

# La démarche d'investigation en mathématiques comme remède au monumentalisme dans l'enseignement ? Conditions et contraintes

Yves Matheron

*Institut Français de l'Éducation – ENS de Lyon*

*Le 19 janvier 2015*

## ACTIVITÉ

### LES QUATRE EXPRESSIONS DU PRODUIT SCALAIRE

Le but de cette activité est de montrer sur un exemple les différentes façons de calculer un produit scalaire.

ABC est un triangle équilatéral, et dans l'unité de longueur choisie,  $AB = 3$ . On note I le milieu de [BC], K celui de [AC], J celui de [AB].

On pose  $\vec{u} = \overrightarrow{BA}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ ,  $\widehat{ABC} = \theta$ .

1. Calculez  $\frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$ .

INDICATION :  $\frac{1}{2} (\vec{u} + \vec{v}) = \overrightarrow{BK}$ .

2. Calculez  $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta$ .

3. Calculez  $AB \times BI$ .

4.  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  est un repère orthonormal quelconque. On note  $(x ; y)$  les coordonnées de  $\vec{u}$  dans ce repère, et  $(x' ; y')$  celles de  $\vec{v}$ . Montrez que :

$$xx' + yy' = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \frac{9}{2}.$$

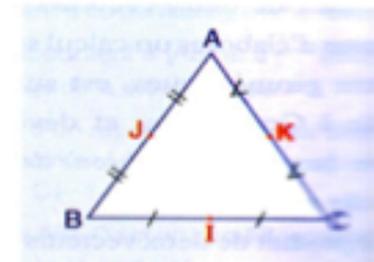
5. Calculez  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$ .

Reliez le résultat au fait que les vecteurs  $\overrightarrow{BK}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont orthogonaux.

**Conclusion**  $\frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta = AB \times BI = xx' + yy'$

Chacun de ces nombres est appelé **produit scalaire** de  $\overrightarrow{BA}$  par  $\overrightarrow{BC}$ .

On le note  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ .



**Rappel**  
Si le vecteur  $\vec{n}$  a pour coordonnées  $(a ; b)$  dans un repère orthonormal, alors :  
 $\|\vec{n}\|^2 = a^2 + b^2$ .

- « L'enseignement actuel ressemble le plus souvent à une visite guidée de monuments mathématiques autrefois vivants mais dont les raisons d'être, les fonctions vitales ont cessé d'être comprises et reconnues. »
  - « Le point de vue *monumentaliste* donne le primat à l'étude « à vide » des savoirs et rejette au second plan, voire oblitère, la logique des questions et des réponses »
  - « Il sacrifie les *fonctions* d'un savoir, comme outil de production de connaissances, au profit de la rencontre « directe », explicite, formelle avec sa *structure* »
- ⇒ Aller vers un changement du paradigme et de la forme scolaires



# Pourtant, déjà chez Clairaut (1713 – 1765)... dans ses *Elémens de géométrie* (1741)

INSTITUT  
FRANÇAIS  
DE L'ÉDUCATION

## PRÉFACE.

Quoique la Géométrie soit par elle-même abstraite, il faut avouer cependant que les difficultés qu'éprouvent ceux qui commencent à s'y appliquer viennent le plus souvent de la manière dont elle est enseignée dans les *Eléments ordinaires*. On y débute toujours par un grand nombre de définitions, de demandes, d'axiomes et de principes préliminaires, qui semblent ne promettre rien que de sec au lecteur. Les propositions qui viennent ensuite ne fixent point l'esprit sur des objets plus intéressants, et étant d'ailleurs difficiles à concevoir, il arrive communément que les commençants se fatiguent et se rebutent avant que d'avoir aucune idée distincte de ce qu'on voulait leur enseigner.

