



INSTITUT  
FRANÇAIS  
DE L'ÉDUCATION

# LA GÉOMÉTRIE DYNAMIQUE DANS LES DUOS D'ARTEFACTS TANGIBLES ET NUMÉRIQUES



Sophie Soury-Lavergne

Institut Français de l'Éducation ENS de Lyon

S2HEP Université de Lyon

Université Grenoble Alpes

Trois hypothèses sur l'apprentissage des mathématiques,

# What is knowledge?

Key role of problems in scientific knowledge :

*“Every knowledge is the answer to a question”* (Bachelard, 1938, p. 16, our translation)

The meaning of a knowledge is given by the situations in which this knowledge is involved and successfully used

Vergnaud (2009):

“problem-solving is the **source** and the **criteria** of knowledge”

Problems generate knowledge

Problems characterize and measure knowledge

# Connaissance, concept et conceptions

Définition pragmatique d'un concept par Vergnaud (2009) : ensemble de problèmes, ensemble de représentations et ensemble **d'invariants opératoires**

Rôle des schèmes, "*l'organisation invariante de la conduite pour une classe de situations*", les **invariants opératoires sont la composante épistémiques des schèmes.**

« *Au cœur de l'action, la conceptualisation* » (Vergnaud 2001)

Nécessité d'avoir un modèle des connaissances des élèves qui permette de rendre compte de « leur façon de savoir » (Balacheff 2013) de la même façon que pour toute connaissance :

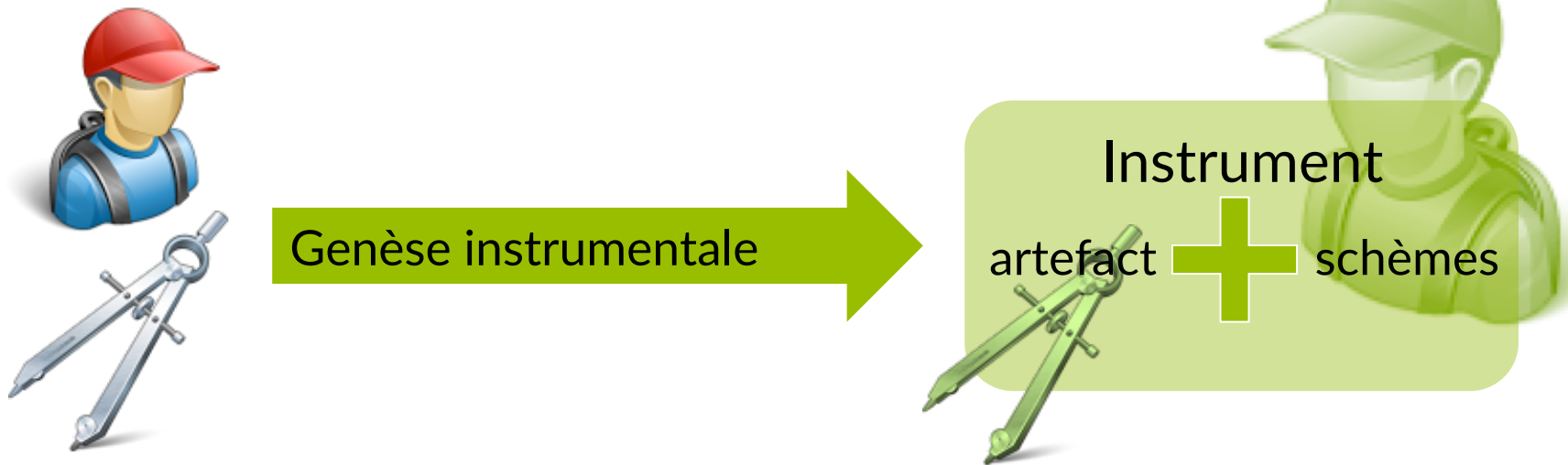
Hypothèses sur les connaissances des élèves : sujets rationnels, les connaissances peuvent apparaître contradictoires selon le moment ou le point de vue adopté mais sont cohérentes dans une sphère de pratique et ces connaissances sont de la même nature que toutes connaissances.

La proposition de Balacheff est d'utiliser "conception" pour modéliser toute connaissance mathématique d'un sujet élève, enseignant, mathématicien... par quatre ensembles : (1) problèmes, (2) représentations, (3) opérateurs et (4) contrôles

# Genèse instrumentale

La **genèse instrumentale**, transformation du sujet et de l'artefact en instrument : le **développement des schèmes** et **l'évolution de l'artefact**.

La fonction épistémique des schèmes : construction de connaissances et développement d'invariants opératoires.



