Brouillon pour la deuxième séquence

La question qui reste à l'ordre du jour est celle avec laquelle se termine la première séquence : ***« comment se fait-il que l'image d'une droite (resp. un segment) soit une droite (resp. un segment) parallèle ? »***

Le cas de la droite passant par le centre n'étant pas susceptible d'engendrer une question autre que celle du constat : la demi-droite a pour image la demi-droite opposée (ou encore si une droite passe par le centre de symétrie, elle est globalement invariante).

Ce constat permet de revoir les conventions :

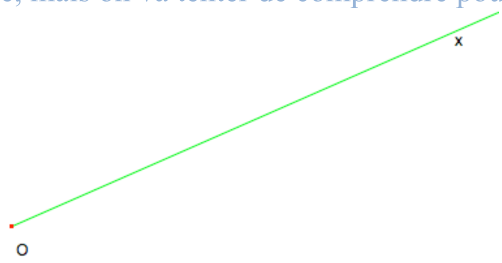
- deux droites sont dites sécantes lorsqu'elles ont un et un seul point commun
- ***dans le plan,*** deux droites sont dites parallèles lorsqu'elles ne sont pas sécantes ; parmi les droites parallèles on distingue les droites confondues qui ont une infinité de points communs et les droites strictement parallèles qui n'ont aucun point commun.

La ***première partie*** est constituée des exercices traditionnels sur la symétrie centrale, que l'on peut identifier selon les types de tâches suivants : construire des symétriques (point, segment, cercle, polygones) à l'aide de diverses techniques (quadrillage, règle-compas, utilisation des propriétés des conservation), reconnaître des figures ayant un centre de symétrie, démontrer que des longueurs sont égales, que des angles sont égaux, calculer des aires, etc. Une grande partie de ces exercices sont ceux que l'on choisit dans les manuels. Une autre partie est constituée de ceux que l'on fera passer en classe pour compléter l'inventaire des constructions de symétriques.

1^{re} partie

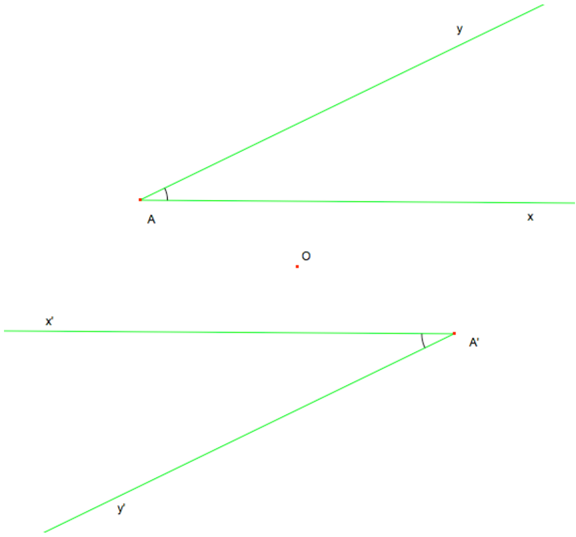
La question est toujours la même : ***« comment se fait-il que l'image d'une droite (resp. un segment) soit une droite (resp. un segment) <u>parallèle</u> ? »***

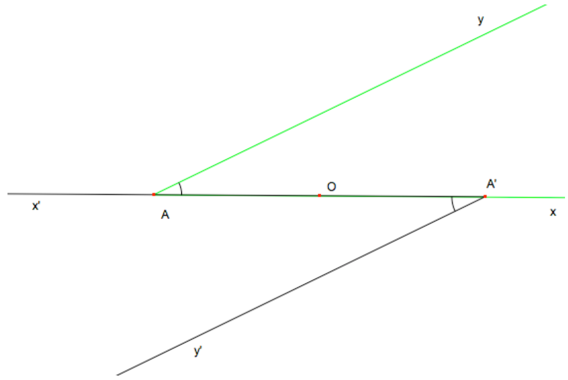
Le professeur indique que, comme cela a été déjà fait précédemment, on va tout d'abord commencer par simplifier la question en se plaçant dans un cas particulier : celui d'une demi-droite qui a pour origine le centre de la symétrie O. On sait qu'alors sa symétrique par rapport à O est la demi-droite opposée, mais on va tenter de comprendre pourquoi en le démontrant.



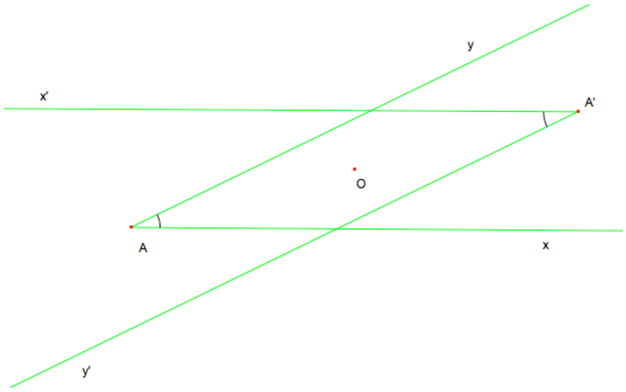
Il est fort possible que les élèves disent qu'alors il est évident que les points sont « de l'autre côté ». Si on leur demande pourquoi, ils peuvent s'appuyer sur un raisonnement, plus ou moins bien formulé, mais que l'on peut décrire de la façon suivante.
Si on prend un point M sur $[Ox)$, son symétrique M' est tel que O est le milieu de $[MM']$, donc M' appartient à la droite (OM), et comme il ne peut appartenir à $[OM)$, c'est-à-dire à $[Ox)$, car alors O ne pourrait être le milieu de $[MM']$, alors M' est sur la demi-droite opposée à $[Ox)$.
Ce raisonnement est juste mais montre seulement que $S_O([Ox)) \subset [Ox')$. Il est nécessaire de mener à bien le raisonnement qui conduit à l'inclusion réciproque, et pour cela de démontrer qu'étant donné un point M_1 de $[Ox')$, alors il est l'image d'un point de $[Ox)$ par S_O… Cela risque de nous mener fort loin ($S_O^{-1} = S_O$) sans que l'on entraîne l'adhésion des élèves à la nécessité d'une telle démonstration ! On suppose donc l'inclusion réciproque en faisant construire la symétrique de la demi-droite symétrique : les élèves étant convaincus que la partie directe est suffisante.

Ayant établi que l'image d'une demi-droite est une demi-droite, on peut s'intéresser à l'image d'autres figures géométriques, par exemple d'un angle (deux demi-droites de même origine). Quatre cas se présentent pour la position du centre de symétrie : dans le secteur saillant, dans le secteur rentrant, sur un côté, sur le sommet :

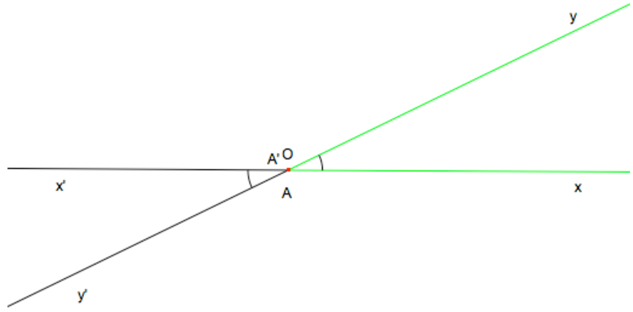




On obtient une sorte de Z !

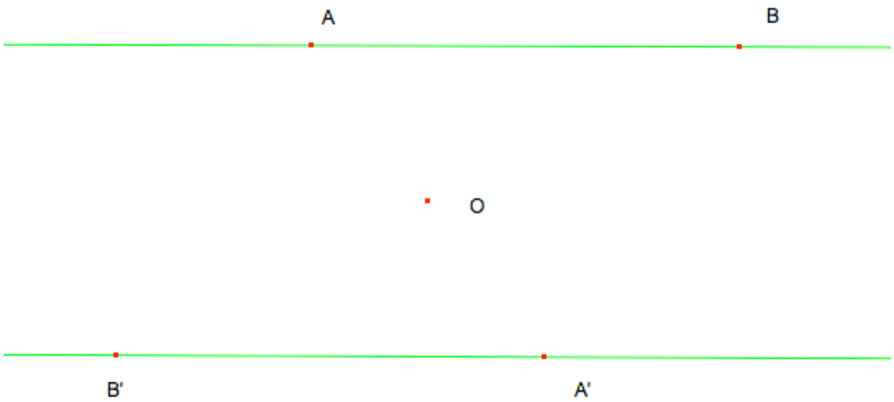


On obtient une sorte de parallélogramme ! Est-ce si étonnant ?



Les angles $x\hat{O}y$ et $x'\hat{O}y'$ sont opposés par le sommet : ***deux angles opposés par le sommet sont égaux***

Il est temps d'en venir à la réponse à la question du parallélisme d'une droite et de sa symétrique dans une symétrie centrale !



La démonstration nécessite ***une rupture de contrat*** dans la mesure où, d'ordinaire, l'énoncé ou la figure du problème contiennent toutes les données permettant de le résoudre. Dans le cas de cette démonstration, il faut rajouter une donnée absente : une perpendiculaire. Cette étape demande donc un accompagnement du professeur à partir des diverses questions qu'il pose.

La nouvelle question qui se pose est la suivante : ***« comment démontre-t-on que deux droites sont parallèles ? »*** avec pour arrière-plan l'exploration du symétrique d'un angle. Cela permet de « fouiller dans la boîte à outils » des résultats qui aboutissent à démontrer le parallélisme.

