

Questions génératrices, questions cruciales, temps didactique, temps d'apprentissage

La question de la question : en amont de la démarche d'investigation en mathématiques (1)

L'idée : parvenir à développer dans la classe, par l'étude et la recherche, une genèse artificielle du savoir, afin que les élèves rencontrent et éprouvent sa nécessité et sa fonctionnalité. A l'origine, disposer d'une question qui engendrera l'étude des mathématiques par la recherche de réponses ; donc ***une question génératrice***, assez large, que puissent investir (et investiguer !) les élèves.

La question de la question : en amont de la démarche d'investigation en mathématiques (2)

Exemples : quelles sont les raisons d'être de la trigonométrie, les nombres, l'algèbre, l'étude des fonctions, la statistique, le triangle, les vecteurs, etc. ? Puis, transposition de la question, afin d'obtenir une question génératrice que puissent s'approprier les élèves, quitte à ce qu'elle soit reprise en plusieurs fois : « Comment déterminer la distance entre deux points dont l'un au moins est inaccessible ? Comment déterminer l'aire d'une surface ? », puis ***plusieurs questions du même type*** « comment déterminer la distance entre ***ces*** deux points-ci, ***ces*** deux points-là, l'aire de ***ces*** surfaces ? »

Questions génératrices et questions cruciales : exemple

Problèmes : Alice et Bertrand jouent avec leur calculatrice. Ils tapent le même nombre sur leur calculatrice, Alice lui ajoute 3 (2) (le multiplie par 11 puis ajoute 5), puis multiplie le résultat obtenu par 7 (élève au carré) . Bertrand multiplie le nombre affiché par 2 (soustrait 2) (par 4) puis (élève au carré et) ajoute 6 (8) (9) au résultat . À leur grand étonnement, ils s'aperçoivent qu'ils obtiennent le même résultat. Quel est ce nombre ?

$$(x+3) \times 7 = 2x+6 \quad S = \{-3\} \quad (x+2)^2 = (x-2)^2 + 8x \quad S = \mathbb{R} \quad 11x + 5 = 4x + 9 \quad S = \{4/7\}$$

Nombre qu'ont pu choisir Alice et Bertrand	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
Nombre alors lu sur la calculatrice d'Alice		-28	-17	-6	5	16	27	38	
Nombre alors lu sur la calculatrice de Bertrand		-3	1	5	9	13	17	21	
Ecart $A - B$		-25	-18	-11	-4	3	10	17	

Questions génératrices et questions cruciales : exemple (suite)

1. Comment faire pour trouver la solution en s'en rapprochant jusqu'à l'atteindre ?

On teste avec 0,1 ; 0,5 ; 0,9 Premier résultat partiel : la solution est entre 0,5 et 0,6. On calcule avec un pas de $1/100^e$: la solution est entre 0,57 et 0,58... Etc. On passe au tableur. L'idée que la solution n'est peut-être pas décimale... semble confirmée par le tableur avec des pas de plus en plus petits (0,57142857...) Nécessité d'une méthode donnant la solution

2. On constate que l'écart (la différence) diminue ; jusqu'à combien va-t-il diminuer ? À quoi sera égale la différence lorsqu'on aura trouvé la solution ?

On rencontre comme une nécessité $(a - b = 0) \Leftrightarrow (a = b)$

Questions génératrices et questions cruciales : exemple (suite)

3. Peut-on trouver la valeur qui rend la différence nulle ?
Nécessité du passage à l'écriture algébrique de la différence : $11x + 5 - (4x + 9)$
4. Comment simplifier cette expression ? Si on ne sait pas, nouvelle recherche
5. Peut-on être sûr que la valeur trouvée est la bonne ? Que c'est la seule ?
6. Peut-on trouver une méthode plus rapide ?



INSTITUT
FRANÇAIS
DE L'ÉDUCATION

Un exemple dans un manuel de 4^e

- b. Reproduire le tableau ci-contre et le compléter.
- c. Observer ce tableau et conjecturer entre quels nombres entiers consécutifs se trouve une solution de l'équation.
- d. Donner des valeurs à x comprises entre ces deux nombres entiers et trouver un nombre décimal solution de l'équation.
- e. Le nombre trouvé convient-il pour la situation imaginée au a. ?