# Rapport Instrument-Conception (Voltolini 2019)

## Instrument

### Artefact + Schèmes

Buts, sous-but  
Règles d'action,  
prises d'information  
et contrôles

Invariants  
opérateurs

Inférences

## Conception

P problèmes

R opérateurs

L systèmes de  
représentation

$\Sigma$  structure de  
contrôle

# Action, geste et “cognition incarnée”

Prise en compte du rôle de l’expérience corporelle dans la conceptualisation des mathématiques (Núñez et al. 1999):

La connaissance est le produit d’une activité humaine, fondée sur le langage et l’expérience corporelle.

Les gestes comme système sémiotique matérialisé, comme moyen d’exprimer les idées et concepts mathématiques, d’une manière analogue aux diagrammes et d’autres systèmes symboliques : « le discours et les gestes comme un seul processus intégré » (Mac Neill, 1995, notre traduction)

Mais aussi les gestes comme véritables éléments de pensée (Radford, 2009)

Dépasser la dualité entre le corps et la pensée :

“**Thinking is a body activity**” (Nemirovsky, 2009)

# Posons le problème

Si la connaissance, i. e. les conceptions, se développent

par les genèses instrumentales lors de l'utilisation des artefacts,  
via la construction des schèmes et de leur invariants opératoires

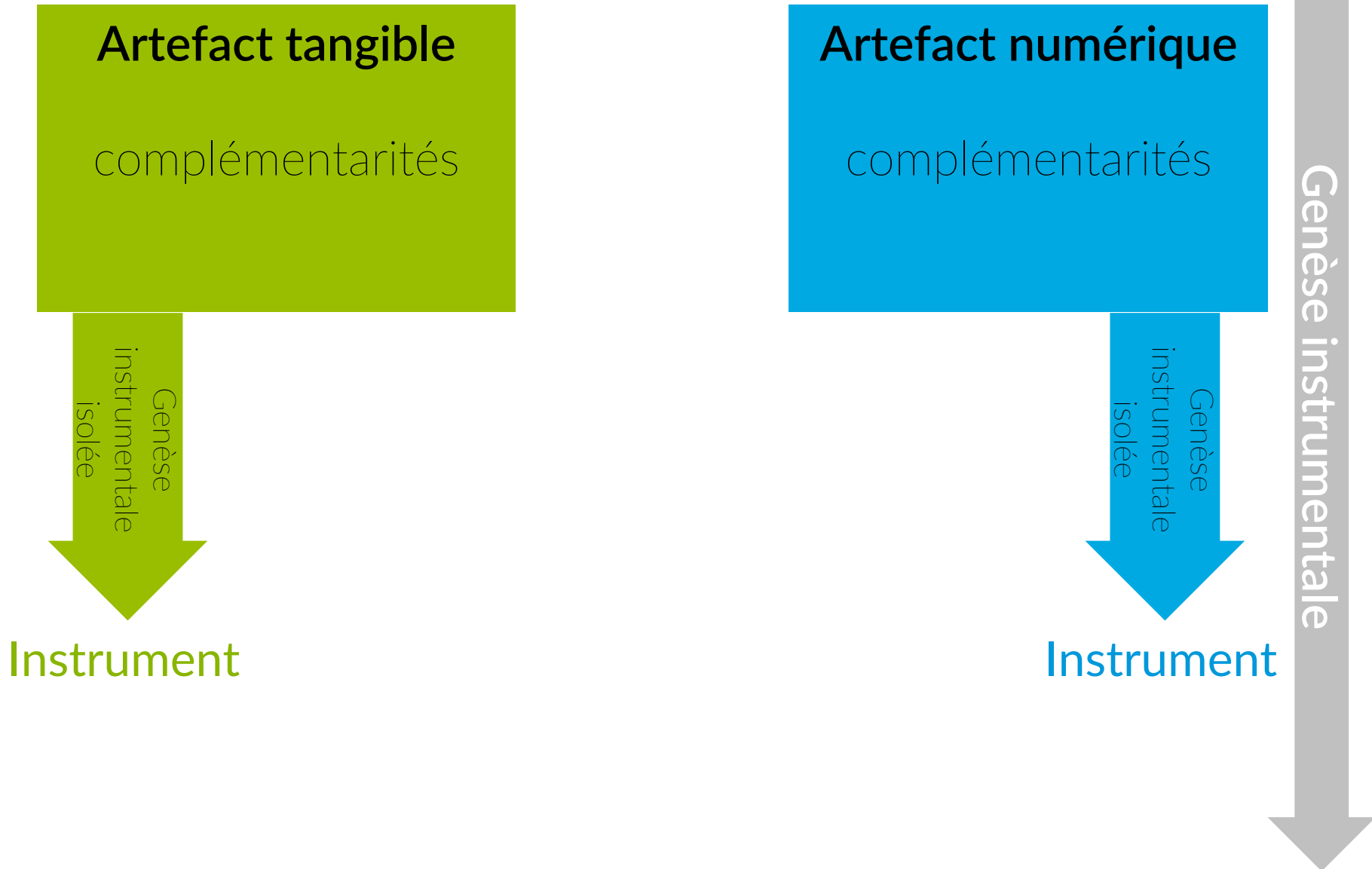
Par les expériences corporelles et les gestes, les gestes comme  
traces observables du développement des connaissances des  
élèves et comme moyen du développement.