Il est vrai que, pour sauver cette sécheresse naturellement attachée à l'étude de la Géométrie, quelques auteurs ont imaginé de mettre, à la suite de chaque proposition essentielle, l'usage qu'on en

## PRÉFACE.

VI  
peut faire pour la pratique; mais par là ils prouvent l'utilité de la Géométrie, sans faciliter beaucoup les moyens de l'apprendre: car chaque proposition venant toujours avant son usage, l'esprit ne revient à des idées sensibles qu'après avoir essuyé la fatigue de saisir des idées abstraites.

Quelques réflexions que j'ai faites sur l'origine de la Géométrie m'ont fait espérer d'éviter ces inconvénients, en réunissant les deux avantages d'intéresser et d'éclairer les commençants. J'ai pensé que cette science, comme toutes les autres, devait s'être formée par degrés; que c'était vraisemblablement quelque besoin qui avait fait faire les premiers pas, et que ces premiers pas ne pouvaient être hors de la portée des commençants, puisque c'étaient des commençants qui les avaient faits.

Prévenu de cette idée, je me suis proposé de remonter à ce qui pouvait avoir donné naissance à la Géométrie, et j'ai tâché d'en développer les principes par une méthode assez naturelle pour être supposée la même que celle des premiers inventeurs, observant seulement d'éviter toutes les fausses tentatives qu'ils ont nécessairement dû faire.

La mesure des terrains m'a paru ce qu'il y avait de plus propre à faire naître les premières proposi-

## PREFACE.

VII

tions de Géométrie; et c'est, en effet, l'origine de cette science, puisque Géométrie signifie *mesure de terrain*. Quelques auteurs prétendent que les Égyptiens, voyant continuellement les bornes de leurs héritages détruites par les débordements du Nil, jetèrent les premiers fondements de la Géométrie en cherchant les moyens de s'assurer exactement de la situation, de l'étendue et de la figure de leurs domaines. Mais quand on ne s'en rapporterait pas à ces auteurs, du moins ne saurait-on douter que, dès les premiers temps, les hommes n'aient cherché des méthodes pour mesurer et pour partager leurs terres. Voulant dans la suite perfectionner ces méthodes, les recherches particulières les conduisirent peu à peu à des recherches générales; et s'étant enfin proposé de connaître le rapport exact de toutes sortes de grandeurs, ils formèrent une science d'un objet beaucoup plus vaste que celui qu'ils avaient d'abord embrassé, et à laquelle ils conservèrent cependant le nom qu'ils lui avaient donné dans son origine.

Afin de suivre dans cet ouvrage une route semblable à celle des inventeurs, je m'attache d'abord à faire découvrir aux commençants les principes dont peut dépendre la simple mesure des terrains et des distances accessibles ou inaccessibles, etc.

# Investigation sur le terme « investigation » : dans le programme français

1. Choix d'une **situation-problème** par le professeur, à partir de l'analyse des savoirs visés, des objectifs à atteindre, des acquis initiaux, des conceptions des élèves ;
2. **Appropriation du problème par l'élève, reformulation, émergence d'éléments de solution suscitant le questionnement ;**
3. Formulation de conjectures, d'hypothèses explicatives, ...
4. Investigation ou résolution du problème conduite par les élèves par des débats en groupe, ... recherche d'éléments de justification et de preuve ;
5. Echange argumenté autour des propositions élaborées par la confrontation des propositions, le débat sur leur validité ;
6. Acquisition et structuration des connaissances par la mise en évidence, avec l'enseignant, de nouveaux éléments de savoir ;
7. Opérationnalisation des connaissances par des exercices pour automatiser certaines procédures, nouveaux problèmes de réinvestissement, d'évaluation.



# Qu'en disent les sites – ressources ? Académie de Limoges (1)

## Situation problème

C'est une **situation d'apprentissage** organisée autour d'un obstacle à franchir.

Elle présente un **defi** à la portée de l'élève qui ne dispose pas, au départ, des moyens de trouver la solution recherchée.

Elle a du **sens** parce qu'elle fait appel à quelque chose que connaît l'élève. Elle est **en lien avec sa realite**.

Elle est **concrete** parce qu'elle a un but, elle sollicite une action réelle et requiert l'utilisation de connaissances, de techniques, de stratégies...

