Questions génératrices – Questions cruciales

Se former à un enseignement des mathématiques bâti sur une dynamique d'étude par l'investigation

Le constat

- Un enseignement des mathématiques globalement immotivé dans le second degré..
- Des activités introductrices trop souvent faites de problèmes dérisoires ou de simples échauffements mettant en scène des pré-requis pour le cours à venir.
- Comme le dit Y. Chevallard l'enseignement "tend à prendre la forme d'une visite guidée de savoirs qu'on visite à la hâte, à l'instar de vestiges monumentaux autrefois vivants mais dont les raisons d'être, les fonctions vitales ont cessées d'être comprises"

Pour changer de paradigme

- Restaurer des raisons d’être de l’étude d’objets mathématiques.
- Partir de questions problématiques et n'introduire l'étude d'objets que parce que celle-ci peut contribuer à l'élaboration de réponses, éventuellement partielles, aux questions posées.
- Construire des propositions pour un enseignement des mathématiques basé sur une dynamique de questionnement:
- l’étude d’une question en appelle d’autres -> parcours d’études et de recherches.

Vers un autre type de processus d'étude et d'enseignement

Principe:

- Développer une genèse artificielle du savoir pour que les élèves rencontrent et éprouvent sa nécessité et sa fonctionnalité.
- Disposer d'une question qui engendrera l'étude des mathématiques par la recherche de réponses ; donc ***une question génératrice***, assez large, que puissent investir (et investiguer !) les élèves.

En amont de la démarche d'investigation: que souhaite-t-on enseigner?

- Déterminer une question génératrice : quelles sont les raisons d'être de la trigonométrie, les nombres, l'algèbre, l'étude des fonctions, la statistique, le triangle, les vecteurs, etc. ?

- Exemples: « Comment déterminer la distance entre deux points dont l'un au moins est inaccessible ? Comment déterminer l'aire d'une surface ? », puis ***plusieurs questions du même type*** « comment déterminer la distance entre ***ces*** deux points-ci, ***ces*** deux points-là, l'aire de ***ces*** surfaces ? »

Un exemple: la symétrie centrale en classe de cinquième

À quelle(s) questions mathématique(s) la symétrie centrale répond-elle ?

- Étude des isométries du plan qui sont engendrées par les symétries axiales
- Toute rotation (et donc toute symétrie centrale) se décompose en deux symétries axiales.

Un exemple: la symétrie centrale en classe de cinquième

Partie 1 : étude d'une configuration directe

Q 1 :

Peut-on faire en sorte que les deux triangles viennent se superposer l'un sur l'autre à l'aide **d'une symétrie axiale** ?

Q 2 :

Peut-on faire en sorte que les deux triangles viennent se superposer l'un sur l'autre à l'aide **de deux symétries orthogonales** ?

Un exemple: la symétrie centrale en classe de cinquième

Q 3 :

Peut-on être certain que le point d’intersection des axes est le milieu ?

Q 4 :

Est-on certain que tous « les chemins » sont possibles ?

Partie 2 : que se passe-t-il lorsqu’on applique deux symétries orthogonales successives à un triangle?

Q 5 :

Pourrait-on expliquer pourquoi on obtient les propriétés observées, notamment le fait que les deux triangles soient toujours superposables ?

Q 6 :

Et que peut-on dire sur la position du triangle « d’arrivée » relativement au triangle initial?

Partie 3 : essentiellement en travail à la maison

Q 7 :

Comment gagner du temps pour la construction de la « figure-image » ?

Q 8 :

Et pour cela, sur quelles propriétés connues pourrait-on s'appuyer ?

Partie 4: recherche de la preuve que le point d'intersection est bien le milieu des points homologues.

Q 9 :

Est-ce que le point d'intersection des axes est effectivement le milieu du segment des points homologues et pourquoi ?

Q 10 :

Est-ce que l'image d'un segment est un segment parallèle et pourquoi ?

Partie 5: équivalence entre appliquer deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires et utiliser la propriété du milieu

Q 11 :

Est-ce qu'on obtient bien ainsi ce que l'on avait obtenu au préalable sur différentes figures (segment, triangle, rectangle, etc.) en appliquant successivement les symétries orthogonales d'axes perpendiculaires ?

Q 12 :

Est-il possible de retrouver les deux axes des deux symétries axiales d'axes perpendiculaires associées à la symétrie centrale donnée?