Alors est-il utile de concevoir des situations didactiques  
qui combinent différents types d'artefacts, tangibles et  
numériques ?

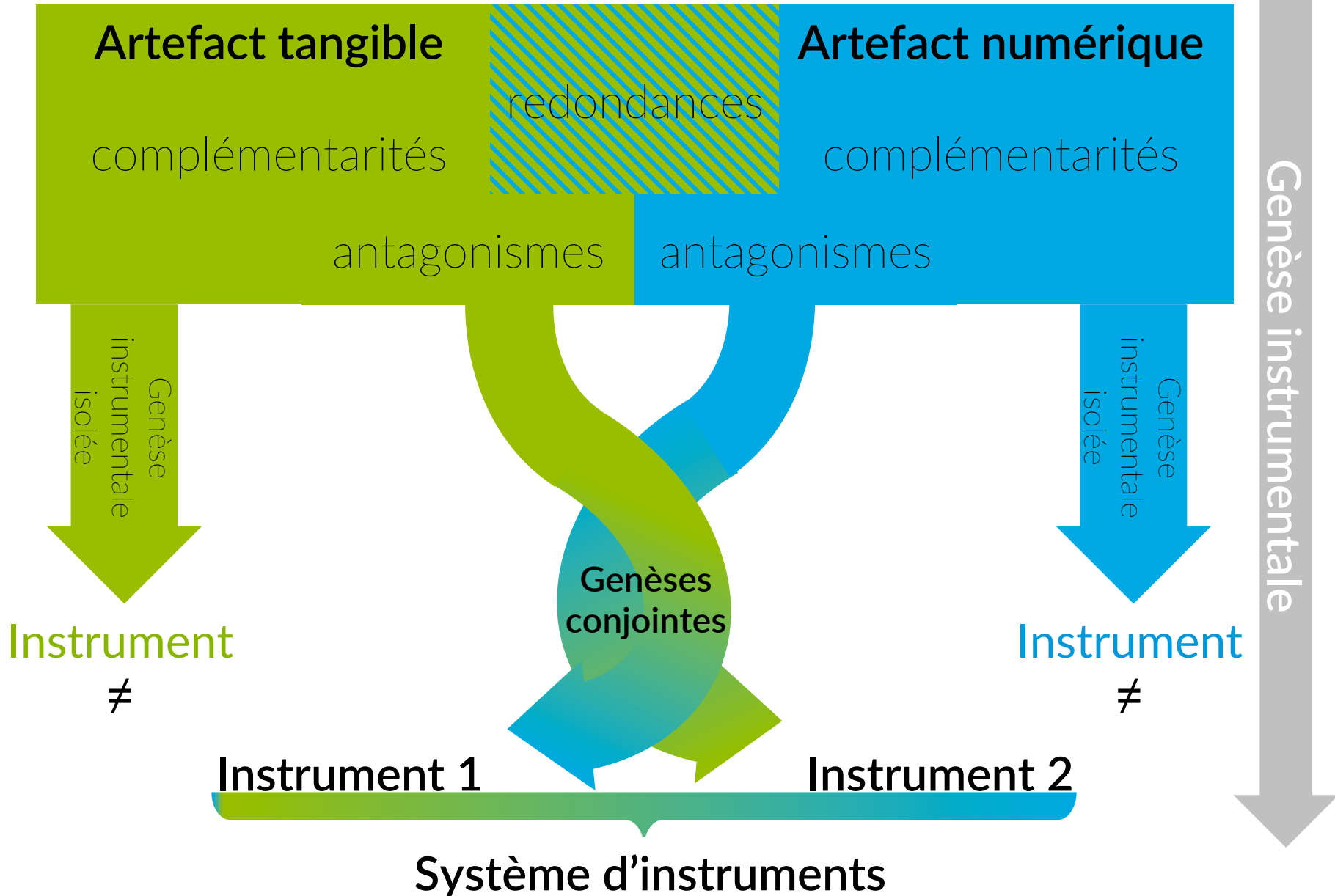
Y a-t-il un moyen d'organiser cette combinaison pour  
provoquer l'apprentissage et le développement de  
connaissances mathématiques ?



# Vers des genèses conjointes



# Duo d'artefacts



# A duo of tangible and digital artefacts for the genesis of a system of instruments

## Complementarities, antagonisms, redundancies

between the two artefacts

## and a didactical situation

to trigger and support the joined geneses development.