La situation doit amener l'élève à y **investir ses connaissances anterieures** et le conduire à **une remise en cause des representations** et à **l'elaboration de nouvelles idées**.



# Qu'en disent les sites – ressources ? Académie de Limoges (2)

INSTITUT  
FRANÇAIS  
DE L'ÉDUCATION

## Comment mettre en œuvre une situation-problème ?

Avant d'élaborer une situation problème, il est nécessaire de répondre aux questions suivantes :

- Quel est mon **objectif** ? Qu'est-ce que je veux faire **acquérir** ?

La complexité des problèmes ne doit pas être excessive.  
Les élèves doivent assez vite prendre conscience qu'ils sont à leur portée. C'est une condition pour garder la motivation

- Quelle **tâche** puis-je proposer ?

La connaissance que l'on désire voir acquérir par l'élève doit s'avérer l'outil le plus adapté pour la résolution du problème.

- Quel **dispositif** mettre en place ?

## Investigation sur le terme de « démarche » (d'investigation)

Manière d'avancer dans un raisonnement, manière de penser ; *p. méton.* raisonnement, pensée. *Démarche dialectique.*

av. 1662 au fig. « manière de progresser (de la raison, de la pensée) » (Pascal, *Pensées*, XIII ds *Œuvres complètes*, éd. L. Lafuma, p. 524)

## Investigation sur le terme « investigation » : origine

**Etymologie** : lat. *investigatio*, de *vestigium*, trace. *Investigatio* signifie « recherche attentive » ; le verbe *investigo* signifiant « chercher (suivre) à la piste, à la trace. Rechercher avec soin, scruter » (Gaffiot, 2001). Investigateur v. 1500, « qui cherche la pierre philosophale »

**Traduction** depuis l'américain de « Inquiry based teaching » et « Evidence based work »

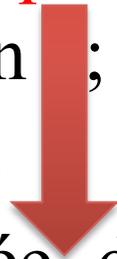
**Au plan institutionnel** : les programmes français (2002, 2005, 2008), *Plan de rénovation de l'enseignement des sciences et de la technologie à l'école* (MEN 2000 et 2001), *L'enseignement scientifique aujourd'hui : une pédagogie renouvelée pour l'avenir de l'Europe* (Commission Européenne, 2007)

## Retour au sens premier d'investigation

*Investigo* : « chercher (suivre) à la piste, à la trace.  
**Rechercher** avec soin, scruter ».



Chercher à connaître ; chercher avec soin, méthode, réflexion. Faire une **enquête** sur la vie, les activités, la conduite de quelqu'un ; exercer des poursuites à l'encontre de quelqu'un.



Toute **recherche**, menée dans des secteurs variés en recueillant les réponses et témoignages des personnes ou en rassemblant des documents, donnant lieu à un rapport écrit.



INSTITUT  
FRANÇAIS  
DE L'ÉDUCATION

## Un multiplicité d'approches pour la démarche d'investigation

### *Recherches en Éducation*

N°21 - Janvier 2015

**Les démarches d'investigation et leurs déclinaisons  
en mathématiques, physique, sciences  
de la vie et de la Terre**

Numéro coordonné par  
Bernard CALMETTES & Yves MATHERON

Maschietto résume alors la situation en relevant que, actuellement, il n'existe pas de réelle forme de consensus dans le monde des institutions éducatives des États et dans le monde de la recherche sur ce que sont ou sur ce que devraient être précisément les démarches de type investigation. Ce que l'on repère dans les publications des recherches dans lesquelles sont mises en œuvre des analyses des curriculums formels et réalisés relatifs à ces démarches, ce sont, selon l'auteure, des acceptions qui « constituent un miroir de diverses représentations des démarches d'investigation » (Maschietto, 2010, p. 190).

