La multiplication des relatifs

On décide de placer immédiatement les élèves dans **D**. En effet, dans **Z**, la première rencontre avec le calcul d'un produit du type « un positif fois un négatif », $n \times (-m)$ avec n et m entiers naturels, peut déboucher sur la technique $\underbrace{(-m)+(-m)+...+(-m)}_{n\,termes}$. C'est-à-dire sur l'extension à **Z** de la définition de la multiplication dans **N** vue comme addition itérée. Ce n'est pas en soi un problème, mais cela le devient au plan didactique dans la mesure où il retarde le recours à la distributivité et cantonne la définition du produit à une définition qui n'est opératoire que dans **N** et dont on sait qu'elle se constitue souvent en obstacle didactique lorsqu'il faut enseigner le produit de deux décimaux en 6^{e}. Autant donc éviter de réactiver en 4^{e} ce qui favorise chez les élèves le retour vers cet obstacle. De plus, si l'on suit la voie qui fait rencontrer l'extension de la multiplication comme addition itérée, alors le recours à l'extension de la distributivité intervient au moment de la détermination du produit de deux entiers négatifs, et il se pose de nouveau pour chacun des cas concernant la règle des signes pour des décimaux relatifs.

Les considérations qui précèdent nous conduisent à décider de faire vivre immédiatement l'extension à **D** de la distributivité et de la commutativité de la multiplication dans $\mathscr{D}$, en engageant les élèves à rechercher à enlever la problématicité des calculs de produits dans **D**, et non pas d'abord dans **Z,** puis ensuite dans **D**.

I. Première rencontre avec la problématicité du calcul du produit de deux relatifs et exploration du type de tâches relevant de cette problématicité

1re possibilité

Le choix de départ consiste à replonger les élèves dans des calculs sur les relatifs, au cours desquels on rencontre le produit d'un positif par un négatif comme problème que l'on aura à résoudre.

On propose donc, à titre de reprise de ce que l'on a appris sur les relatifs en 5^{e}, des calculs du ***type*** des suivants, ***à effectuer mentalement***, sans la calculatrice, à raison de quelques minutes en début d'heure, avant de passer à autre chose :

Sommes algébriques : 35 – 17 ; 23 – 48 ; -5,4 + 9,2 ; 10,7 – 12,2 ;

Parenthèses et sommes d'opposés : -3 – (5 – 2) ; -3 + (5 – 2) ; (-1,1 – 2,2) – 3,3 ;

-1,1 – (2,2 – 3,3) ; 1,5 + (7 – 8,5) ; (1,5 + 7) – 8,5 ; (-1,6 – 0,8) + 2,4 ; -1,6 – 0,8 + 2,4

Produits (comme on a, auparavant, calculé des sommes algébriques en respectant les priorités des parenthèses, il y a une forte probabilité pour que les élèves continuent dans les calculs suivants, d'autant que développer engage dans des calculs quasiment impossibles à mener « de tête ») : 5,1 × (-2,3 + 12,3) ; 2 × (-4,8 + 5,4) ; (-6,5 + 9,5) × 9,1 ;

(8,4 + 1,6) × (-11,2 + 15,4) ; (-1,8 + 7,8) × 999.

2^de^ possibilité

Il peut apparaître étrange aux élèves de reprendre les calculs sur les relatifs qu'ils « connaissent » de la classe de 5^e^… Il est aussi possible que cela apparaisse comme une perte de temps, aussi bien pour les élèves que pour le professeur. Aussi peut-on directement engager les élèves dans la démarche suivante de laquelle émerge le problème, mais que les élèves ne reconnaîtront peut-être pas tout de suite et qu'il faudra alors que le professeur mette en exergue :

Calculer ***mentalement*** : 5,1 × (-2,3 + 12,3) ; 2 × (-4,8 + 5,4) ; (-6,5 + 9,5) × 9,1 ; (8,4 + 1,6) × (-11,2 + 15,4) ; (-1,8 + 7,8) × 999.

Ces calculs attirent l'attention des élèves sur la nécessité d'effectuer tout d'abord les sommes dans les parenthèses. On passe alors au calcul : 3,8 × (4,7 - 14,7) = 3,8 × (- 10).

Il est bien possible que certains élèves ne voient ni la nouveauté du calcul ni sa difficulté, d'autant qu'il s'agit d'un ***calcul mental***, et qu'ils donnent immédiatement pour résultat -38 ou 38. C'est alors le rôle du professeur de demander la justification du résultat donné et d'indiquer que la classe est face à un nouveau problème, par comparaison avec les calculs précédents. On passe alors à ***l'écriture des calculs précédents*** afin d'observer ce que l'on faisait. Ils se ramenaient tous au calcul du produit de deux décimaux positifs, qu'on a identifiés aux décimaux arithmétiques ; aussi les produits sont ceux que l'on sait calculer dès le CM2 depuis le programme de 2008, et dès la 6^e^ antérieurement.