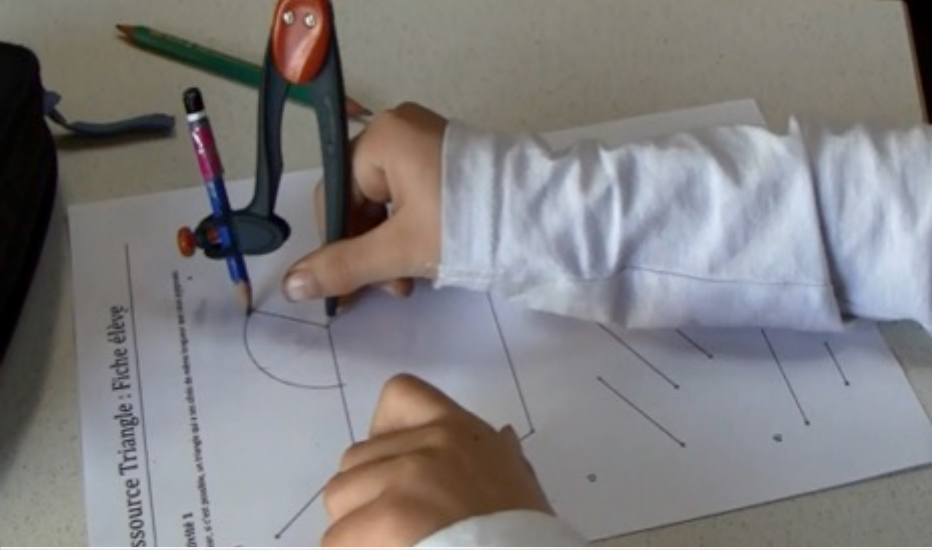
## Why tangible and digital to design a duo?

It offers a pragmatic solution to design a duo with minimal complementarity, redundancy and antagonism.

Each artefact inherits tangible or digital properties, creating complementarity. Design of a digital artefact enables visual and behavioral fidelity according to the tangible artefact, creating redundancy.

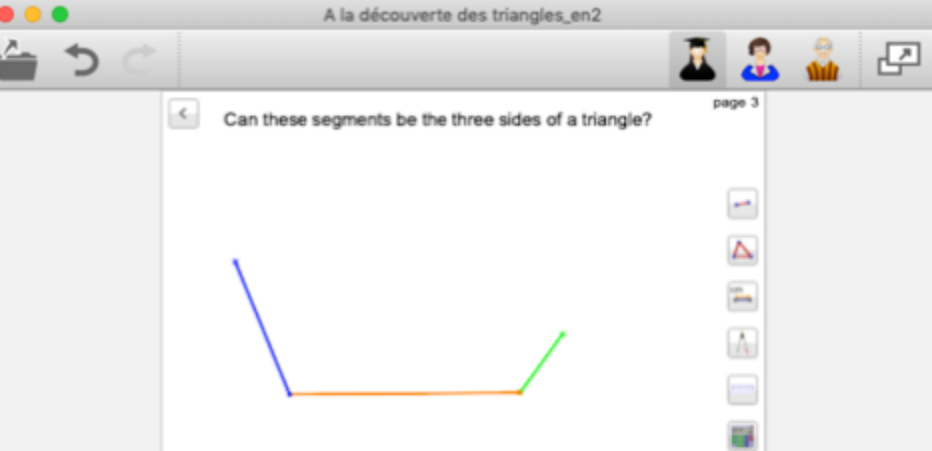
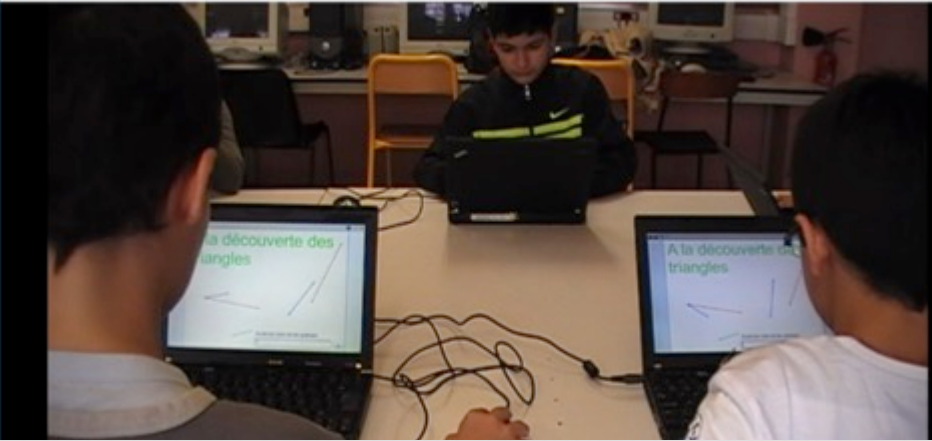
Tangible artefact brings the necessity for gestures and body engagement.

Digital artefact enables new kinds of constraints within the user interaction, creating antagonisms.