## Récapitulation à partir du sens premier d'investigation et conséquences

- La DI nécessite une question dont on va rechercher avec soin, grâce à une enquête (travail des élèves dirigé par la professeur), le recueil de « réponses et témoignages des personnes (propositions trouvées par la classe et validées par une confrontation dialectique entre ce qu'on trouve dans divers médias et leur preuve), donnant lieu à un rapport écrit (institutionnaliser puis consigner l'important de la réponse : des éléments de savoir) »
- La question de la question n'est pas posée dans le texte du programme français, ni non plus les outils (les gestes que doit ou non accomplir le professeur) pour la direction et la gestion de l'enquête

# Un exemple de propositions de DI (trouvé sur Internet) et les questions qu'il soulève

Document élève

Document professeur

## TP INVESTIGATION : Cylindrée d'un moteur

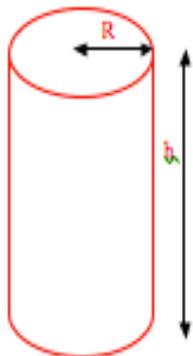
### 1 : Problème :

Au sein d'une classe de première BEP Mécanique auto, le professeur d'atelier demande à ses élèves de relever des côtes sur un moteur de voiture (Audi, V6, 2,5L) dans le but de calculer la cylindrée totale du moteur et de la comparer avec les données techniques du constructeur.

Deux élèves ont malheureusement omis de relever une des côtes importantes : l'alésage, indispensable pour calculer la valeur de la cylindrée.

A partir des données techniques du moteur et de la formule permettant de calculer le volume des cylindres, ils vont essayer de retrouver la valeur de l'alésage.

### 2 : Identification de la formule pour calculer le volume d'un cylindre :



### 3 : Analogie entre les lettres de la formule et les côtes mesurées :

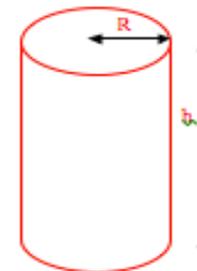
### 4 : Calcul du volume d'un cylindre à partir du volume totale : moteur 6 cylindres

### 5 : Transformation de la formule :

### 6 : Calcul de l'alésage :

## TP INVESTIGATION : Cylindrée d'un moteur

### 2 : Identification de la formule pour calculer le volume d'un cylindre :



$$V = \pi R^2 h$$

Unités : R et h en mm  
V en mm<sup>3</sup>

### 3 : Analogie entre les lettres de la formule et les côtes mesurées :

Course du piston : C  $\longleftrightarrow$  hauteur du cylindre : h  
Alésage du piston : a  $\longleftrightarrow$  diamètre du cylindre : 2R  
Il faut retrouver R qui correspond à l'alésage.

### 4 : Calcul du volume d'un cylindre à partir du volume totale : moteur 6 cylindres

$$V = \frac{V_T}{6} = \frac{2,5}{6} = 0,417L$$

$$\text{Conversion en mm}^3 : V = 4,17 \times 10^5 \text{ mm}^3$$

### 5 : Transformation de la formule :

$$V = \pi R^2 h$$

$$R = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$$

### 6 : Calcul de l'alésage :

$$C = 86,4 \text{ mm}$$

$$a = 2R = 78,4 \text{ mm}$$

### Remarques concernant le déroulement de la séquence :

Cette séquence s'adresse plus particulièrement à des élèves de BEP mécanique (auto, moto, poids lourd, engins de chantier, etc.....).

Les principaux soucis rencontrés par les élèves sont :

- les conversions (de L en mm<sup>3</sup>)
- la transformation de formule

Ce genre de séquence motive les élèves car elle montre le lien indispensable que l'on peut faire entre l'enseignement général et professionnel. Dans l'ensemble, l'analogie entre les formules mathématiques et celles utilisées à l'atelier n'a pas posé de problème.



