

La démarche d'investigation en mathématiques

Démarche d'étude par la recherche de l'école primaire au lycée
11 au 14 janvier 2016

Karine Drousset (IFE-ENSL) ; Yves Matheron (IFE-ENSL) ; Farida Méjani (IFE-ENSL) ; Serge Quilio (ESPE de l'Université de Nice) ; Sébastien Velon (IFE-ENSL)

Qu'entend-on par démarche d'investigation ?

Un premier positionnement

Yves Matheron

La démarche d'investigation en mathématiques
*Démarche d'étude par la recherche de l'école
primaire au lycée*

Extraits « Introduction commune aux programmes des disciplines scientifiques et technologique » Collège 2008

Collège

Disciplines scientifiques et technologique

- Introduction commune -

La mise en œuvre des activités préconisées par les programmes des sciences expérimentales (Physique-chimie, Sciences de la vie et de la Terre) et la technologie conduit à recommander pour ces disciplines la constitution, chaque fois qu'il est possible, de groupes à effectif réduit.

La démarche d'investigation présente des analogies entre son application au domaine des sciences expérimentales et à celui des mathématiques. La spécificité de chacun de ces domaines, liée à leurs objets d'étude respectifs et à leurs méthodes de preuve, conduit cependant à quelques différences dans la réalisation. Une éducation scientifique complète se doit de faire prendre conscience aux élèves à la fois de la proximité de ces démarches (résolution de problèmes, formulation respectivement d'hypothèses explicatives et de conjectures) et des particularités de chacune d'entre elles, notamment en ce qui concerne la validation, par l'expérimentation d'un côté, par la démonstration de l'autre.

Mai 2008

Mise en débat du 1^{er} extrait : qui a écrit ? (1)

Face à une situation comme celles évoquées ci-dessus, plus ou moins vague, avec des questions qui peuvent être très imprécises (voir par exemple 1.2.7), je propose une méthode d'investigation systématique, que je n'hésite pas à désigner sous le nom de méthode expérimentale. Elle comprend plusieurs étapes, à répéter éventuellement :

- expérience,
- observation de l'expérience,
- formulation de conjectures,
- tentative de preuve,
- contre-expérience, production éventuelle de contre-exemples,
- formulation de nouvelles conjectures,
- nouvelle tentative de preuve, etc.

2.1 L'expérience

Il n'est sans doute pas inutile d'expliquer un peu plus en détail ce que peut signifier ce recours à l'expérience⁸ et quel est son intérêt. Fondamentalement, cela signifie que, face à un problème général, on va regarder d'abord un cas particulier, *a priori* plus simple, plus facile à examiner, plus aisément calculable, et le faire varier éventuellement. On examine ce qui se passe dans ce cas, on y repère des phénomènes, avec toujours en tête l'idée de **généraliser** ce que l'expérience nous aura montré.

On peut résumer cette démarche sous forme d'une maxime :

2.1 Maxime. *Les mathématiques sont aussi une science expérimentale et une science d'observation.*

Mise en débat du 1^{er} extrait : qui a écrit ? (2)

Les travaux de géométrie plane prennent toujours appui sur des figures dessinées, suivant les cas, à main levée, à l'aide des instruments de dessin et de mesure, ou dans un environnement informatique. Ils sont conduits en liaison étroite avec l'étude des autres rubriques. Les diverses activités de géométrie habituent les élèves à expérimenter et à conjecturer, et permettent progressivement de s'entraîner à des justifications mettant en œuvre les outils du programme et ceux déjà acquis en classe de sixième.

Divers sens attribués au concept de « démarche d'investigation » et aux méthodes associées (J-Y. Cariou) (1)



Recherches en Éducation

N°21 - Janvier 2015

Les démarches d'investigation et leurs déclinaisons
en mathématiques, physique, sciences
de la vie et de la Terre

Numéro coordonné par
Bernard CALMETTES & Yves MATHERON

En France, le « canevas d'une séquence d'investigation » commun aux disciplines scientifiques au collège (mathématiques, sciences expérimentales et technologie) comporte « sept moments essentiels » : le choix d'une situation-problème par le professeur ; l'appropriation du problème par les élèves ; la formulation de conjectures, d'hypothèses explicatives, de protocoles possibles ; l'investigation ou la résolution du problème conduite par les élèves ; l'échange argumenté autour des propositions élaborées ; l'acquisition et la structuration des connaissances ; la mobilisation des connaissances².