Le produit 3,8 × (- 10) est, quant à lui, d'un tout autre type. Ce qui débouche sur la question : ***« Comment calculer et justifier le produit de deux nombres relatifs (on peut aussi écrire 3,8 comme +3,8) ? »*** Dans ce cas particulier, ***« comment trouver en le justifiant à quoi est égal le produit +3,8 × (- 10), et plus généralement, comment calculer le produit d'un positif par un négatif ? »***

On est donc confronté à une question large ***Q*** : ***« Comment calculer et justifier le produit de deux nombres relatifs ? »*** C'est au professeur de faire travailler cette question par les élèves, de manière à ce qu'elle se décompose en Q_1 : ***« Comment calculer et justifier le produit d'un positif et d'un négatif ? »***, en Q_2 : ***« Comment calculer et justifier le produit d'un négatif et d'un positif ? »*** et en Q_3 : ***« Comment calculer et justifier le produit d'un négatif et d'un négatif ? »***

De telles questions sont à écrire au tableau, afin que chacun voie et puisse identifier le problème nouveau face auquel on se trouve et que l'on va travailler désormais.

Le champ des réponses données par les élèves est ouvert, et on les recueille. Il est bien possible que les réponses soient données « au hasard », « à l'intuition », et sûrement sans aucune justification mathématique. C'est donc au professeur qu'incombe alors la nécessité de replacer les élèves dans le cadre d'où a émergé le problème : calculer 3,8 × (4,7 - 14,7). Une nouvelle question apparaît. ***Q* : « peut-on inventer des exemples de calculs de la forme d'un nombre à multiplier par une somme ou une différence, qui aboutiraient à écrire les produits d'un positif par un négatif, d'un négatif par un positif, de deux négatifs ? »***

Le recensement et le classement selon le type auquel appartiennent les exemples donnés sont notés au tableau ; on choisit alors d'étudier quelques exemples pour chacun de ces types. L'intérêt de ce travail est la conservation de l'écriture sous forme du produit par une somme algébrique, par exemple 3,8 × (4,7 - 14,7), qui évite d'être immédiatement confronté à des calculs du type 3,8 × (- 10) à partir desquels s'est perdue, parce qu'elle n'est plus visible, l'idée de distribuer 3,8.

II. Recherche de la résolution du problème posé par le produit d'un positif et d'un négatif (ébauche d'une technique), question Q_1, et construction de l'environnement technologique

On divise la classe en trois ou quatre groupes ; chacun des groupes s'engageant dans le calcul d'un exemple différent relevant du type « produit d'un positif par un négatif ».

Attention ! Tous les produits des exemples doivent être du type $m \times (n - p)$, avec m, n et p décimaux arithmétiques et $p \geq n$, et non pas $m \times [n + (-p)]$, sous peine d'être confronté après développement au produit d'un positif par un négatif, $m \times (-p)$; ce qui aboutirait à une impasse.

On travaille par exemple sur 3,8 × (4,7 - 14,7). Il est possible que les élèves soient bloqués et ne proposent aucune piste d'attaque du calcul. Le professeur peut alors rappeler la clause du contrat didactique qui veut que les seuls outils dont on dispose soient ceux que l'on connaît pour les avoir étudiés antérieurement. Quels sont ces outils ? On attend que soient mentionnés l'addition, la soustraction et l'ordre sur les relatifs, ainsi que la distributivité de la multiplication sur la soustraction. Le professeur propose alors, dans ce cas, de se servir de ces outils à bon escient afin d'ôter la problématicité de ce calcul.

On établit ainsi que 3,8 × (4,7 - 14,7) = 3,8 × 4,7 - 3,8 × 14,7 = 17,86 – 55,86 = -38, qui étend « en acte » à **D** la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans $\mathscr{D}$.

Question : « qu'a-t-on établi à l'issue de ce calcul ? » On attend des élèves qu'ils disent que l'on vient d'établir par le calcul et le raisonnement que 3,8 × (-10) = +3,8 × (-10) = -38.

Ce résultat est confirmé sur les 2 ou 3 autres exemples traités par les autres groupes d'élèves. On fait établir et énoncer par les élèves la règle de calcul : « le produit d'un positif par un négatif est le négatif qui a pour valeur absolue le produit des valeurs absolues ».