INSTITUT FRANÇAIS DE L'ÉDUCATION

Un exemple dans un manuel de 5^{e}

Activité 2 : Calque et demi-tour

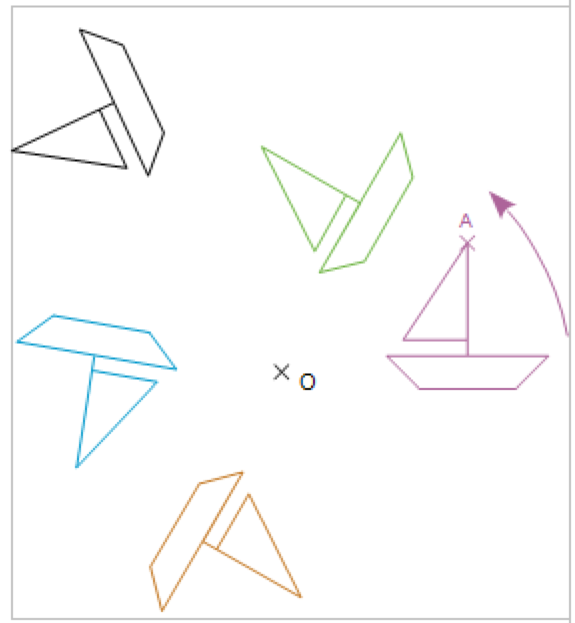
Mathieu a décalqué le bateau violet puis a construit quatre autres bateaux à l'aide de celui-ci.

1. Trois de ces bateaux ont été obtenus par la même méthode. Laquelle ?
Quel est le bateau qui ne respecte pas cette méthode et pourquoi ?

On ne tiendra plus compte de ce bateau pour la suite de l'activité.

2. Certains bateaux sont à moins d'un demi-tour, d'autres à plus d'un demi-tour du bateau de départ. Peux-tu préciser lesquels ?

3. Parmi les bateaux dessinés, y en a-t-il deux qui se déduisent l'un de l'autre par un demi-tour autour du point O ? Si oui, précise lesquels.



4. Mathieu aimerait bien construire un bateau rouge qui soit exactement à un demi-tour du bateau violet. À l'aide d'un papier calque et de tes instruments de géométrie, aide Mathieu à construire ce nouveau bateau.

Le demi-tour autour du point O est encore appelé symétrie de centre O.

5. Construis deux phrases utilisant le mot « symétrique » et les différents bateaux de couleur.

Des difficultés et des contraintes à développer des PER

- **La tyrannie de l'heure**

  Tout problème posé en début d'heure doit être rapidement résolu : problème de faible portée, souvent insignifiant.

  Les élèves ne s'engagent pas dans l'étude, ils attendent la solution que «docilement » ils essaieront d'appliquer dans les exercices proposés…

- **L'apprenant aux mains nues**

  Une question posée doit être telle que l' élève puisse y répondre avec son seul répertoire praxéologique et avec ce qui vient d'être vu en classe.

- **L'organisation des programmes** (nécrose des objets d'enseignement et monumentalisation)

Conclusion

- Dans une DI, ***l'étude est à faire*** $\Rightarrow$ questionnement $\Rightarrow$ ***recherche de solution*** par les élèves et sous la direction du professeur

- Dans un problème de fin de chapitre, l'étude a ***été rédigée*** (par le professeur) de façon ***lacunaire*** $\Rightarrow$ étude supposée ***déjà faite*** $\Rightarrow$ travail de l'élève = ***combler les lacunes***

- Beaucoup des activités proposées par les manuels et utilisées en classe sont des ***exposés*** lacunaires ***de solutions***

-Pour diriger une DI en mathématiques, il est nécessaire de procéder au préalable à une ***analyse mathématique et didactique*** de laquelle émergent les questions cruciales. Les questions cruciales sont ***l'outil principal de la direction d'une DI en mathématiques***

Conclusion

La pédagogie des AER et, plus encore, celle des PER, exige des professeurs un remaniement profond de leur rapport au savoir et, ici, aux mathématiques. Pour le dire d'un mot : le savoir (mathématique), ce n'est plus quelque chose que l'on sait d'avance, c'est ce que l'on découvre de concert avec les élèves au cours d'enquêtes (« mathématiques ») – et peu importe que ces découvertes et autres trouvailles aient été connues de *y* ou pas, soient à portée de main ou durablement inaccessibles.

Yves Chevallard, 2009