Aux États-Unis, les orientations pour l'*inquiry* sont précisées par un guide (NRC, 2000, p.25-29) qui en liste cinq caractères essentiels (*Essential Features*) : le fait que les apprenants sont engagés par des questions à caractère scientifique ; accordent la priorité aux données (*évidence*), ce qui leur permet de développer et d'évaluer des explications concernant ces questions ; formulent des explications à partir de données pour répondre à ces questions ; évaluent leurs explications à la lumière des explications alternatives, en particulier celles qui reflètent une compréhension scientifique ; communiquent et justifient les explications qu'ils ont proposées.

Divers sens attribués au concept de « démarche d'investigation » et aux méthodes associées (J-Y. Cariou) (2)

Tableau 1 - Caractéristiques des DI dans les textes officiels américains et français

Traits communs aux cinq <i>Essential Features</i> des <i>Standards</i> américains et aux sept moments essentiels du canevas français	
<ul style="list-style-type: none"> - L'appropriation d'un questionnement - La proposition d'idées ou d'actions - La participation à un recueil de données - L'élaboration d'explications - La communication et l'engagement dans un débat argumenté - La confrontation au savoir établi 	
Traits particuliers des <i>Essential Features</i> des <i>Standards</i> américains	Traits particuliers des <i>moments essentiels</i> du canevas français
<ul style="list-style-type: none"> - Explications élaborées à partir des données - Moyens divers de recueil de données - Usage nécessaire des mathématiques et de technologies - Importance de la part de responsabilité des élèves 	<ul style="list-style-type: none"> - Conceptions des élèves identifiées et travaillées - Formulation d'hypothèses - « Réalisation de l'expérience » pour les sciences expérimentales - Inclusion d'une phase initiale de préparation par le professeur et d'une phase finale de mobilisation des connaissances



INSTITUT
FRANÇAIS
DE L'ÉDUCATION

Critères communs à diverses définitions de « démarche d'investigation » (J-Y. Cariou)

Tableau 3 - Critères définissant une DI les plus fréquemment cités dans les dix sources étudiées

Sources	Critères			
	I Initiation de l'investigation par une interrogation	R Part de responsabilité conceptuelle laissée aux élèves	D Existence de débat, d'échanges argumentés	P Existence de productions et de réalisations par les élèves
Standards américains (2000)	x	x	x	x
Canevas français (2008)	x	x	x	x
Linn <i>et al.</i> (2004)	x	x	x	x
Morge et Boilevin (2007)	-	x	x	x
Projet <i>Mind the Gap</i> (2008-2010)	x	x	x	x
Minner <i>et al.</i> (2010)	x	x	-	x
Projet <i>Fibonacci</i> (2010-2013)	x	x	x	x
Grangeat (2013)	x	x	x	-
Projet <i>PRIMAS</i> (2010-2013)	x	x	x	x
Gueudet <i>et al.</i> (2010)	x	x	x	x
TOTAL	9	10	9	9

x : proposé comme critère définissant ou caractérisant une DI
- : non proposé

Retour sur des propositions d'enseignement des mathématiques (1)

Un exemple dans un manuel de CM2

49

géométrie

La symétrie axiale



- ▶ Découvrir la symétrie par rapport à une droite.
- ▶ Construire le symétrique d'un point, d'une figure.

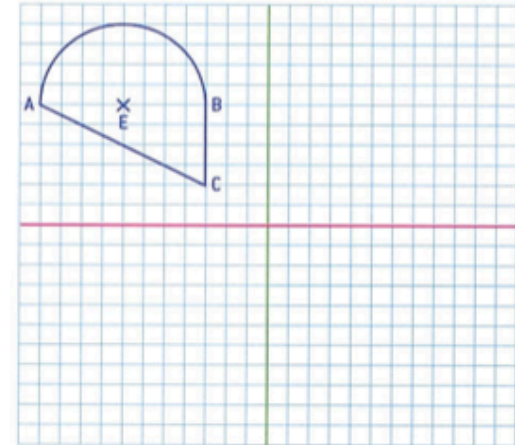
CALCUL MENTAL

- Multiplier par 10 un nombre décimal ayant une décimale.
- Ajouter 3 nombres entiers simples.