Ce qui permet de faire noter sur le cahier des élèves :

Multiplication des relatifs

I. Calcul du produit de deux relatifs

1°/ Produit de deux positifs

Le produit de deux nombres positifs est le nombre positif qui a pour valeur absolue le produit des valeurs absolues de ces deux nombres

Exemple : (+12,4) × (+10) = 12,4 × 10 = 124 = +124

2°/ Produit d'un positif par un négatif

Le produit d'un nombre positif par un nombre négatif est le nombre négatif qui a pour valeur absolue le produit des valeurs absolues

Exemples : $3,8 \times (-10) = -38$; $+4 \times (-2,5) = -10$; $0,01 \times (-12) = -0,12$ …

En effet : $3,8 \times (-10) = 3,8 \times (4,7 - 14,7) = 3,8 \times 4,7 - 3,8 \times 14,7 = 17,86 - 55,86 = -38$
$+4 \times (-2,5) = +4 \times (0 - 2,5) = 4 \times 0 - 4 \times 2,5 = 0 - 10 = -10$
$0,01 \times (-12) = 0,01 \times (10 - 22) = 0,01 \times 10 - 0,01 \times 22 = 0,1 - 0,22 = -0,12$
…

Remarque : On peut donc inférer que ce résultat est général. « **Peut-on l'expliquer ?** » est une nouvelle question.

La réponse concernant le signe passe par la comparaison des produits obtenus lors des développements : « dans $2,5 \times 0,1 - 2,5 \times 0,5$ comme $0,1 < 0,5$, alors $2,5 \times 0,1 < 2,5 \times 0,5$ et $2,5 \times 0,1 - 2,5 \times 0,5$ est négatif ». On peut s'attendre à ce que les élèves recourent à ce type de raisonnements, même s'il n'est pas formulé de cette manière. La justification du fait que « la valeur absolue du produit est le produit des valeurs absolues » est plus délicate. Par exemple, pour prouver ce résultat dans le cas de $2,5 \times (-0,4)$, on peut procéder ainsi : « $2,5 \times 0,4 + 2,5 \times (-0,4) = 2,5 \times [0,4 + (-0,4)] = 2,5 \times 0 = 0$ donc $2,5 \times 0,4 + 2,5 \times (-0,4) = 0$; donc $2,5 \times (-0,4)$ est l'opposé de $2,5 \times 0,4$ qui est le produit des valeurs absolues ». On peut remarquer qu'évidemment, calculer cette somme nulle donne directement le signe et la valeur absolue du produit d'un positif par un négatif ; et donc qu'on aurait pu engager tout de suite les élèves dans cette voie, ce qui nous aurait épargné toute la partie relative au développement des produits qui précède. S'il y a sans doute un avantage mathématique à cela, j'y vois aussi un handicap didactique. Car qui, parmi les élèves, peut avoir l'idée de calculer un produit nul pour obtenir le produit d'un positif et d'un négatif ?...

La méthode est très artificielle et je crains fort que dans son enseignement en classe, le topos des élèves soit très réduit ; c'est exactement le contraire de ce que nous recherchons ! Je crois d'ailleurs que cette partie, relative à la justification de la valeur absolue du produit, doit être entièrement prise en charge par le professeur si l'on a décidé de l'établir ; l'essentiel étant que la question ait émergé en classe si c'est le cas. Mais je ne suis pas persuadé que la « démonstration » entraîne la conviction de beaucoup d'élèves...

Des exercices suivent relatifs aux calculs de produits d'un positif par un négatif et que l'on effectue sans recourir au passage par la distributivité : $2,5 \times (-0,4)$; $0,1 \times (-2,5)$; $10 \times (-0,2)$; $+1,6 \times (-0,3)$; $(+4) \times (-10,8)$; $-2,3 \times 5,8$.

III. La poursuite de l'exploration des tâches problématiques sur les produits de deux relatifs, des techniques et technologies

1. Ce dernier calcul, $-2,3 \times 5,8$, sera sans doute effectué par la plus grande partie des élèves sans remarquer qu'il est de nature différente des précédents. Si c'est le cas, le professeur attire l'attention des élèves, qui seront sans doute tentés d'affirmer la commutativité sans plus de façon, sur la nouveauté du calcul. De nouveau, le professeur insiste sur la nécessité de l'établir et demande comment faire.