Il n'en ressortira que peu de résultats utilisables au niveau des connaissances disponibles en début de 5^{e}, en dehors du théorème de CM2, où l'on s'en sert pour tracer des parallèles avec l'équerre, et de la 6^{e} où on le formule, sur les perpendiculaires à la même droite, ou encore sa variante sur le rectangle. On en conclut qu'il faudrait démontrer que si une droite est perpendiculaire à une autre, sa symétrique est aussi perpendiculaire à cette même droite ; donc qu'il faudrait trouver une perpendiculaire commune à deux droites symétriques.

Or, dans cette figure, on peut construire différents angles, notamment à partir de ce qui est le plus facilement visible : les points. Le problème vient du fait qu'aucun des angles n'est droit !
Nouvelle question du professeur : ***« Il n'y a pas d'angle droit dans cette figure, alors comment faire ? »*** La réponse peut être laissée à rechercher assez longuement, notamment hors du temps de la classe, en travail à la maison ; elle est consignée dans le cahier de questions. De même que le sera sa réponse. La question implique quasiment sa réponse : « puisqu'il n'y a pas d'angle droit, il faut en fabriquer ! » Cette réponse peut paraître triviale, mais elle ne l'est généralement pas si on la rapporte au contrat didactique dans lequel sont plongés les élèves : à ce niveau, une règle implicite veut qu'un énoncé ou une figure contiennent tous les éléments nécessaires pour la construction de la réponse. Dans ce cas, il faut prendre l'initiative de s'autoriser à aller au-delà de ce qu'indique la figure : rajouter une droite, et en plus, pas n'importe comment.
Une question peut être posée par le professeur si l'initiative du tracé d'une perpendiculaire à une droite n'est pas prise par les élèves : ***« dans les figures que nous avons rencontrées sur les symétriques d'angles, y a-t-il une chose sur laquelle s'appuyer ? »***

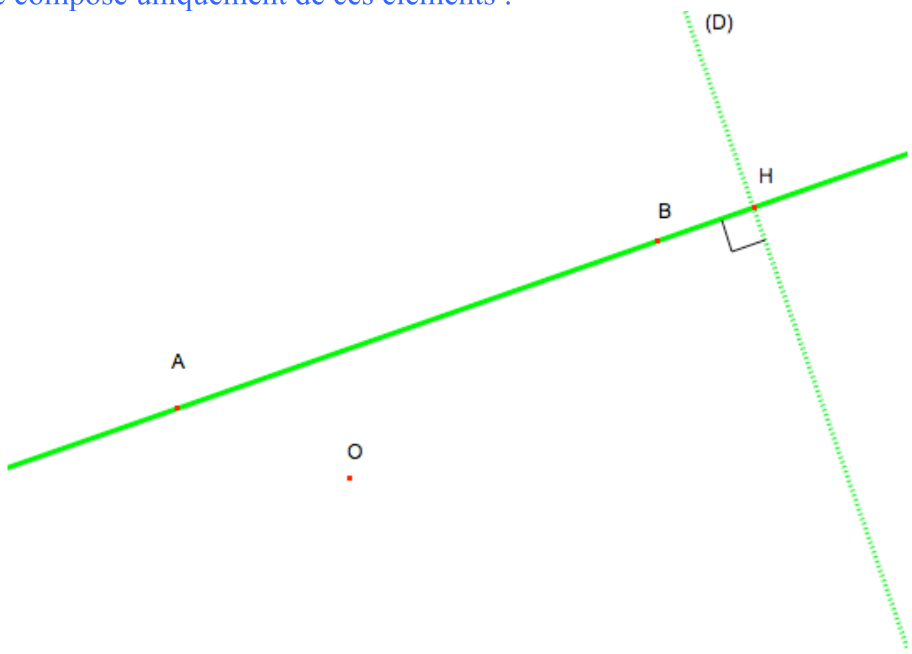
La réponse se fait en deux temps :
- utiliser le symétrique d'un angle droit
- rechercher la position du centre de symétrie qui est la plus judicieuse

On peut donc imaginer que les élèves disent qu'il faut tracer une perpendiculaire. Une nouvelle question : « perpendiculaire à quoi ? » Evidemment, l'observation de la figure initiale ci-dessous, conduit à dire qu'elle est perpendiculaire aux deux droites ! Ce qu'on ne sait pas, mais qu'il faut démontrer. Cette figure induit donc des réponses erronées et **c'est au professeur, cette erreur ayant été commise, à proposer de travailler par étapes.**

La première étape consiste donc à tracer (AB), le point O centre de symétrie et une droite (D) perpendiculaire à (AB), puis à effectuer la symétrie de centre O de la figure ainsi construite. On peut donc procéder ainsi. On recommence le tracé d'une figure avec (AB), O et (D) perpendiculaire à (AB) en H. Puis on fait tracer les symétriques de (AB) et (D) par rapport à O. On observe ce que l'on obtient. On peut par exemple éviter le tracé des horizontales et verticales ; ce qui donnent les figures suivantes :

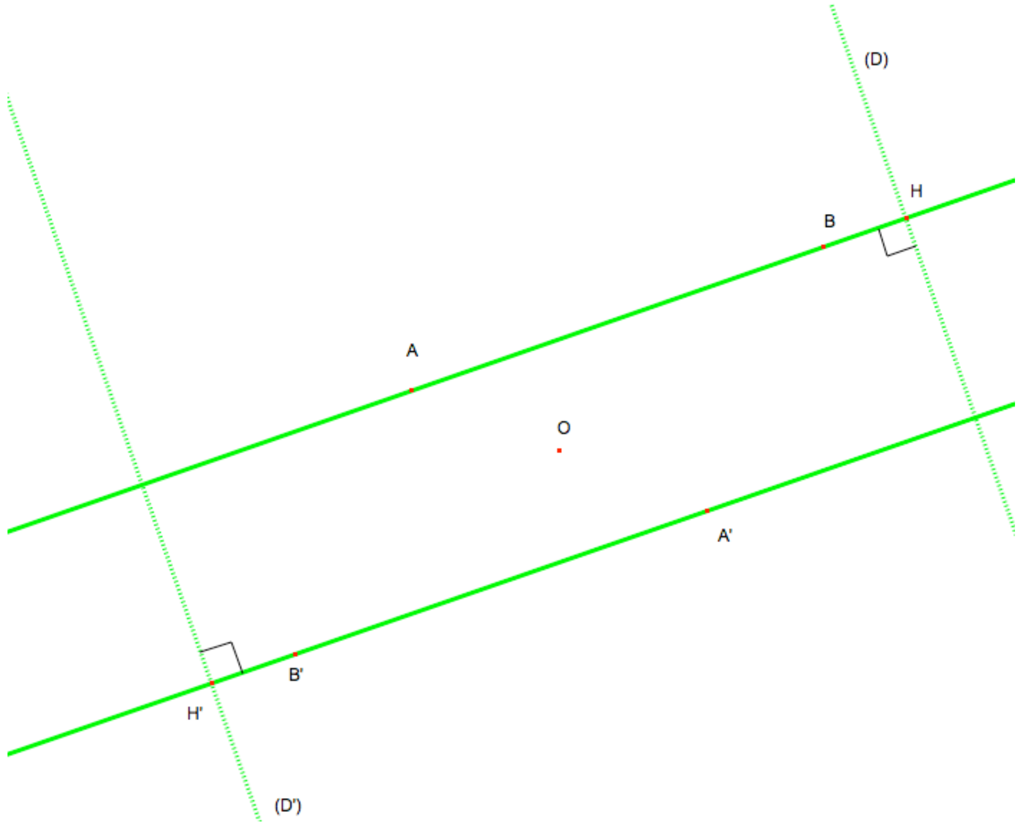
Etape 1

La figure se compose uniquement de ces éléments :