Je découvre

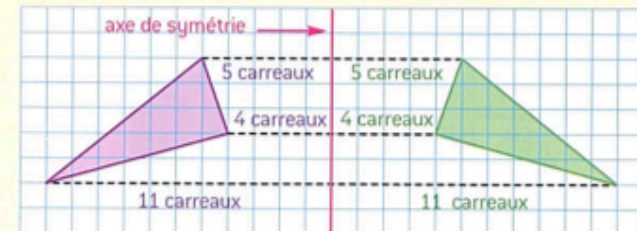
1 Construire le symétrique d'un point

- Observe la figure bleue.
Combien mesure le rayon du demi-cercle (exprime les mesures en « carreaux ») ?
- Sur une feuille quadrillée, reproduis la figure bleue.
- Trace la droite verte.
Construis la figure symétrique de la bleue par rapport à la droite verte.
- Trace la droite rouge.
Construis la figure symétrique de la bleue par rapport à la droite rouge.



Je retiens Compléter une figure par symétrie axiale

Pour construire le symétrique d'une figure par rapport à un axe, on cherche le **symétrique de chacun des points** de la figure.



2 Je calcule la différence de deux nombres relatifs

On a relevé des températures un jour de décembre dans quatre villes françaises.

1) On considère les températures relevées à Bastia.

a) Entre 6 h et 20 h, la température a-t-elle augmenté ou diminué? de combien de °C?

b) En déduire le résultat de la différence $(+11) - (+4)$.

c) Calculer la somme $(+11) + (-4)$. Comparer le résultat avec celui obtenu à la question 1) b).

2) On considère les températures relevées à Lamballe.

a) Entre 6 h et 20 h, la température a-t-elle augmenté ou diminué? de combien de °C?

b) En déduire le résultat de la différence $(-3) - (+1)$.

c) Calculer la somme $(-3) + (-1)$. Comparer le résultat avec celui obtenu à la question 2) b).

3) Recopier et compléter le tableau suivant :

Villes	Température à 6 h	Température à 20 h
Bastia	+4 °C	+11 °C
Lamballe	+1 °C	-3 °C
Toulon	-1 °C	+4 °C
Strasbourg	-6 °C	-12 °C

Villes	Évolution de température	Différence	Somme
Bastia		$(+11) - (+4) = \dots$	$(+11) + (-4) = \dots$
Lamballe		$(-3) - (+1) = \dots$	$(-3) + (-1) = \dots$
Toulon		$(+4) - (-1) = \dots$	$(+4) + (-1) = \dots$
Strasbourg		$(-12) - (-6) = \dots$	$(-12) + (-6) = \dots$

4) Après avoir observé les deux dernières colonnes, recopier et compléter :

• Soustraire un nombre relatif revient à ... son



Retour sur des propositions d'enseignement des mathématiques (3)

Un exemple

Intéressant en quoi ?

Produit scalaire dans le plan

Définition, propriétés.

- Calculer le produit scalaire de deux vecteurs par différentes méthodes :
 - projection orthogonale ;
 - analytiquement ;
 - à l'aide des normes et d'un angle ;
 - à l'aide des normes.

- Choisir la méthode la plus adaptée en vue de la résolution d'un problème.

Vecteur normal à une droite.

- Déterminer une équation cartésienne de droite connaissant un point et un vecteur normal.
- Déterminer un vecteur normal à une droite définie par une équation cartésienne

- ▣ Déterminer une équation de cercle défini par son centre et son rayon ou par son diamètre.

Applications du produit scalaire :
calculs d'angles et de longueurs ;
formules d'addition et de duplication des cosinus et sinus.

- ▣ Démontrer que :

▣ Il est intéressant de démontrer l'égalité des expressions attachées à chacune de ces méthodes.

▣ La démonstration du théorème de la médiane fournit l'occasion de travailler le calcul vectoriel en lien avec le produit scalaire.

Pour faire ... quoi ?

La relation de Chasles pour les angles orientés

Une liste de contenus et de capacités
sans réelles finalités

Investigation sur le terme de « démarche » (d'investigation) et une première question

Manière d'avancer dans un raisonnement, manière de penser ; *p. méton.* raisonnement, pensée. *Démarche dialectique.*

av. 1662 au fig. « manière de progresser (de la raison, de la pensée) » (Pascal, *Pensées*, XIII ds *Œuvres complètes*, éd. L. Lafuma, p. 524)

La question est donc de savoir comment le professeur va *conduire* la manière dont *la classe va progresser* rationnellement.

Investigation sur le terme « investigation »... et une deuxième question

Etymologie : lat. *investigatio*, de *vestigium*, trace. *Investigatio* signifie « recherche attentive » ; le verbe *investigo* signifiant « chercher (suivre) à la piste, à la trace. Rechercher avec soin, scruter » (Gaffiot, 2001). Investigateur v. 1500, « qui cherche la pierre philosophale »

Traduction depuis l'américain de « Inquiry based teaching » et « Evidence based work »

La question est donc de savoir :

- *ce que l'on recherche,*
- *pourquoi* on le recherche,
- *qui* recherche,
- quel sera *le produit de* la recherche



Ce que nous apprend l'investigation sur le terme « investigation »... hormis la circularité du dictionnaire

Investigo : « chercher (suivre) à la piste, à la trace.