# Avec la **géométrie dynamique**

un duo d'artefacts pour apprendre à construire un triangle



(Voltolini, à paraître)

# Un problème issu des pratiques des enseignants

The paper and pencil construction of a triangle, given the length of its three sides

a very procedural introduction of compass

Students rapidly forget how to apply the procedure and do not attach it to any geometrical properties

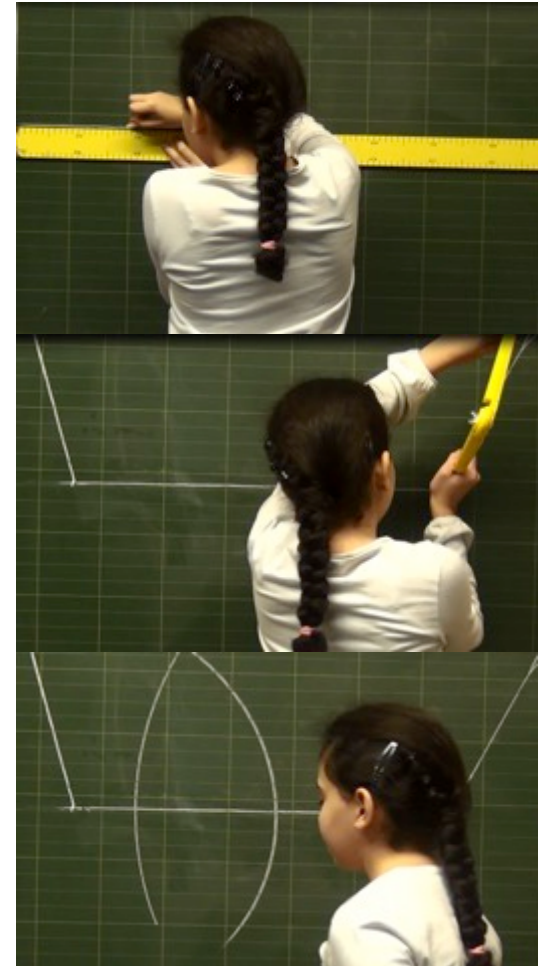
Some explanations from math education research

Learning geometry is changing the way to look to figures, from iconic to non-iconic visualization

This construction requires a 2D->0D dimensional deconstruction (Duval 2005) of the geometrical figure, from the 2D surface of the triangle to the 0D of the point at the intersection of the two circles

The two sides of the triangle, 1D objects, are not produced by the compass

A single artefact, the compass, gives different possible instruments: transferring lengths or drawing circles



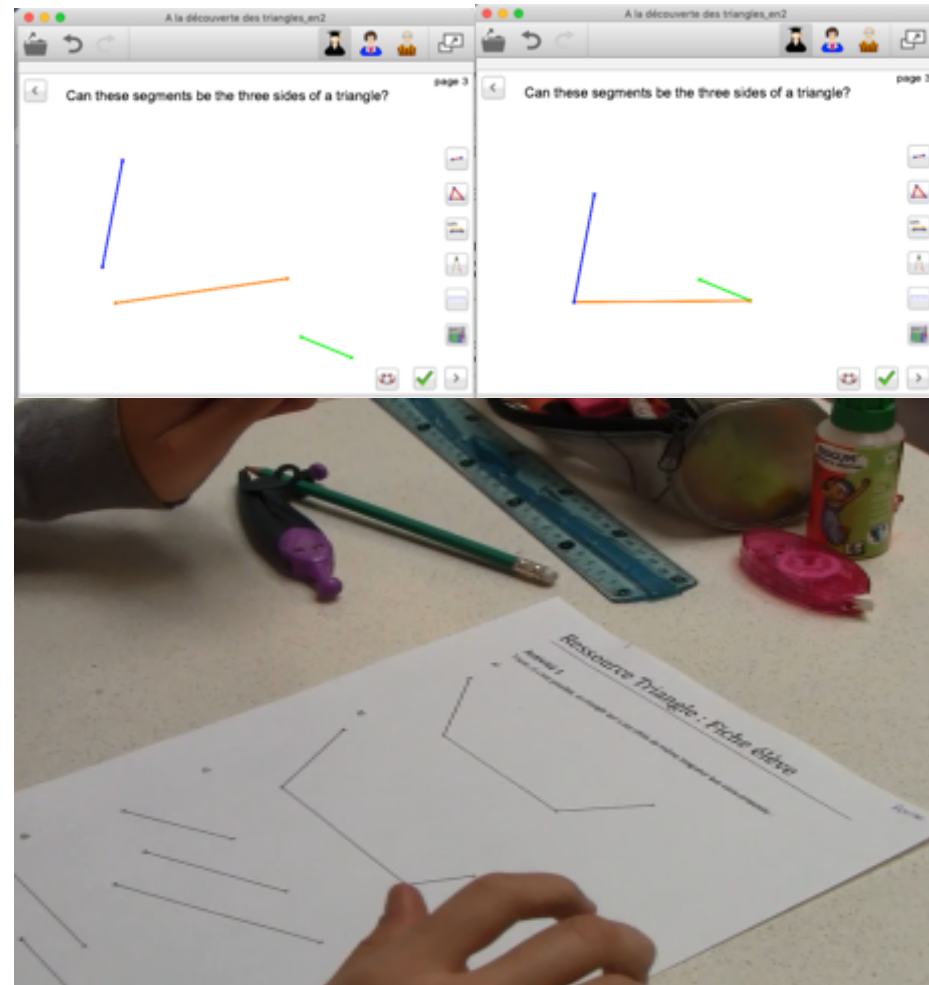
# Proposition pour l'école primaire avec un duo d'artefacts