Etape 2

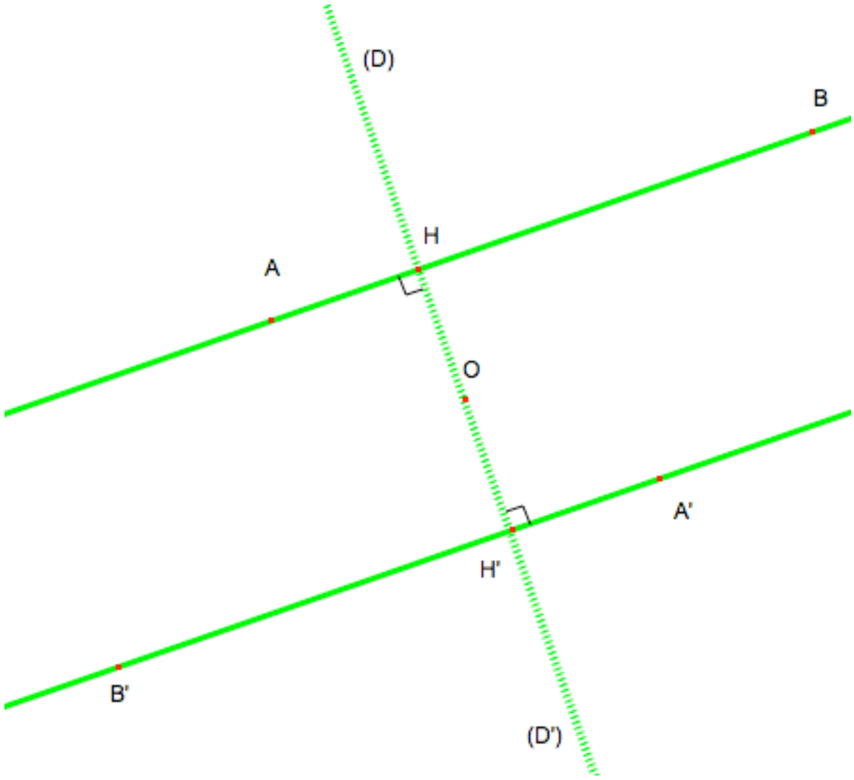
On fait tracer les symétriques de (AB) **ET** de (D) par rapport à O. L'idée est de montrer que **« TOUT SE DÉPLACE »** dans cette figure lorsqu'on effectue la symétrie de centre O et que, précisément, **IL FAUDRA EVITER QUE (*D*) SE DÉPLACE** si on veut utiliser le théorème qui permet de montrer le parallélisme grâce à l'orthogonalité. Autrement dit, on prépare déjà l'idée qu'il faut prendre pour (D) la perpendiculaire à (AB) passant par O.
Les symétriques ayant été construits, on code ce que l'on sait en le justifiant : notamment le plus important ici, le symétrique de l'angle droit. Evidemment, les élèves vont vouloir dire que (D) est perpendiculaire à ($A'B'$), et c'est alors au professeur de demander cette preuve afin de mettre en défaut la croyance que ce qui se voit est ce sur quoi une démonstration peut s'appuyer. Le codage est donc là pour indiquer ce dont on est sûr, parce que cela est établi par démonstration ; autrement dit, le codage indique les seules choses sur lesquelles on peut s'appuyer, et c'est ainsi que l'on continue d'installer dans la classe le contrat didactique sur la démonstration.
On constate ainsi que l'on n'aboutit pas puisque pour pouvoir appliquer le théorème qui conclut au parallélisme, il faudrait avoir établi ***par le raisonnement*** que (D) ou (D') sont perpendiculaires à (AB) **ET À** ($A'B'$).



L'échec de la démonstration amène vers une nouvelle question : ***« Comment faire pour avoir, par symétrie de centre O, une droite image de (D) qui soit à la fois perpendiculaire à (AB) et à (A'B') ? »***

Comme les élèves ont établi que la symétrique d'une droite qui passe par l'origine est cette droite elle-même **(cas revu dans le cas des demi-droites ! Ce qui m'apparaît indispensable…),** on peut s'attendre à ce que la réponse apparaisse. Il est nécessaire de tracer une perpendiculaire passant par *O*.

On a donc une figure dans laquelle le codage fait clairement apparaître que (*D*) et (*D'*) sont confondues et qui fait aussi clairement apparaître la résolution du problème si on code comme ci-dessous les angles droits. A savoir que le fait que l'angle ∢*OH'A'* soit droit implique que l'angle ∢*OH'B'* l'est aussi et donc que l'on a ainsi effectivement obtenu une droite **PERPENDICULAIRE À LA FOIS À (*AB*) ET À (*A'B'*).** Ce qui est effectivement ce que l'on recherchait.



D'où,
Théorème : la symétrique d'une droite dans une symétrie centrale est une droite :
- **strictement parallèle si la droite ne passe pas par le centre de symétrie**
- **confondue si la droite passe par le centre de symétrie**

2^{e} partie

Pour l'instant, cette partie n'est qu'une ébauche qui s'appuie sur une organisation mathématique. Il reste à amplement compléter l'organisation didactique qui n'est qu'effleurée et demande à être travaillée.

La recherche de la démonstration du parallélisme d'une droite et de sa symétrique a conduit à rechercher des angles dans la configuration initiale, et notamment des angles dont les côtés contiennent le centre de symétrie *O*.

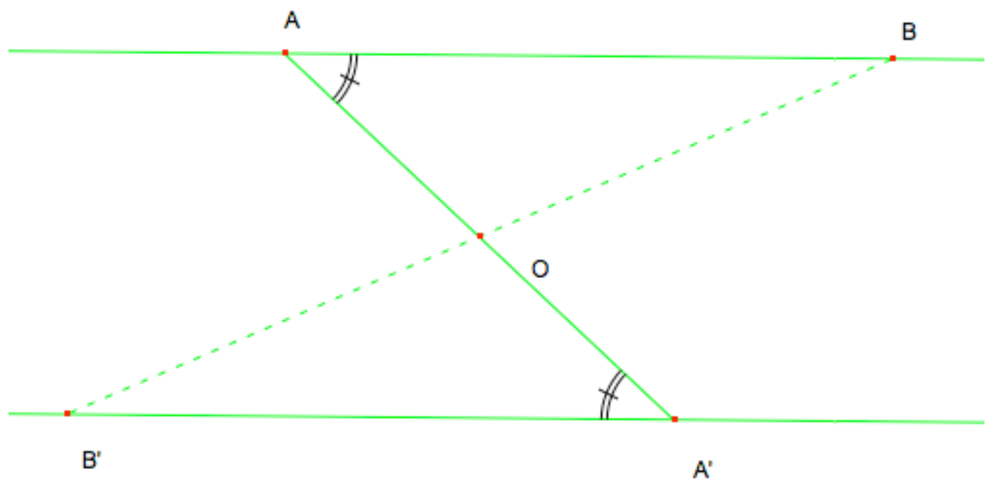
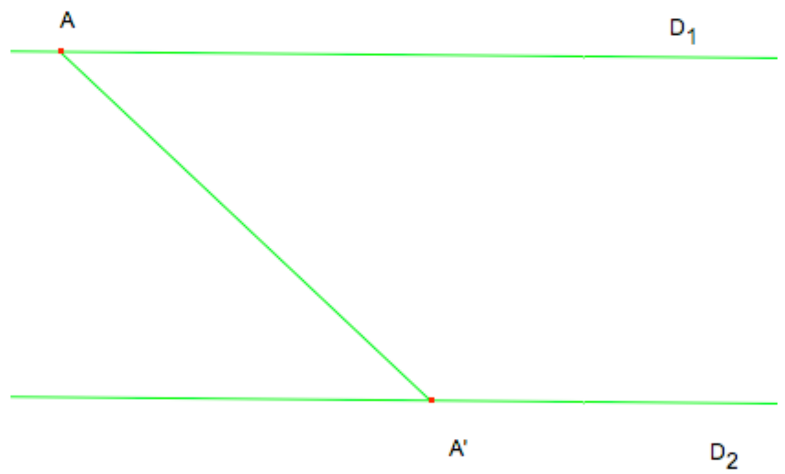
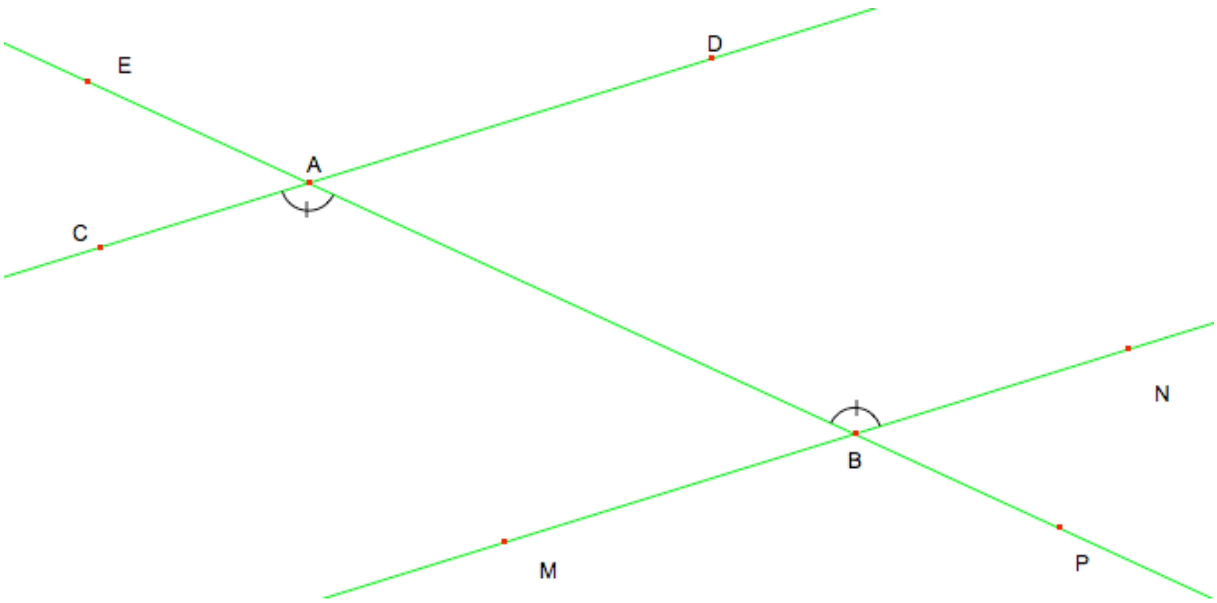


Figure dans laquelle apparaissent des angles égaux en A et A'. La question qui se pose désormais est la suivante : ***« on a vu que la symétrique de (AB) par rapport à O est (A'B') parallèle à (AB) et qu'alors les angles en A et A' sont égaux ; est-ce que lorsqu'on trace deux parallèles et une droite qui les coupent, cela formera des angles égaux ? »***



La réponse consiste, en comparant cette figure avec la précédente, à dire qu'il suffit de retrouver le point O, centre de la symétrie qui transforme A en A' et la droite (D_1) passant par A en une droite parallèle passant par A' ; c'est-à-dire en (D_2), d'après l'axiome d'Euclide. Trouver O n'est pas bien difficile et les élèves vont sans doute dire qu'il suffit de prendre pour O le milieu de [AA']. La figure constituée de (D_1), (D_2) et (AA') admet donc O pour centre de symétrie et il en résulte l'égalité des angles en A et A' puisque la symétrie centrale conserve les angles.

