

Le savoir mathématique, son organisation

Karine Drousset

20 janvier 2015

Une problématique

Que signifie connaître cette notion ?

Que souhaite-t-on mettre en place pour l'enseigner ?

De manière plus large, qu'est-ce qu'un savoir mathématique ?

Que signifie connaître la division euclidienne?

Que souhaite-t-on mettre en place pour enseigner la division euclidienne ?

Classe n°1

$$24 + 24 = 48$$

$$48 + 24 = 72$$

...

$$120 + 24 = 144$$

$$144 + 24 = 168$$

$$162 - 144 = 18$$

Chaque enfant recevra 6 bonbons et il en restera 18.

Que signifie connaître la division euclidienne?

Que souhaite-t-on mettre en place pour enseigner la division euclidienne ?

Classe n°2

1	2	3	4	5	6	7	Part de chaque élève
24	48	72	96	120	144	168	Nombre de bonbons distribués

$$162 - 144 = 18$$

Chaque enfant recevra 6 bonbons et il en restera 18.



Que signifie connaître la division euclidienne?

Que souhaite-t-on mettre en place pour enseigner la division euclidienne ?

Classe n°3

$$\begin{array}{r|l} 162 & 24 \\ -144 & 6 \\ \hline 18 & \end{array}$$

$$162 = 6 \times 24 + 18$$

Chaque enfant recevra 6 bonbons et il en restera 18.



Que signifie connaître la division euclidienne?

Que souhaite-t-on mettre en place pour enseigner la division euclidienne ?

Classe n°4

Des élèves sont devant un gros tas de bonbons (la maîtresse dit qu'il y en a 162, nombre qu'ils ne connaissent pas).

Ils doivent dire combien les 24 enfants de la classe auront au plus de bonbons, si on en donne la même chose à chacun, et combien il en restera pour la maîtresse.



Que signifie connaître la division euclidienne?

Que souhaite-t-on mettre en place pour enseigner la division euclidienne ?

Des savoirs faire différents

Quelles définitions mathématiques de la division euclidienne ?



Que signifie connaître la division euclidienne?

Une définition:

Étant donnés deux entiers naturels a et b , avec $b \neq 0$, il existe un entier naturel q et un seul tel que : $b \times q \leq a < b \times (q + 1)$.

Tout entier naturel a peut être encadré par deux multiples consécutifs d'un entier naturel $b \neq 0$.

Définition équivalente à :

Étant donnés deux entiers naturels a et b , avec $b \neq 0$, il existe de manière unique deux entiers, un quotient q et un reste r tels que : $a = b \times q + r$ avec $r < b$.

Que signifie connaître la division euclidienne?

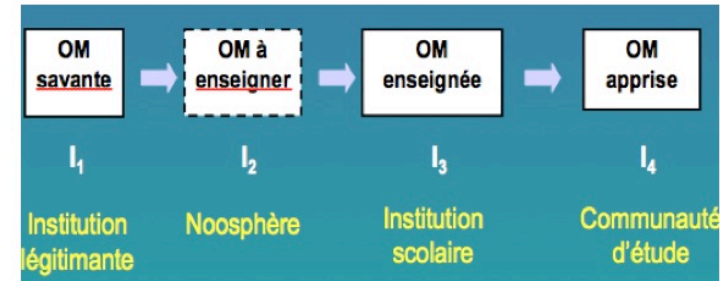
Que souhaite-t-on mettre en place pour enseigner la division euclidienne ?

Choisir l'une des **pratiques** liées à la division euclidienne et les **objets** que fait intervenir cette pratique pour organiser la rencontre, puis l'étude, de ce que l'on nomme « la division euclidienne ». C'est un choix de « transposition d'un savoir ».

Une transposition didactique car motivée par l'intention d'enseigner « l'objet » dans une institution donnée.

Relativité institutionnelle des savoirs Transposition didactique

Le savoir subit des transformations et des apprêts spécifiques pour pouvoir être enseigné dans une institution donnée



Le processus de transposition didactique

Conditions de la transposition : de bonnes distances.