Mobiliser une vision "ligne" du triangle, intermédiaire entre la vision "surface" et la vision "point"  
Provoquer la genèse instrumentale du compas qui fonde la connaissance mathématique du triangle

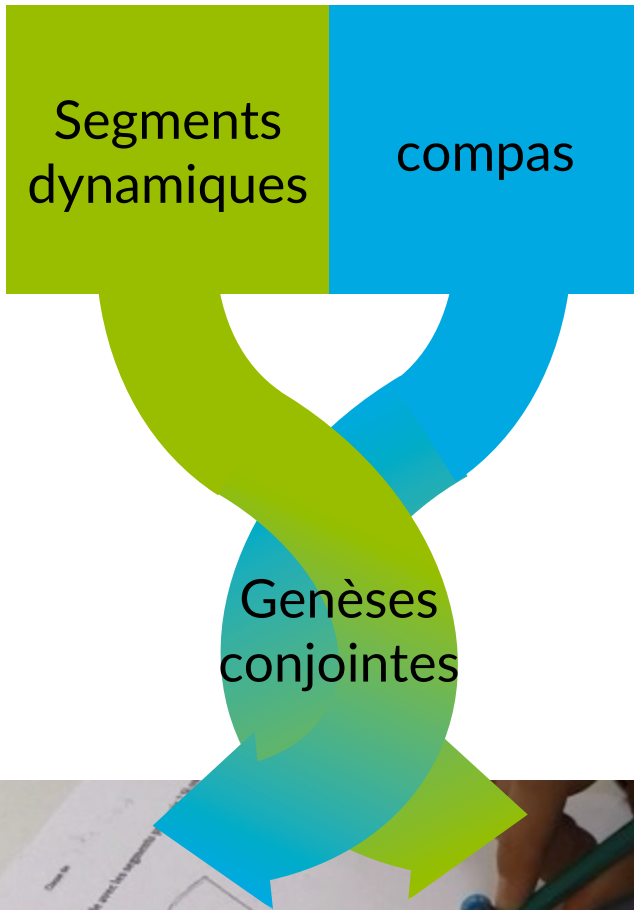
Avec une situation didactique incluant la géométrie dynamique et des constructions papier-crayon

Déplacement de segments existants, dont la longueur est fixe

Contraintes et rétroactions de l'environnement: dissociation des déplacements et nécessité d'anticipation lorsque la rotation n'est plus possible



# Analyse du duo formé par les segments dynamiques et le compas



## Redondances

Dans les deux cas, focus sur la rotation, les cotés des triangles, et plus précisément les extrémités des segments

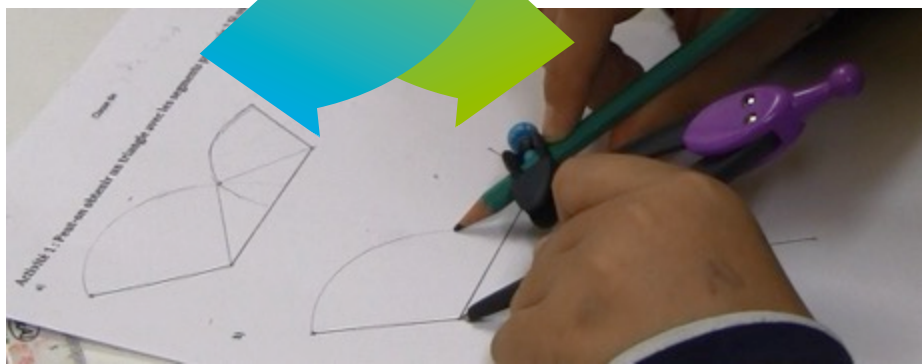
## Complémentarités

Dissociation des deux mouvements, translation et rotation lors du déplacement des segments avec la géométrie dynamique

Pas de déplacement en papier-crayon et association des deux mouvements avec des bâtons tangibles