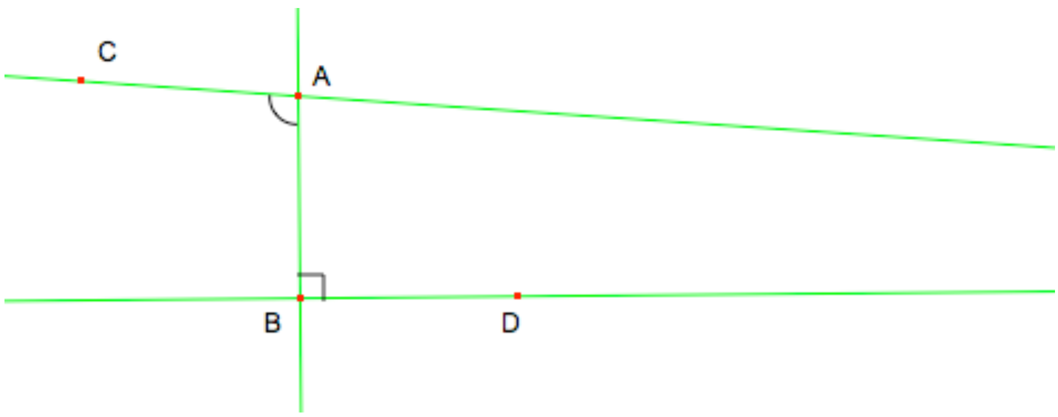
On en conclut :
Théorème : Si deux droites sont parallèles, alors elles forment avec une sécante des angles-alternes internes deux à deux égaux.



Deux questions émergent du théorème et de la figure :

1. ***« Si les angles alternes-internes formés par une sécante avec deux droites ne sont pas égaux, ces deux droites sont-elles parallèles ? »***
2. ***« Sur cette figure, la droite (AB) forme-t-elle avec les parallèles (CD) et (MN) d'autres angles égaux, et si oui pourquoi ? »***

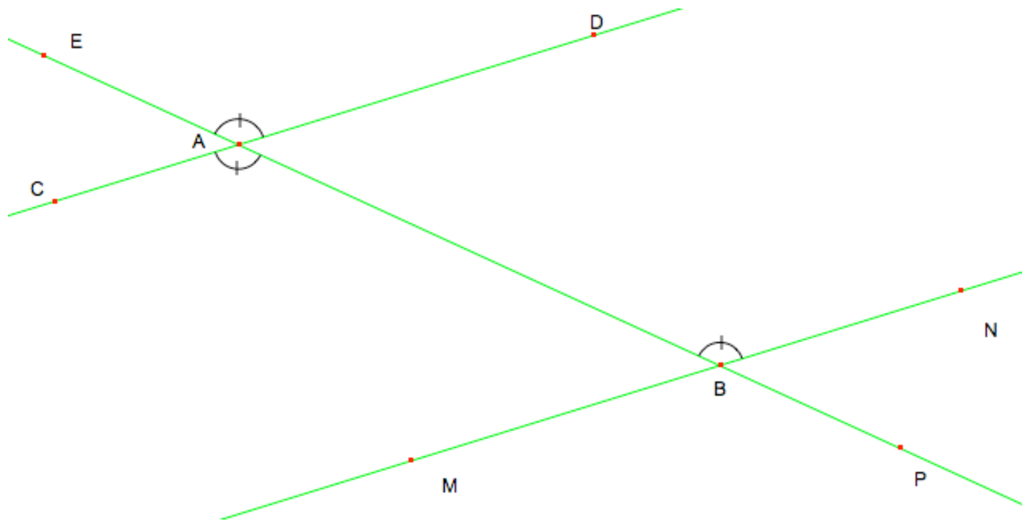
1. La réponse à la question 1 passe sans doute par le constat visuel dans un premier temps, mais peut déboucher sur un raisonnement par contraposition ($p \Rightarrow q$ équivaut à $\neg q \Rightarrow \neg p$) ou par l'absurde : « si les droites étaient parallèles, alors les angles alternes-internes seraient égaux d'après le théorème. Or, ils ne le sont pas ; donc les droites ne peuvent pas être parallèles. »
Une figure éclairante, et qui appelle aussi un raisonnement du même type, est celle où l'un des angles alternes-internes est droit ; alors si l'autre n'est pas droit, la deuxième droite ne peut être parallèle à la première (toujours la contraposition du « célèbre » théorème de 6^e^ sur les droites perpendiculaires à une même troisième, qui est conséquence de l'axiome d'Euclide)



Les angles $\hat{A}$ et $\hat{B}$ ne sont pas égaux et les droites (AC) et (BD) ne sont pas parallèles.
Un seul contre-exemple suffit pour invalider la proposition soumise à la question.
Commentaire : Les réponses à la question 1 permettent de rencontrer des raisonnements mathématiques accessibles aux élèves de 5^e^ : leur « développement

cognitif » est suffisamment avancé pour cela, contrairement à ce que peut en dire une psychologie véhiculée par la *doxa*. Car c'est en faisant des mathématiques que l'on apprend les règles du jeu mathématique ; celles-ci n'étant pas toujours dicibles, donc enseignables… puisqu'enseigner c'est « faire signe », et donc montrer par un moyen quelconque (vision, langage). Or on sait que toutes les règles (mathématiques ou sociales) ne peuvent être dites ou écrites (qui dira la règle qui permet de suivre une règle, et ainsi de suite…), mais implicites ou pratiques, rencontrées en acte. Sans une rencontre avec elles, il ne peut donc y avoir d'apprentissage puisque ce dont on n'a pas organisé la rencontre avec la problématicité ne peut être appris ; tout au moins en mathématiques.

2. Sur la figure, il y a deux autres paires d'angles alternes-internes égaux $\sphericalangle DAB$ et $\sphericalangle ABM$. On peut aussi remarquer que les angles $\sphericalangle DAE$ et $\sphericalangle CAB$ sont égaux car opposés par le sommet, et donc comme $\sphericalangle DAE = \sphericalangle CAB$ et que $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABN$, alors $\sphericalangle DAE = \sphericalangle ABN$. Ces angles sont dits ***correspondants.***

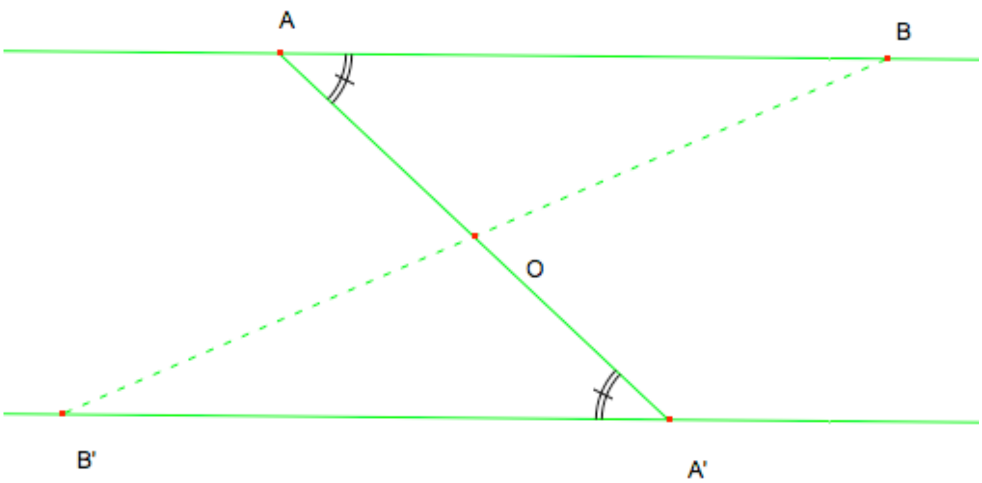


Ce qui conduit à rechercher les autres angles correspondants de la figure et à énoncer un nouveau théorème

Théorème : Si deux droites sont parallèles, alors elles forment avec une sécante des angles correspondants deux à deux égaux.

Il vient en principe une nouvelle question : « et si les angles alternes-internes ou correspondants formés par deux droites et une sécante sont deux à deux égaux, est-ce que ces deux droites sont parallèles ? »

On laisse provisoirement cette question en suspens, pour revenir à la configuration initiale que l'on examine de nouveau : peut-on découvrir d'autres propriétés ?



Apparemment, les droites (*AB'*) et (*BA'*) semblent parallèles. Apparemment aussi il semble que *AB* = *A'B'* et peut-être aussi que *AB'* = *BA'*. Ceci peut-il être établi par le raisonnement ?

Pour le parallélisme, le réponse vient du fait que ces deux droites sont symétriques par rapport à *O* car *A* et *A'* sont symétriques par rapport à *O*, de même que *B* et *B'*. Le quadrilatère *ABA'B'* a donc ses côtés opposés parallèles deux à deux.