INSTITUT  
FRANÇAIS  
DE L'ÉDUCATION

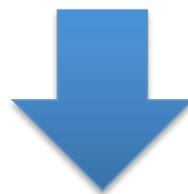
# Deux types de résultats d'enquête ⇒ deux types d'organisations mathématiques

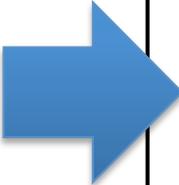
Enquête du 1<sup>er</sup> type : « Combien passe-t-il de cercles par 3 points ? » ⇒ Activité d'étude et de recherche (construction d'une organisation mathématique locale : un chapitre)

Enquête du 2<sup>e</sup> type : « Combien passe-t-il de cercles par  $n$  points ? »

Enquête du 2<sup>e</sup> type : « Comment mesurer l'épaisseur de divers types de feuilles de papier, notamment en les assemblant ? » ⇒ Parcours d'étude et de recherche (construction d'une organisation mathématique régionale : les fractions et leurs opérations)

# Divers types d'enquêtes ou de recherches dans un cadre scolaire



	Finalisé	Non finalisé
Disciplinaire 	AER-PER Ingénierie didactique	Problème ouvert type Erdős-Strauss Recherche en mathématiques
Codisciplinaire	Thème de convergence Prescription institutionnelle	TPE Question ouverte



# Qui mène l'enquête et avec quoi ?

## ⇒ deux formes d'organisations didactiques

1<sup>re</sup> forme : l'enquêteur ⇒ cours magistral & activités des manuels ; ce qui est la forme standard de l'enseignement (enseignant = celui qui montre ⇒ ostension )

2<sup>e</sup> forme : des équipes sous une direction centrale ⇒ enseignement par adaptation ou par direction d'étude

## Conséquences didactiques

*Ostension* directe (cours magistral) ou déguisée (activités des manuels)



*La responsabilité de produire la réponse incombe au professeur, qu'est devenue la question ?*

Un enseignement par la recherche (rare, ingénierie didactique et de développement)



*La responsabilité de faire rencontrer la question par les élèves et de leur faire produire la réponse incombe au professeur*



# La démarche d'investigation nécessite de changer de direction

**Faire vivre par les élèves les mathématiques comme réponses à des questions au sein d'une enquête dont ils partagent la responsabilité de la construction de réponse**

**Dévoluer l'instruction de questions aux élèves**

Les réponses, produites par la classe sous la direction du professeur, sont des mathématiques du programme

Elles peuvent être partiellement fournies par le professeur en tant que média pourvu que les questions aient été rencontrées par les élèves



INSTITUT  
FRANÇAIS  
DE L'ÉDUCATION

## Que faire ? Des conditions ignorées par le système et des contraintes

- . Motiver l'étude *à partir d'une question problématique dévolue* aux élèves,  $\Rightarrow$  capacité à mener des *analyses mathématiques et didactiques a priori*
- . Etudier les conditions de réalisation effective de telles propositions d'enseignement  $\Rightarrow$  *analyses mathématiques et didactiques a posteriori*
- . *Laisser du « jeu »*, sous contrôle théorique *a priori*, au professeur

Mais pour la réalisation de ces trois préalables, il faut :

**des collectifs pour concevoir de telles ressources, la capacité de la profession à s'en emparer pour s'en servir, de la formation**



INSTITUT  
FRANÇAIS  
DE L'ÉDUCATION

## Que faire ? Des réponses : PERMES

**ELEVES**  
Dynamique de  
l'étude de **la**  
question et de  
recherche  
entraîne vers  
sous-questions

**PROFESSEUR**  
Rechercher  
questions  
génératrices  
en remontant aux  
niveaux secteurs  
et domaines

En rompant  
définitivement avec  
des textes à questions  
enchaînées pré écrites  
par le professeur !  
Mais **en dévoluant** aux  
élèves la  
responsabilité **de se**  
**poser des questions...**

**PROF**  
Non pas  
morceler le  
savoir en le  
découpant en  
sujets

**ÉLÈVE**  
Remonter  
par lui-même  
pour établir  
des liens, du  
sens

## Conclusion

La route est longue et suppose :

- de la volonté,
- des moyens humains en recherche et développement,
- une authentique formation universitaire des enseignants !...

**MERCI POUR VOTRE ÉCOUTE !**