## Antagonismes

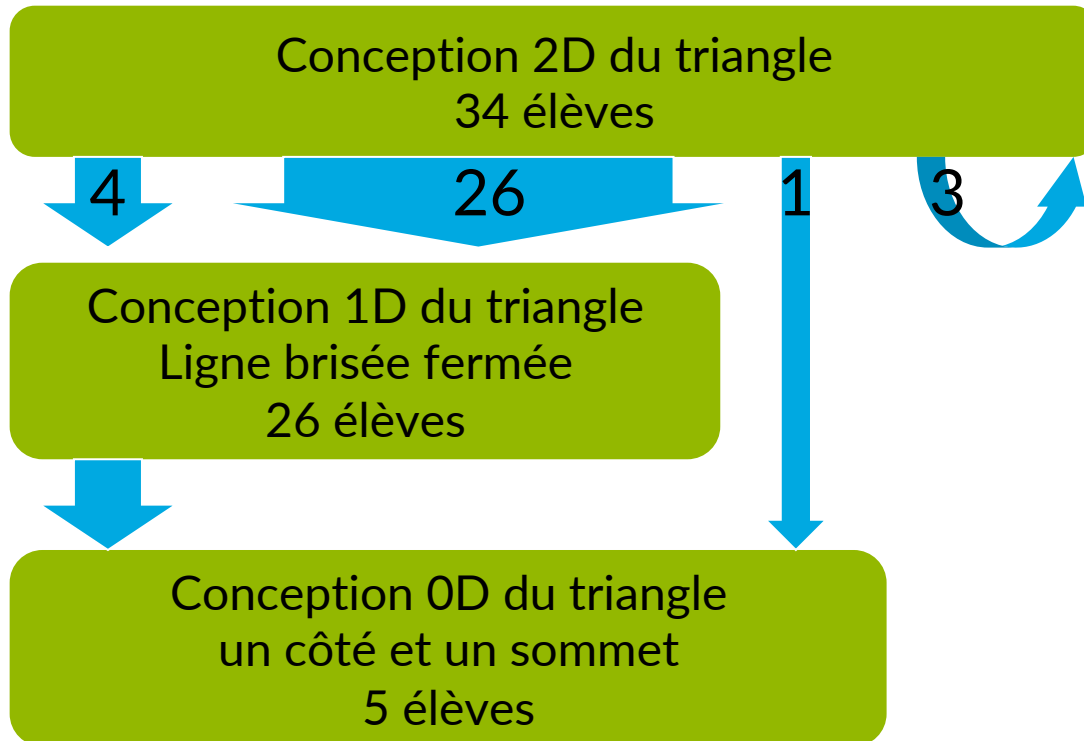
De la géométrie dynamique au papier-crayon, les élèves doivent développer de nouvelles façons de « fermer » les triangles.



# Expérimentation : évolution des conceptions du triangle des élèves de CM2

Recherche orientée par la conception avec un groupe d'enseignants pendant 3 années consécutives

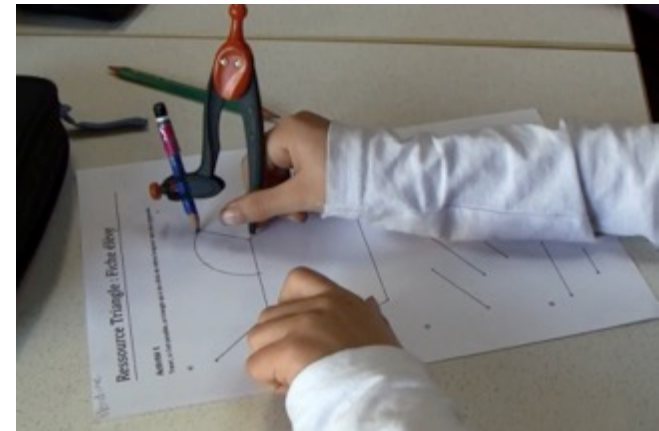
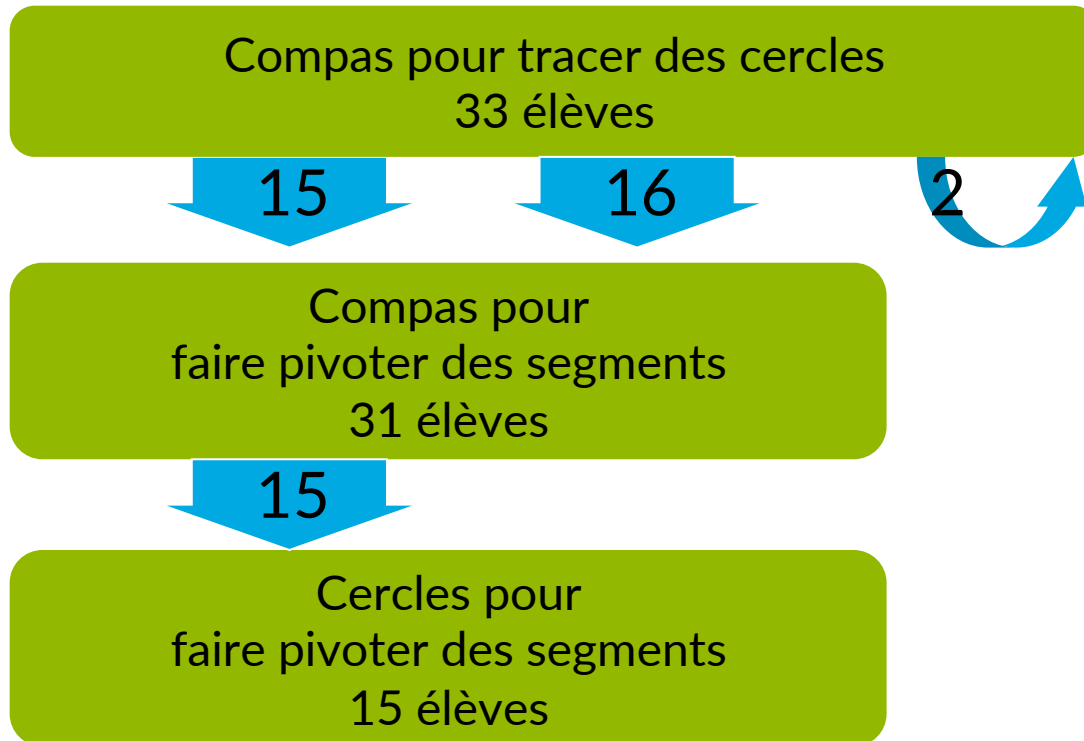
Analyse des conceptions de 34 élèves.