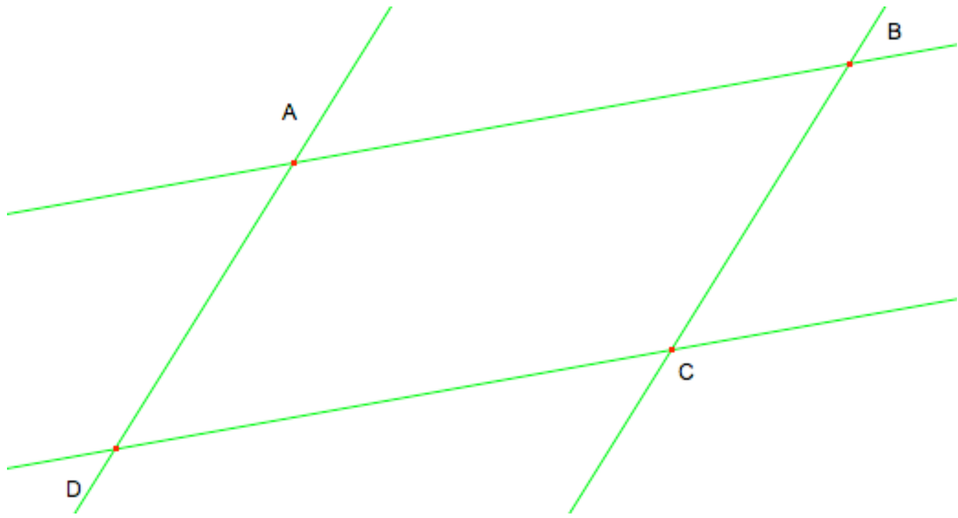
Définition : On appelle parallélogramme tout quadrilatère dont les côtés opposés sont deux à deux parallèles.

Propriété : Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme.

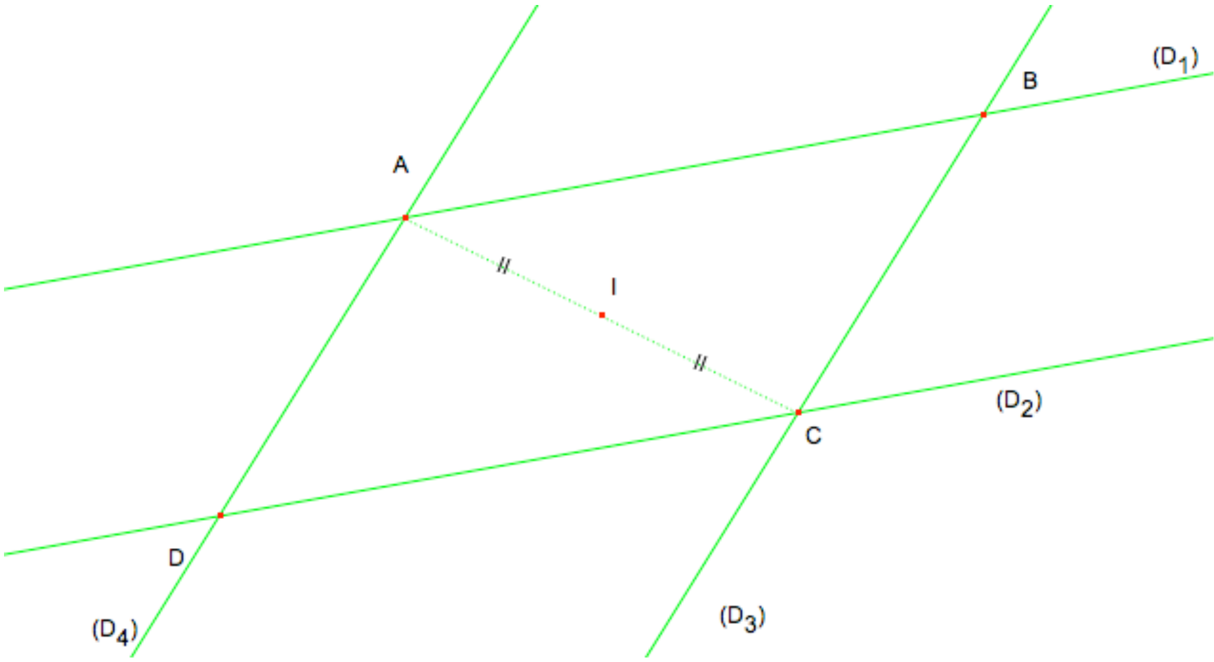
La question qui suit est celle de sa réciproque. Est-ce que dans tout parallélogramme les diagonales se coupent en leur milieu ? La chose est moins facile à établir.
Commentaire : Ci-dessous la démonstration ***que l'on peut sans doute admettre*** si on n'en trouve pas une plus simple… L'idée développée par le document de Bordeaux, *Géométrie au cycle central*, si elle développe l'intérêt de faire rechercher les éventuels centres de symétrie du parallélogramme, ne me paraît guère plus simple. En effet, elle utilise l'intersection des ensembles de centres de symétrie des droites parallèles (il faudrait d'abord prouver que c'est chaque fois une parallèle équidistante, que ces deux ensembles ont une intersection non vide réduite à un point, et que ce point est bien celui qu'on cherche) et ne permet pas de prouver que celui-ci, point d'intersection des médianes, est le point d'intersection des diagonales.
Il faudrait, pour ce dernier point, disposer du théorème de la parallèle passant par le milieu d'un côté d'un triangle. On ne peut guère l'établir que si on connaît déjà la propriété des diagonales du parallélogramme ou que le centre du cercle circonscrit au triangle rectangle est le milieu de l'hypoténuse… Mais comme il paraît que cela est « verboten » par le programme, dont la rédaction n'a sans doute pas été guidée par une construction mathématique réfléchie (c'est-à-dire une organisation mathématique qui ne soit pas « trouée »), on ne va pas braver les interdits ! Ensuite, il faut utiliser l'axiome d'Euclide pour prouver que la parallèle par un milieu coupe l'autre en son milieu. Evidemment, on aurait pu étudier les propriétés du rectangle, puis le transformer en parallélogramme par une affinité qui en conserve quelques-unes dont les milieux, mais alors on pulvériserait le programme…
Revenant à la possible démonstration du théorème sur les diagonales du parallélogramme qui se coupent en leur milieu, sa complexité ne tient pas à une quelconque conceptualisation

inaccessible au « stade de développement » des élèves. Elle tient tout plutôt à des raisonnements mathématiques qu'ils n'ont jamais fréquentés, qui nécessitent plusieurs pas, qui sont guidés par des suppositions relevant d'évidences perçues sur la figure mais que l'on met à l'épreuve, par des définitions dont ils ne sont pas coutumiers (un point défini par deux droites sécantes ou un milieu défini par un centre de symétrie d'un segment), par des théorèmes admis (l'image de l'intersection est l'intersection des images), etc. On décompose cette démonstration en étapes pour mieux percevoir sa difficulté.

Soit un parallélogramme *ABCD*.



La première étape consiste à reformuler la question : est-ce que le milieu de la diagonale [*AC*] est aussi le milieu de la diagonale [*BD*] ? Pour cela il faut nommer, par exemple par *I*, le milieu de [*AC*] et se demander s'il est milieu de [*BD*].

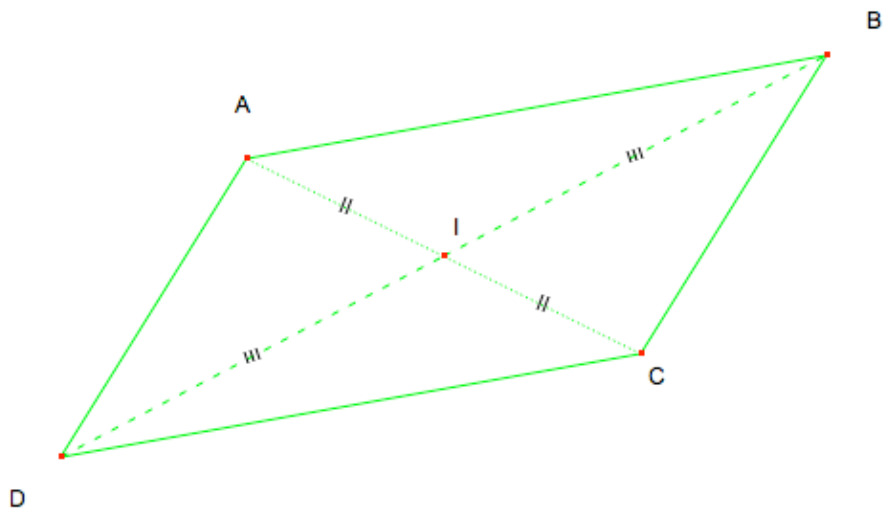


La deuxième étape consiste à faire le lien entre milieu d'un segment et les extrémités du segment qui sont symétriques l'une de l'autre par rapport à son milieu. Démontrer que *I* est le milieu de [*BD*] équivaut donc à démontrer que *B* et *D* sont symétriques par rapport à *I*.

La troisième étape consiste à définir un point comme intersection de deux droites.
Le point B étant le point d'intersection des droites (D_1) et (D_3), son symétrique par rapport à I est le point d'intersection des symétriques de (D_1) et (D_3) par rapport à I. La figure nous indique que ce sont respectivement (D_2) et (D_4). Peut-on le prouver ?
La symétrique de (D_1) qui contient A est la parallèle à (D_1) qui passe par le symétrique C de A. Cette droite est unique d'après l'axiome d'Euclide et c'est (D_2).
La symétrique de (D_3) qui contient C est la parallèle à (D_3) qui passe par le symétrique A de C. Cette droite est unique d'après l'axiome d'Euclide et c'est (D_4).
Ainsi le symétrique de B est le point d'intersection de (D_2) et (D_4) : c'est donc D.
B et D étant symétriques par rapport à I, I est donc le milieu de $[BD]$.
Ce qui prouve que si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales se coupent en leur milieu…

Théorème : Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales se coupent en leur milieu.
Conséquence : Un parallélogramme admet un centre de symétrie : le point d'intersection de ses diagonales.