Rechercher avec soin, scruter ».

Chercher à connaître ; chercher avec soin, méthode, réflexion. Faire une **enquête** sur la vie, les activités, la conduite de quelqu'un ; exercer des poursuites à l'encontre de quelqu'un.

Toute **recherche**, menée dans des secteurs variés en recueillant les réponses et témoignages des personnes ou en rassemblant des documents, donnant lieu à un rapport écrit.



INSTITUT
FRANÇAIS
DE L'ÉDUCATION

Récapitulation à partir du sens premier « d'investigation » et conséquences

- La DI nécessite une question dont on va rechercher avec soin, grâce à une enquête (*travail des élèves* dirigé par la professeur), des « réponses et témoignages des personnes (propositions trouvées par la classe et validées par une *confrontation dialectique* entre ce qu'on trouve dans divers médias et leur preuve), donnant lieu à un rapport écrit (*institutionnaliser* puis consigner l'important de la réponse : *des éléments de savoir*) »
- La question de la question n'est pas posée dans le texte du programme français, ni non plus que celle des outils (les gestes que doit ou non accomplir le professeur) pour la direction et la gestion de l'enquête



Deux types de résultats d'enquête

INSTITUT
FRANÇAIS
DE L'ÉDUCATION

⇒ deux types d'organisations mathématiques

Enquête du 1^{er} type : « Combien passe-t-il de cercles par 3 points ? » ⇒ Activité d'étude et de recherche (construction d'une organisation mathématique locale : un chapitre)

Enquête du 2^e type : « Combien passe-t-il de cercles par n points ? »

Enquête du 2^e type : « Comment mesurer l'épaisseur de divers types de feuilles de papier, notamment en les assemblant ? » ⇒ Parcours d'étude et de recherche (construction d'une organisation mathématique régionale : les fractions et leurs opérations)



INSTITUT
FRANÇAIS
DE L'ÉDUCATION

Qui mène l'enquête et avec quoi ?

⇒ deux formes d'organisations
didactiques

1^{re} forme : l'enquêteur ⇒ cours magistral & activités des manuels ; ce qui est la forme standard de l'enseignement (enseignant = celui qui montre ⇒ ostension)

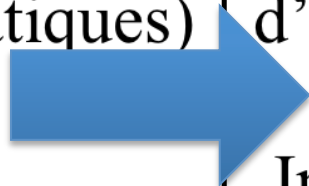
2^e forme : des équipes sous une direction centrale ⇒ enseignement par adaptation ou par direction d'étude (les rôles sont distribués et chacun participe activement à la recherche)



Divers types d'investigation (enquête, recherche) dans un cadre scolaire



	Finalisée	Non finalisée
Disciplinaire (mathématiques)	Activités et Parcours d'Étude et de Recherche (AER & PER) Ingénieries didactiques	Problèmes ouverts
Codisciplinaire	Thèmes de convergence Enseignements pratiques interdisciplinaires (EPI)	Travaux Personnels Encadrés (TPE) Questions ouvertes



Cours magistral
Activités des manuels



La responsabilité
d'exposer le savoir
incombe au professeur

Quel sort pour la
question ?

Le savoir peut-il être vu
par les élèves comme
réponse à une question
qu'ils n'ont pu rencontrer ?

Démarche d'investigation



La responsabilité de faire
rencontrer la question par
les élèves et de *diriger la*
production d'une réponse
incombe au professeur

Les mathématiques sont
vécues comme
construction collective
d'une réponse à une
question

Deuxième conclusion

Des conditions ignorées par le système et des contraintes

. Motiver l'étude *à partir d'une question problématique dévolue* aux élèves \Rightarrow capacité à mener des *analyses mathématiques et didactiques a priori*

. Etudier les conditions de réalisation effective de telles propositions d'enseignement \Rightarrow *analyses mathématiques et didactiques a posteriori*

. *Laisser du « jeu »*, sous contrôle théorique *a priori*, au professeur

Mais pour la réalisation de ces trois préalables, il faut :

des collectifs pour concevoir de telles ressources, la capacité de la profession à s'en emparer pour s'en servir, de la formation

Conclusion générale



Bon Appetit