# Expérimentation : évolution des instruments des élèves

De l'artefact "compas" à l'instrument "pour faire pivoter des segments"



# Conclusion à propos des duos d'artefacts en géométrie

## Apparition d'une nouvelle **conception du triangle**

Une ligne brisée fermée, basée sur une déconstruction dimensionnelle  
2D->1D

## Apparition d'un nouvel **instrument associé à l'artefact compas**

Un instrument pour faire pivoter les segments autour d'une extrémité

Genèse conjointe d'un système d'instruments à part d'artefacts numérique et tangible et ses conséquences sur l'apprentissage : la **nouvelle conception du triangle est liée au développement du nouvel instrument compas**, 'pour pivoter les segments', qui opère sur papier-crayon mais prend sa signification dans les segments dynamiques de la géométrie dynamiques.

Comme le dit Luna : « la ligne brisée, ça aide, parce que, tu ne sais pas que tu peux utiliser le compas pour construire un triangle »

# Conclusion

## A propos des connaissances des élèves en mathématiques

**Conceptions comme outil pragmatique** pour construire un modèle des connaissances des élèves, pour rendre compte des façons contradictoires de « savoir », sans renoncer à l'hypothèse de rationalité. Considérer les productions des élèves comme la manifestation de leurs connaissances.

**Invariants opératoires** : moyens efficaces de **caractériser** et différencier les **conceptions**.

**Problèmes** (ou situations) : outils du chercheurs pour provoquer **l'apprentissage**, considéré comme une **trajectoire de conceptions**.

## A propos des duos d'artefacts et de l'apprentissage

**Rechercher les interactions entre tangible et numérique** est un moyen d'attaquer la complexité de la multiplicité des artefacts et de leur interaction dans les environnements d'apprentissage. Les duos d'artefacts sont un moyen de traiter ces questions avec un modèle simplifié mais qui reste pertinent.

# References

- Bachelard, G. (1938) *La Formation de l'esprit scientifique*, Librairie philosophique, J. Vrin, 1938, 256 p..
- Balacheff, N. (2013). CK $\zeta$ , a model to reason on learners' conceptions. In M. V. Martinez & A. Castro Superfine (Éd.), PME-NA (p. 2-15).
- Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Springer.
- Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : Développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 10, 5-53.
- McNeill, D. (1994). *Hand and Mind : What Gestures Reveal about Thought*. *Leonardo*, 27(4), 358.
- Núñez, R. E., Edwards, L. D., & Matos, J. F. (1999). Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education. *Educational studies in mathematics*, 39(1-3), 45-65.
- Papert, S. (1980). *Mindstorms. Children, computers, and powerful ideas*. New York: Basic Books.
- Restrepo, A. M. (2008). *Genèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de 6e* (Doctorat thesis). Joseph Fourier.
- Sinclair, N. (2003). Some implications of the results of a case study for the design of pre-constructed, dynamic geometry sketches and accompanying materials. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 289–317.
- Soury-Lavergne, S. (2017). *Duos d'artefacts tangibles et numériques et objets connectés pour apprendre et faire apprendre les mathématiques*. (HDR). ENS de Lyon, Lyon, France.
- Vergnaud, G. (2009). The Theory of Conceptual Fields. *Human Development*, 52, 83-94.
- Voltolini, A. (2016). Duo of digital and material artefacts dedicated to the learning of geometry at primary school. Presented at the 13th International Congress on Mathematical Education, Hamburg, Allemagne.
- Voltolini, A. (à paraître). Genèses instrumentales et conceptions pour étudier le potentiel didactique d'un duo d'artefacts, *Recherches en Didactique des Mathématiques*.