Le savoir enseigné doit être suffisamment proche du savoir savant pour que sa légitimité ne soit pas mise en doute.

Le savoir enseigné doit être suffisamment éloigné du savoir des parents.

Que signifie connaître la division euclidienne?

L'ensemble de savoirs et de savoir-faire en étroite articulation se spécifient de manière différente selon les lieux où on les trouve.

- Dans quelle institution ? Sous quelles conditions ? En tenant de quelles contraintes ?
- Quelles tâches sont à accomplir ? Avec quelle technique ?

Exemple de tâche t : trouver la valeur de chaque part et ce qu'il reste dans un partage équitable de 162 bonbons en 24 parts.



Que souhaite-t-on mettre en place pour enseigner....?

Une organisation mathématique comme quadruplet :

-Un type de tâches,

Type de tâches dont relève t : trouver la valeur de chaque part et ce qu'il reste dans un partage équitable d'une quantité donnée en un nombre donné de parts.

-Une technique pour l'accomplir,

-Une technologie qui permet de justifier, produire et rendre compréhensible la technique,

-Une théorie qui permet de justifier, produire et rendre compréhensible la technologie.



Des organisations mathématiques relatives au même type de tâches

Le bloc pratico-technique

-Classe n°1 : technique avec des additions successives

-Classe n°2 : technique avec des multiplications successives

-Classe n°3 : technique utilisant la puissance

-Classe n°4: distribution effective du tas de bonbons.



Des organisations mathématiques relatives au même type de tâches

Le bloc technologico-théorique

Pour savoir si dans une quantité d'objets on a plus d'objets que dans une autre, on compare le nombre respectifs d'objets.

Importance de l'organisation spatiale.



Des organisations mathématiques relatives au même type de tâches

Le bloc technologico-théorique

Deux définitions de la division euclidienne

Z est un anneau ordonné : compatibilité de l'ordre avec l'addition.

Z est discret : n et m étant deux entiers, $n < m$ équivaut à $n+1 \leq m$.

Z est un groupe archimédien : a et b étant deux entiers, b différent de 0 , il existe k un entier tel que $b > ka$.

Toute partie non vide de N possède un plus petit élément.



Une autre organisation mathématique relative à la tâche t

Un autre élément technologique

a et b étant deux nombres entiers positifs, b différent de zéro.

Si $b = b' b''$ et q' est le quotient de a par b' , q'' est le quotient de q' par b'' ,

alors q'' est le quotient de a par b .

Une nouvelle technique

$24 = 6 \times 4$. $162 = 4 \times 40 + 2$ puis $40 = 6 \times 6 + 4$; le quotient est 6 et le reste est $162 - 6 \times 24 = 18$.



Que souhaite-t-on mettre en place pour enseigner?

Pour répondre à cette question dans le cadre de la *théorie anthropologique du didactique*, on définira **quel type de tâches** on veut que les élèves apprennent à accomplir, **avec quelle(s) technique(s), sur quels arguments technologiques** on s'appuiera et éventuellement quelle théorie légitime l'ensemble.



Évaluation d'une organisation mathématique

- Ce travail est-il conforme à ce qui est attendu au niveau concerné?
- La technique envisagée est-elle adaptée à la tâche à accomplir?
- Les arguments pour élaborer et justifier la technique sont-ils accessibles aux élèves?



Références bibliographiques

Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, *Actes de l'Université d'été 4 – 11 juillet 1998, La Rochelle, Ed. coordonnée par R. Noirfalise, IREM de Clermont-Ferrand*

Enseigner les mathématiques à l'école élémentaire, Les 4 opérations sur les nombres entiers, 2009, Ed. Vuibert, Noirfalise A. & Matheron Y.

Pourquoi la transposition didactique?, 1996, Chevallard
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Pourquoi_la_transposition_didactique.pdf