Remarque : Les élèves (petits) malins pourraient poser la question de savoir si c'est le seul centre de symétrie que possède un parallélogramme, ou encore si une figure peut avoir plusieurs centres de symétrie !... Alors, on répond quoi au-delà de l'argument d'autorité qui ne tiendra pas la route très longtemps ? Car les (petit)s malins peuvent rétorquer que chacun des points d'une droite est centre de symétrie de celle-ci !

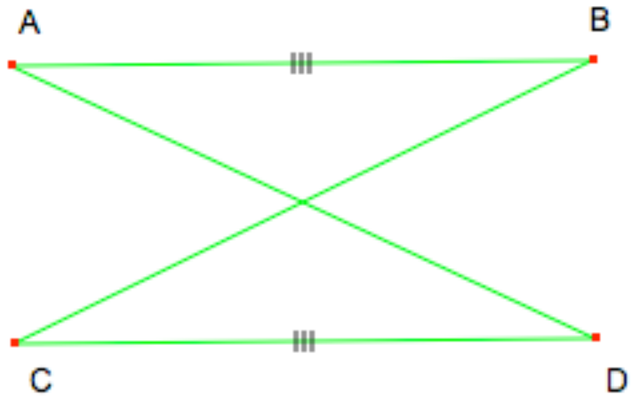


Peut-on désormais prouver les autres propriétés initialement constatées ? Par exemple :
1. ***l'égalité des longueurs de certains côtés ?***
2. ***L'égalité des angles ?***

- La réponse à la question 1 repose sur la propriété de conservation des longueurs par symétrie centrale. D'où $[AB]$ et $[CD]$ qui sont symétriques par rapport à I ont même longueur ; de même que $[AD]$ et $[CB]$.

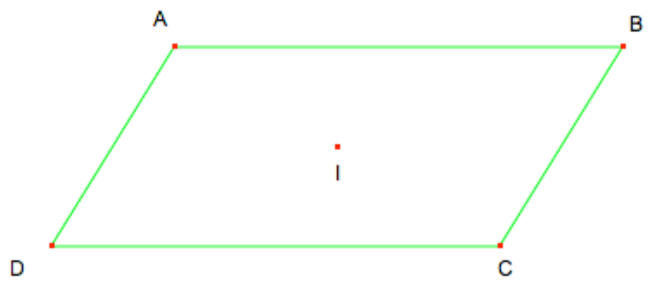
Théorème : Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés sont deux à deux de même longueur.

Commentaire : « Rompus » à la question de la réciproque, les élèves peuvent peut-être poser la question ?!... Intéressante dans ce cas car, telle quelle, elle est fausse comme le montre la figure ci-dessous représentant le quadrilatère $ABCD$ dans lequel $AB = CD$ et $AD = BC$.



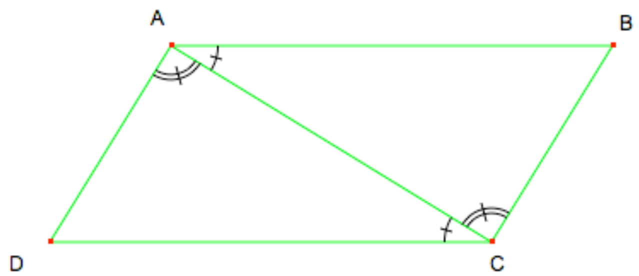
Il faut rajouter la condition « $ABCD$ quadrilatère convexe ». On a ici un exemple de condition nécessaire qui n'est pas suffisante, ou encore de réciproque fausse telle quelle, sans aucun rajout… Ce qui n'est pas si courant au Collège.

- La réponse à la question 2 peut suivre deux voies différentes :
. sur le fait qu'un parallélogramme ayant au moins un centre de symétrie, les symétriques des angles sont des angles de même mesure (ou égaux)



Ainsi les angles $\hat{A}$ et $\hat{C}$ étant symétriques par rapport à I, on a : $\hat{A} = \hat{C}$, et les angles $\hat{B}$ et $\hat{D}$ étant symétriques par rapport à I, on a : $\hat{B} = \hat{D}$.

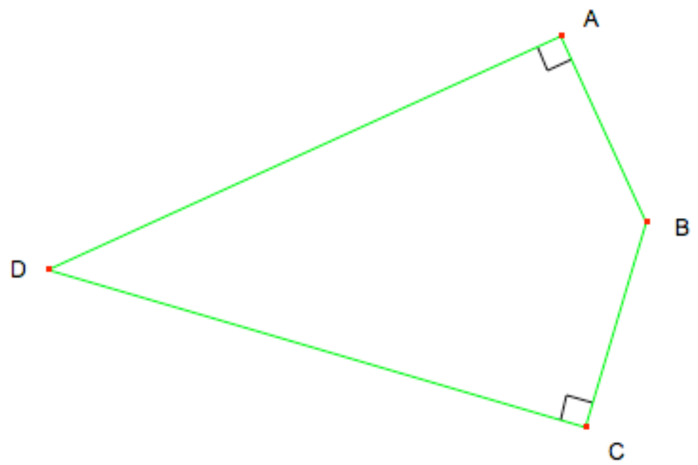
. plus lourdement au plan mathématique, mais pour faire travailler les angles alternes-internes égaux dans le cas des parallèles coupées par une sécante ; la même sécante coupant deux paires de parallèles distinctes.



$\hat{A}$ et $\hat{C}$ étant la somme de deux angles égaux sont égaux et il en est de même des angles $\hat{B}$ et $\hat{D}$.

Théorème : Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses angles opposés sont deux à deux de même mesure.

Commentaire : les élèves ayant « pris le pli de la réciproque », ils devraient se demander si la réciproque est vraie. Autrement dit, si un quadrilatère a ses angles opposés deux à deux égaux, est-ce un parallélogramme ? La réponse renvoie au problème en suspens « si les angles alternes-internes sont égaux, les droites sont-elles parallèles ? ». On a décidé de laisser ce problème de côté, mais il y a néanmoins un cas où l'on peut répondre : le cas des angles droits, autrement dit du rectangle… C'est vrai pour les angles alternes-internes mais faux dans le cas des angles opposés d'un quadrilatère, comme le montre la figure ; néanmoins, cela permet peut-être de faire la transition avec la suite…

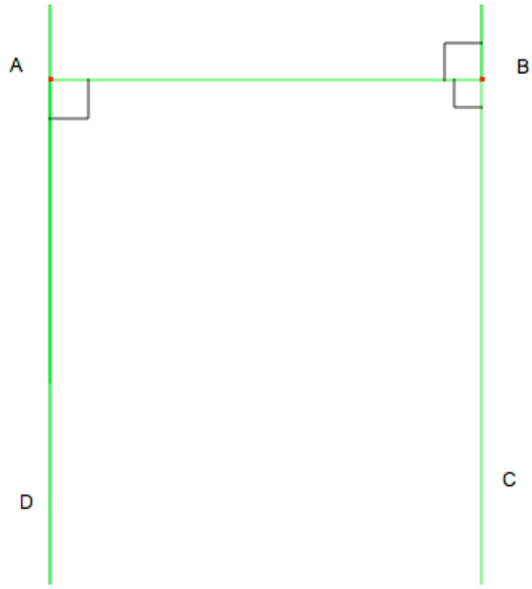


On laisse donc cette question en suspens, comme celle des angles alternes-internes égaux qui implique le parallélisme, mais on transforme un peu la question qui devient :

Question : que devient un parallélogramme s'il a un angle droit ?

La réponse à la question devient intéressante si, dans un premier temps, on ne fait pas construire la figure mais qu'on engage les élèves à raisonner sans figure afin de trouver à quoi on aboutit.

La question devient « comment prouver que si un angle est droit dans un parallélogramme, les trois autres le sont, ou encore deux autres le sont ? », puisque les élèves savent depuis la 6^{e} que s'il y a 3 angles droits dans un quadrilatère, alors c'est un rectangle. Encore une transformation et la question se transforme en : « est-ce que l'angle consécutif à l'angle droit est lui aussi droit ? » Par exemple, « si l'angle $\hat{A}$ est droit, est-ce que l'angle $\hat{B}$ est droit dans le parallélogramme *ABCD* ? »
La réponse repose soit sur les angles alternes-internes égaux car (*AD*) // (*BC*) sont coupées par la sécante (*AB*), soit sur le « théorème standard » une *n*-ième fois ! Par exemple, dans le parallélogramme *ABCD*, comme (*AD*) // (*BC*), alors la droite (*AB*) qui est perpendiculaire à (*AD*) est aussi perpendiculaire à (*BC*). Et donc l'angle $\hat{B}$ est droit. Par suite, comme l'angle $\hat{C}$ est droit puisqu'opposé à $\hat{A}$ dans un parallélogramme, alors *ABCD* qui a trois angles droits est un rectangle.