On peut sans risque alors, penser que pour trouver le produit d'un négatif par un positif, les élèves vont recourir de nouveau à la distributivité, à droite cette fois-ci, ou bien étendre la commutativité de la multiplication de $\mathscr{D}$ à **D**. On peut demander aux élèves de proposer de tels produits de deux décimaux relatifs. Imaginons que l'on se mette d'accord sur le calcul de -2,3 × 5,8. Il y a fort parier que les élèves vont commencer par décomposer 5,8 en somme ou différence et s'aperçoivent très vite que le problème ne peut être ainsi résolu. On en arrive alors à développer -2,3. L'écriture d'une différence de deux positifs apparaît comme une nécessité ; soit, par exemple, (2,7 – 5) × 5,8. On l'écrit : (2,7 – 5) × 5,8 = 2,7 × 5,8 – 5 × 5,8 dans lequel on voit une différence de deux produits à calculer d'abord d'après les règles de priorité des opérations vues comme relevant tout d'abord de $\mathscr{D}$.

On obtient : 2,7 × 5,8 – 5 × 5,8 = 15,66 - 29 = -13,34.

> ***Remarque :*** si les élèves de 4e sont ceux qui ont étudié les relatifs selon ce que nous avons proposé pour la 5e, et dans la perspective d'un PER qui court au long du Collège, il est possible qu'apparaisse l'idée des programmes de calcul. Auquel cas, le produit -2,3 × 5,8 peut être interprété comme « à un nombre on soustrait le produit 2,3 × 5,8, donc on lui soustrait -13,34, donc -2,3 × 5,8 = -13,34 c'est-à-dire –(2,3 × 5,8) ».

On partage de nouveau la classe en plusieurs groupes à qui on attribue la justification de calculs comme, par exemple : -9,2 × (+10) ; -6,4 × (+3,5) ; -0,3 × 4. La classe est alors convaincue des résultats et le professeur fait établir et énoncer par les élèves la règle de calcul : « le produit d'un négatif par un positif est le négatif qui a pour valeur absolue le produit des valeurs absolues ».

Ce qui permet de faire noter sur le cahier des élèves :

3°/ Produit d'un négatif par un positif

Le produit d'un nombre négatif par un nombre positif est le nombre négatif qui a pour valeur absolue le produit des valeurs absolues

Exemples : -3,8 × (+10) = -38 ; -4 × (+2,5) = -10 ; -0,01 × (+12) = -0,12 …

En effet : -3,8 × (+10) = (4 - 7,8) × 10 = 4 × 10 - 7,8 × 10 = 40 – 78 = -38
-4 × (+2,5) = (1 – 5) × 2,5 = 1 × 2,5 - 5 × 2,5 = 2,5 – 12,5 = -10
-0,01 × (+12) = (1 - 1,01) × 12 = 1 × 12 - 1,01 × 12 = 12 – 12,12 = -0,12
…

> ***Remarque relative à l'explication :*** Le signe du produit d'un négatif par un positif se justifie, comme toujours, par le fait qu'on soustrait à un décimal un décimal qui lui est plus grand. Pour justifier la valeur absolue, on peut :

- relancer les élèves dans un calcul de produit nul, en modifiant un peu ce qui porte sur le facteur nul ; par exemple : (-2,5 + 2,5) × 0,4 = -2,5 × 0,4 + 2,5 × 0,4 = 0, donc -2,5 × 0,4 est l'opposé de 2,5 × 0,4, donc c'est -(2,5 × 0,4),
- admettre que c'est évident, parce qu'on étend la commutativité de la multiplication dans $\mathscr{D}$ à **D**,
- revenir aux programmes de calcul (*cf. supra*).

2. Que faut-il étudier maintenant ? Il reste à examiner le cas du produit de deux négatifs.

Une voie mathématique rapide, mais l'est-elle au plan didactique ?, consiste à démontrer que multiplier un nombre par -1 revient à trouver l'opposé de ce nombre. En effet, a étant un décimal relatif, on étend la distributivité à un cas particulier. On obtient ainsi le résultat suivant : $(-1) \times a + a = (-1) \times a + 1 \times a = (-1 + 1) \times a = 0 \times a = 0$. Comme $(-1) \times a + a = 0$, alors $(-1) \times a$ est l'opposé de a. Par suite, m et n étant des entiers naturels, en étendant l'associativité de × à **D**, on a : $(-m) \times (-n) = [(-1) \times (m)] \times (-n) = (-1) \times [(m) \times (-n)] = (-1) \times (-m \times n) = m \times n$. Cela peut-il être transposé ? Comment amener les élèves à se poser ce genre de questions ? J'ai des doutes... Il faudrait commencer par faire calculer des expressions telles que : (-1) × (-5) + (-5) après avoir posé la question « à quoi est égal le produit de deux négatifs ? » et avoir dit qu'on va la simplifier en se contentant, dans un premier temps, du produit d'un négatif par -1.