	A	B	C
1	x	$7x+3$	$2x+15$
2	0		
3	1		
4	2		
5	3		
6	4		
7	5		
8	6		
9	7		
10	8		
11	9		
12	10		

3 Solution accessible ?

On considère l'équation $11x + 5 = 4x + 9$.
Avec la calculatrice ou un tableur, procéder comme à l'activité précédente pour tenter de trouver une solution de cette équation. Qu'en pensez-vous ?

Égalités et opérations

4 Conjecturer, puis démontrer

- a. Adrien et Bénédicte ont le même montant d'économies. Que peut-on dire des économies de chacun de ces enfants lorsque :
 - chacun économise 6 € de plus ?
 - chacun dépense 10 € ?
 - chacun triple ses économies ?
 - chacun conserve le quart de ses économies ?
- b. a et b désignent deux nombres égaux : $a = b$.
c désigne un nombre relatif.
 - Réduire, puis calculer la différence $a + c - (b + c)$.
Recopier et compléter : « si $a = b$, alors ... ».
 - Factoriser, puis calculer la différence $ac - bc$.
Recopier et compléter « si $a = b$, alors ... ».

Le savez-vous ?

- Si deux nombres sont égaux, alors leur différence est nulle.
- Si la différence de deux nombres est nulle, alors ces deux nombres sont égaux.

5 Premières applications

Dans chaque cas, x désigne un nombre relatif tel que l'égalité écrite à gauche soit vraie. Recopier et compléter.

- a. $x - 7 = 11$ — On ajoute ... aux deux membres de l'égalité. — $x = \dots$
- b. $x + \frac{7}{4} = \frac{1}{2}$ — On aux deux membres de l'égalité. — $x = \dots$
- c. $2x = x + 9$ — On aux deux membres de l'égalité. — $x = \dots$
- d. $3x = 8,4$ — On ... par ... les deux membres de l'égalité. — $x = \dots$
- e. $-\frac{x}{4} = 7$ — On ... par ... les deux membres de l'égalité. — $x = \dots$

Démarche d'investigation, problèmes, activités

- Dans une DI, ***l'étude est à faire*** ⇒ questionnement ⇒ ***recherche de solution*** par les élèves et sous la direction du professeur
- Dans un problème de fin de chapitre, l'étude a ***été rédigée*** (par le professeur) de façon ***lacunaire*** ⇒ étude supposée ***déjà faite*** ⇒ travail de l'élève = ***combler les lacunes***

Démarche d'investigation, problèmes, activités

- Beaucoup des activités proposées par les manuels et utilisées en classe sont des **exposés lacunaires de solutions** comme c'est le cas de l'énoncé d'un problème
- Pour diriger une DI en mathématiques, il est nécessaire de procéder au préalable à une **analyse mathématique et didactique** de laquelle émergent les questions cruciales. Les questions cruciales sont **l'outil principal de la direction d'une DI en mathématiques.**

Temps didactique, temps d'apprentissage (1)

- Pour qu'un savoir soit **enseignable** il faut qu'il ne soit plus inséré dans le réseau des problématiques et problèmes qui lui donnent un sens complet, et qu'il devienne celui d'une communauté et non plus d'une personne ; c'est la **mise en texte du savoir** (traités (Éléments), programmes, instructions, manuels, cours magistraux)

Temps didactique, temps d'apprentissage (2)

- Mise en texte du savoir \Rightarrow rapport savoir / durée.
- L'enseignant relance l'horloge en introduisant des objets de savoir. Il maintient une avance chronologique entre temps de l'enseignement et temps de l'apprentissage, créant ***la fiction d'un temps didactique unique***.
- La question du temps didactique devient celle de la manière d'introduire des objets nouveaux (ostension directe ou déguisée ? questionnement ?)

Temps didactique, temps d'apprentissage et DI en mathématiques

- Dans une DI en mathématiques, c'est à l'aide d'une liste de **questions cruciales** que le professeur dirige la DI et que les élèves rencontrent des mathématiques qui, souvent, ne peuvent se dire dans l'ordinaire des classes (ce qui fait « qu'on sait faire des maths »). Le rôle du professeur devient celui d'aide des élèves pour progresser dans le processus de **production** de la réponse attendue et de proclamation de sa conformité au savoir (institutionnalisation)
- Il lui faut alors **apprendre à poser des questions cruciales**, et, peu à peu, à faire que la classe et chaque élève apprennent à **(se) poser** de telles questions et **à y répondre**.