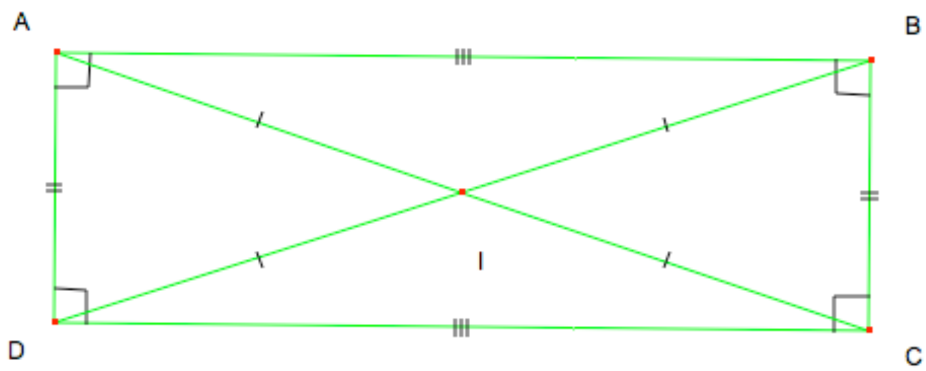


Théorème : Si un parallélogramme a un angle droit alors c'est un rectangle.

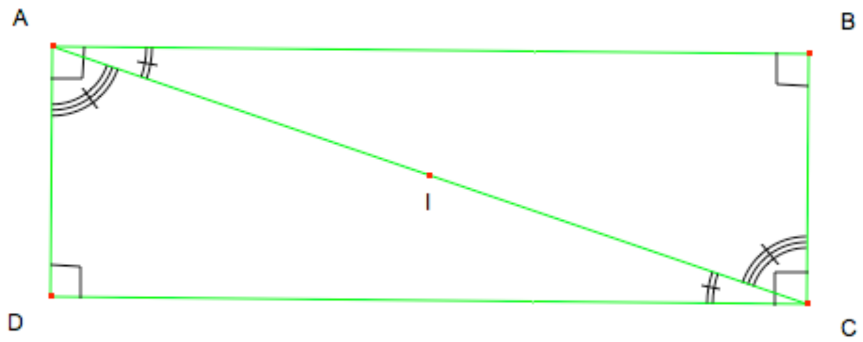
Commentaire : et la réciproque ?... *« Si c'est un rectangle, est-ce un parallélogramme avec un angle droit ? »*... Autrement dit, un rectangle est-il un parallélogramme ? Grand classique des confusions des élèves.

On connaissait déjà certaines propriétés du rectangle vues en 6e, donc on peut compléter pour ce qui concerne les diagonales :
Théorème : si un quadrilatère est un rectangle, alors ses diagonales sont égales et se coupent en leur milieu

Récapitulatif :



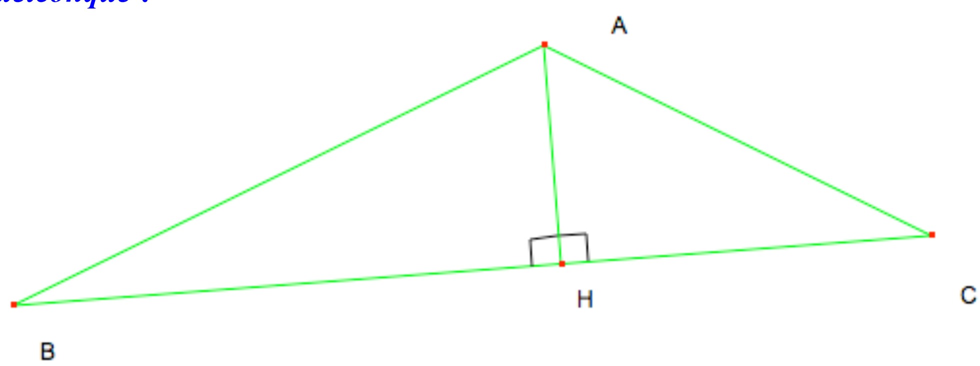
Commentaire : et la réciproque du théorème sur les diagonales ?... Et nous voilà coincés à cause d'un programme imbécile ou… par l'interprétation excessive d'un programme imbécile ! A moins que… on ait démontré auparavant que la somme des angles d'un triangle rectangle est égale à 180°, puis que la somme des angles d'un triangle quelconque est aussi égale à 180°.
Détour :
On reprend donc la figure précédente en la codant différemment :



Dans le triangle ABC, les angles en A et en C sont complémentaires ; c'est-à-dire que leur somme est égale à 90°, comme on peut s'en apercevoir en observant les angles droits $\hat{A}$ et $\hat{C}$ du rectangle $ABCD$. Par suite, la somme des angles du triangle rectangle ABC est 180°.

Théorème : La somme des angles d'un triangle rectangle est égale à 180°. Ses angles aigus sont complémentaires.

***Question :** « **est-ce que cette propriété est vraie dans un triangle quelconque ?** »*
Sous-question : Pour ce faire, peut-on faire apparaître des triangles rectangles dans un triangle quelconque ?

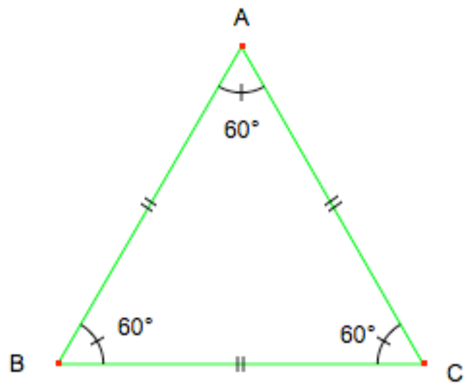


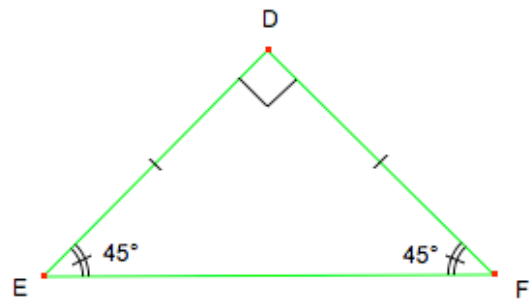
On a : $\sphericalangle ABH + \sphericalangle BAH = 90°$ et $\sphericalangle CAH + \sphericalangle ACH = 90°$. Or la somme des angles du triangle ABC est égale à $\sphericalangle ABH + \sphericalangle BAH + \sphericalangle CAH + \sphericalangle ACH = 90° + 90° = 180°$.

Théorème : La somme des angles d'un triangle est égale à 180°.

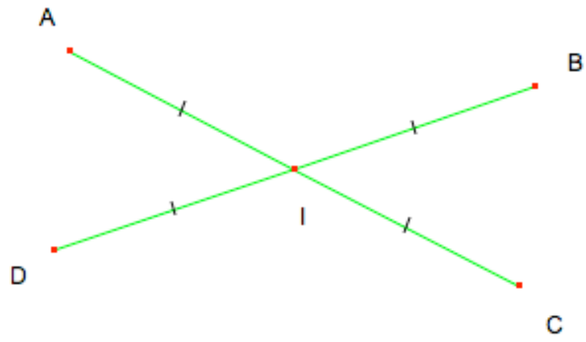
Théorèmes sur les angles de triangles particuliers :

- dans un triangle équilatéral, chaque angle est égal à 60°
- dans un triangle rectangle isocèle, les angles aigus sont égaux à 45°





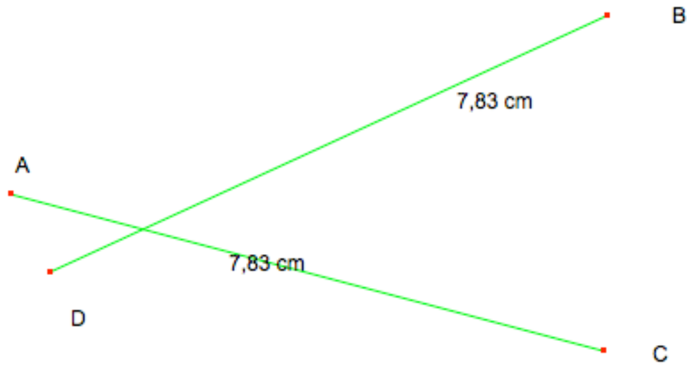
Fin du détour :
On peut alors partir de nouveau à la quête du théorème réciproque sur les diagonales !



Comme IAB est isocèle de sommet principal I et que la somme des angles d'un triangle est égale à 180° : $2 \times \sphericalangle IBA + \sphericalangle AIB = 180°$.
Comme ICB est isocèle de sommet principal I et que la somme des angles d'un triangle est égale à 180° : $2 \times \sphericalangle IBC + \sphericalangle CIB = 180°$.
Or la somme des angles du triangle ABC est égale à :
$2 \times \sphericalangle IBA + \sphericalangle AIB + 2 \times \sphericalangle IBC + \sphericalangle CIB = 360°$
$2 \times (\sphericalangle IBA + \sphericalangle IBC) + \sphericalangle AIB + \sphericalangle CIB = 360°$
$2 \times \sphericalangle ABC + \sphericalangle AIC = 360°$
$2 \times \sphericalangle ABC + 180° = 360°$
$2 \times \sphericalangle ABC = 180°$
$\sphericalangle ABC = 90°$
Comme le quadrilatère $ABCD$ qui a ses diagonales sécantes en leur milieu est un parallélogramme, et comme de plus il a un angle droit, alors c'est un rectangle !
Remarques :
- le formalisme utilisé dans cette démonstration peut être remplacé par des notations beaucoup légères et davantage manipulables par des élèves !
- ce type de démonstration, mise sous forme de problème, peut constituer un DM

Théorème : si un quadrilatère a ses diagonales égales et qui se coupent en leur milieu, alors c'est un rectangle.