On propose le calcul (-2,5) × (-4) qui divise la classe quant au résultat : 10 ou -10 ? Ce qui confirme la nécessité d'une preuve : elle contiendra le résultat et sa justification. Certains élèves avancent qu'il serait surprenant que (-2,5) × (-4) soit -10 car on sait que -10 = (-2,5) × 4. Une telle remarque engage dans la voie qui consiste à rechercher si (-2,5) × (-4) et (-2,5) × 4 sont opposés ; c'est-à-

La deuxième voie consiste à revenir à la distributivité, ce dont les élèves ont désormais une certaine habitude, et en s'apercevant que dans ce cas, le produit ne peut pas être quelconque. Par exemple calculer le produit (-2,5) × (-4) en décomposant ainsi (-2,5) × [(-2) + (-2)] ou (-2,5) × [(-6) + (+2)] ne permet pas de résoudre le problème ; on retrouve continuellement, quelle que soit la décomposition, le produit de deux négatifs.

Question : « Comment décomposer judicieusement afin de ne plus obtenir le produit de deux négatifs ? »

La solution réside dans le fait de passer par la soustraction et non plus l'addition. Ainsi (-2,5) × (-4) = (-2,5) × [2 - (+6)] par exemple. On s'engage alors, en acte, dans l'extension de la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction de $\mathscr{D}$ à **D**. On a : (-2,5) × (-4) = (-2,5) × [2 - (+6)] = (-2,5) × 2 - (-2,5) × (+6) = -5 – (-15) = 10.

On peut de nouveau diviser la classe en plusieurs groupes chargés de calculer en les justifiant des produits de deux négatifs : (-3,5) × (-7,1), (-4) × (-21), (-15) × (-0,3), etc. La classe est alors convaincue des résultats et le professeur fait établir et énoncer par les élèves la règle de calcul : « le produit d'un négatif par un négatif est le positif qui a pour valeur absolue le produit des valeurs absolues ».

Ce qui permet de faire noter sur le cahier des élèves :

4°/ Produit d'un négatif par un négatif

Le produit d'un nombre négatif par un nombre négatif est le nombre positif qui a pour valeur absolue le produit des valeurs absolues

Exemples : $-3,8 \times (-10) = +38$; $-4 \times (-2,5) = +10$; $-0,01 \times (-12) = +0,12$ …

En effet : $-3,8 \times (-10) = (4 - 7,8) \times (-10) = 4 \times (-10) - 7,8 \times (-1) = -40 - (-78) = -40 + 78 = +78$
$-4 \times (-2,5) = (1 - 5) \times (-2,5) = 1 \times (-2,5) - 5 \times (-2,5) = -2,5 - (-12,5) = -2,5 + 12,5 = +10$
$-0,01 \times (-12) = (1 - 1,01) \times (-12) = 1 \times (-12) - 1,01 \times (-12) = -12 - (-12,12) = -12 + 12,12 = +0,12$

> ***Remarque :*** L'idée de la justification du signe est moins naturelle que précédemment. La justification du signe et de la valeur absolue ne peut guère être trouvée que dans le retour à la distributivité associée au produit nul.

5°/ Conclusion de ce travail

On vient de définir une nouvelle opération sur les nombres relatifs, la multiplication.

Les élèves devraient alors se demander s'il existe une quatrième opération : la division. Cela permet de relancer l'étude du PER, avec cette fois l'étude des fractions ou encore la résolution de l'équation $a \times x = b$, avec a et b décimaux relatifs, ou encore, pour commencer, entiers relatifs. Cette question reste provisoirement en suspens et sera étudiée plus tard, lorsqu'on se sera familiarisé avec le calcul des produits.

IV. Travail de la technique et de l'organisation mathématique construite autour de la multiplication des relatifs

Arrivé en ce point, il est nécessaire de donner de nombreux exercices de calcul du produit de deux relatifs, travaillant les différents cas possibles. Il semble aussi nécessaire de rencontrer des cas où l'un des facteurs est -1 ou 0. Les derniers calculs de produits doivent déboucher sur des produits de plusieurs facteurs, éventuellement répétés si l'on souhaite poursuivre par l'enseignement des puissances.

Par exemple, on peut avoir des calculs du type $(-1) \times 3$; $(-1) \times (-3)$; $(-5) \times (-1)$; $(-4) \times (-7) \times (+3)$; $(-4) \times (-7) \times x$; $(-1) \times (-4) \times (-7) \times x$; $(-1) \times 3x$; etc. De manière à établir le rôle du produit par -1, l'associativité de la multiplication, la détermination du signe du produit de plusieurs facteurs. Cela reste à travailler…