensemble de situations et comme un ensemble d'objets, on ne peut pas comprendre les processus de conceptualisation qui accompagnent l'action sur le réel. Ainsi, plutôt qu'un triangle, il faut considérer quatre termes pour une théorie de la représentation (figure 7) :

– le réel fait d'objets et de situations,

– les invariants opératoires, concepts-en-acte et théorèmes-en-acte, contenus dans les schèmes et algorithmes que développe le sujet pour traiter les situations,

– les signifiés véhiculés par la langue et les autres représentations symboliques,

– les signifiants.

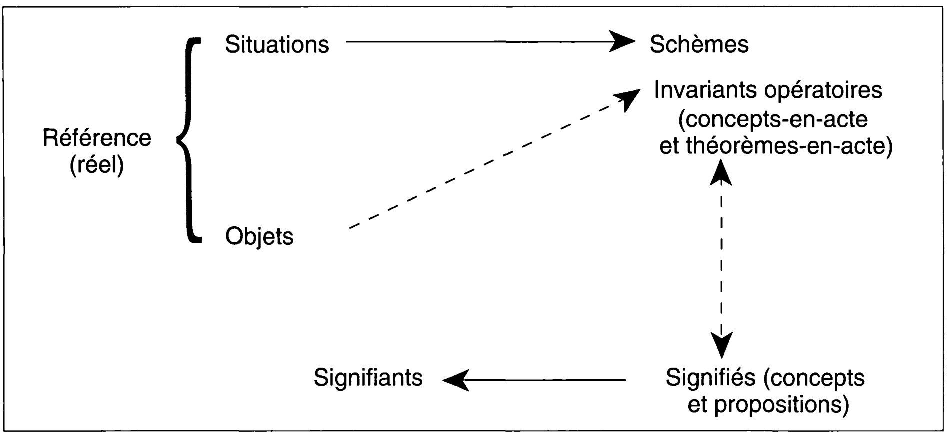

Figure 7 : **Une analyse alternative de la représentation**

Ces deux derniers termes sont étroitement interdépendants et forment des systèmes distincts selon qu'il s'agit de la langue ou de l'espace graphique. L'utilisation de représentations spatiales pose donc inévitablement le problème plus large de la conceptualisation, et des homomorphismes. La didactique appelle une théorie du fonctionnement et du développement cognitifs dans laquelle on puisse traiter convenablement, sans sophistication excessive, mais avec rigueur, la manière dont un sujet peut agir efficacement dans des situations données et la manière dont il peut être aidé pour cela, par les formes symboliques en usage dans la société et dans l'enseignement. Seule une théorie intégrée de la représentation peut répondre à cette exigence, mais cette théorie demande à être articulée autour de deux questions distinctes : la conceptualisation et la symbolisation. Le concept d'homomorphisme est indispensable pour les deux, mais les deux processus ne doivent pas être confondus, même si la symbolisation contribue à la conceptualisation, tout en la supposant.