Remarque : On peut voir ce qu'il se passe lorsqu'une des deux conditions n'est pas remplie ; par exemple les diagonales sont égales mais ne se coupent pas en leur milieu.



Mise au point : L'étude précédente nous a fait voir l'importance des diagonales d'un quadrilatère sur la nature de ce quadrilatère. Par exemple, des diagonales égales qui se coupent en leur milieu engendrent un rectangle.

« On peut donc essayer d'étudier si faire varier les diagonales d'un parallélogramme, donc des diagonales qui se coupent en leur milieu, engendre des parallélogrammes de nature particulière. »

Tout d'abord une question : « qu'est-ce qui peut varier à propos des diagonales si on fixe la condition qu'elles se coupent en leur milieu ? »
La réponse attendue est la longueur des diagonales (égales ou pas) et l'angle qu'elles forment.

Remarque : Le recours à un logiciel de géométrie dynamique que peuvent utiliser les élèves permet de faire varier les diagonales et d'observer les types de parallélogrammes obtenus.

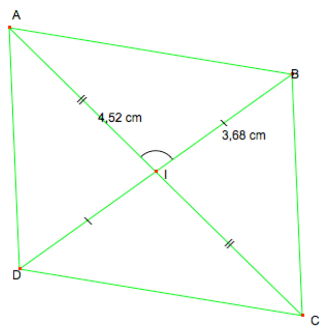
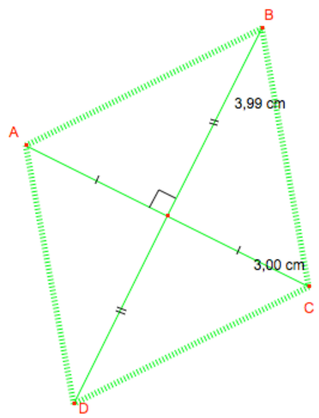
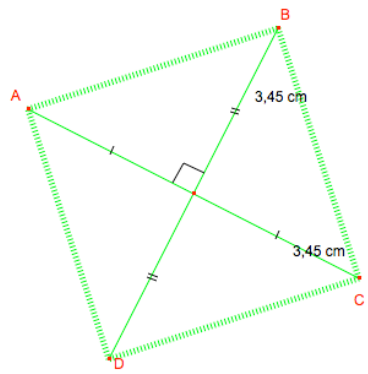


Figure initiale



Une première configuration



Une seconde configuration

Questions : « Comment se fait-il que l'on obtienne un losange (programme de 6^e) lorsque les diagonales sont perpendiculaires, et un carré quand elles sont perpendiculaires et égales ? »

Question indiscrète : les élèves savent-ils qu'un losange est un quadrilatère convexe dont les côtés sont égaux ? Si ce n'est pas le cas, autant commencer par le carré que les élèves ont peut-être déjà rencontré dans leurs études antérieures ! Au-delà de l'ironie, la question est de savoir comment les élèves connaissent-ils ce qu'est un carré. Partons sur la base qu'ils pensent qu'il est nécessaire et suffisant qu'il ait quatre angles droits et quatre côtés égaux.

Dans la seconde configuration, diagonales perpendiculaires en leur milieu et de même longueur, est-ce que le quadrilatère $ABCD$ possède quatre angles droits ?
Comme c'est un parallélogramme dont les diagonales sont égales, c'est un rectangle ; il a donc quatre angles droits.
Dans la seconde configuration, diagonales perpendiculaires et de même longueur, est-ce que le quadrilatère $ABCD$ possède quatre côtés égaux ?
Comme les diagonales sont perpendiculaires en leur milieu, elles sont médiatrices l'une de l'autre. Par exemple $[BD]$ est médiatrice de $[AC]$. Par suite B est équidistant de A et C. Donc $BA = BC$. Comme $BA = CD$ (côtés opposés d'un parallélogramme), alors $BA= BC = CD$. Et comme $BC = AD$ on a finalement : $BA= BC = CD = AD$.
$ABCD$ ayant quatre angles droits et quatre côtés égaux est un carré.

Théorème : Si un quadrilatère a ses diagonales égales et perpendiculaires en leur milieu, alors c'est un carré.

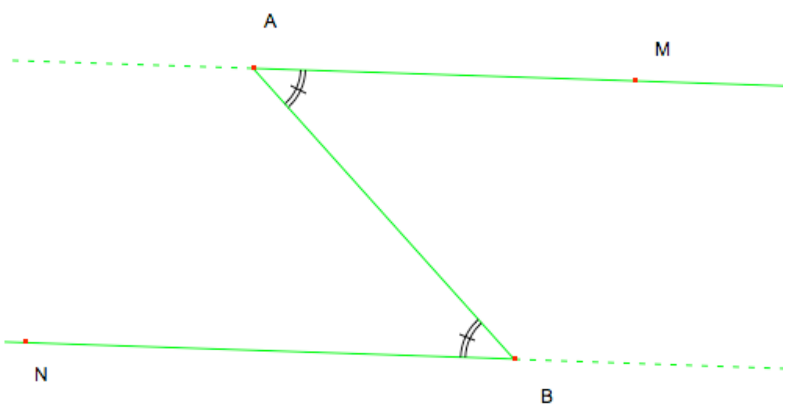
Dans la première configuration, diagonales perpendiculaires en leur milieu, d'après ce qui précède, seule la démonstration permettant de prouver que les quatre côtés sont égaux reste possible. Comme les diagonales ne sont pas égales, il ne peut s'agir d'un rectangle, donc aucun angle de $ABCD$ ne peut être droit.

Théorème : Si un quadrilatère a ses diagonales perpendiculaires en leur milieu, alors c'est un losange.

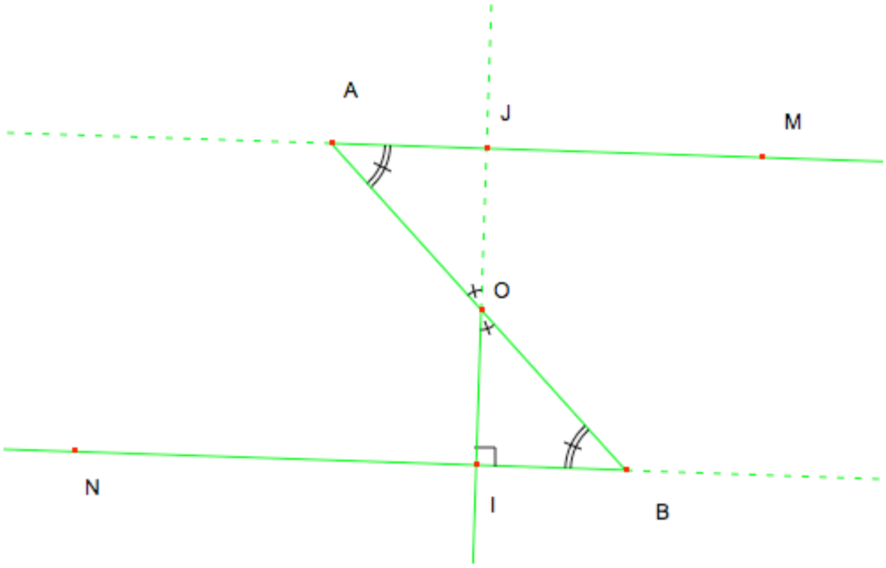
Est-ce que les théorèmes réciproques n'ont pas été déjà plus ou moins établis en 6^{e} ? A savoir, si un quadrilatère est un carré, alors ses diagonales sont égales et perpendiculaires en leur milieu et, si un quadrilatère est un losange, alors ses diagonales sont perpendiculaires en leur milieu. Ces résultats ayant en principe été montrés à partir des axes de symétrie. En tout état de cause, une récapitulation sur les parallélogrammes apparaît nécessaire.

On avait laissé une question en suspens : « Si les angles alternes-internes ou correspondants formés par deux droites et une sécante sont deux à deux égaux, est-ce que ces deux droites sont parallèles ? »

La figure est la suivante :



Et la question : étant donnés une sécante (AB) formant avec deux droites (AM) et (BN) des angles alternes-internes $\hat{A}$ et $\hat{B}$ égaux, les droites (AM) et (BN) sont-elles parallèles et pourquoi ?
Une fois de plus, un des rares théorèmes disponibles pour montrer le parallélisme de deux droites est celui des droites perpendiculaires à une même troisième.
Autrement dit, si une droite (IJ) est perpendiculaire à (BN), est-elle aussi perpendiculaire à (AM) ?



Dans les triangles OIB et OAJ, les angles $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont égaux et les angles $\sphericalangle IOB$ et $\sphericalangle JOA$ de même car ils sont opposés par le sommet. Or $\hat{B} + \sphericalangle IOB = 90°$ puisque le triangle OIB est rectangle en I. Par suite $\hat{A} + \sphericalangle JOA = 90°$. Comme la somme des angles du triangle OAJ est égale à 180°, alors l'angle $\sphericalangle AJO$ est droit.
Par suite, les droites (AM) et (BN) étant toutes deux perpendiculaires à la droite (IJ), elles sont parallèles.

Théorème : Si une sécante forme avec deux droites des angles alternes-internes égaux, alors ces deux droites sont parallèles.

Une question reste à traiter : et si la sécante forme des angles correspondants égaux, les droites sont-elles parallèles ? la question peut être donnée à rechercher en devoir.