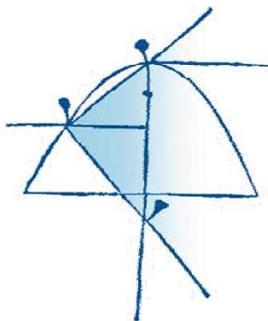


Apports de la technologie à l'apprentissage des mathématiques: éclairage historique.

Michela Maschietto
Université de Modena - Reggio Emilia

michela.maschietto@unimore.it



Laboratorio
delle **Macchine**
Matematiche

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI
DI MODENA E REGGIO EMILIA
Ateneo fondato nel 1175



www.mmlab.unimore.it

Plan

1. Introduction
2. La voix de l'histoire
3. L'idée de laboratoire (de) mathématique(s)
4. Le travail en salle de classe et hors de l'école

1

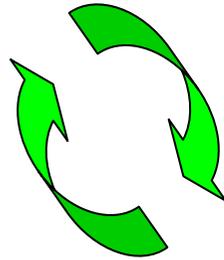
technologie

histoire

apprentissage
des mathématiques

1

technologie



Nouvelle
(TICE)

Ancienne

1

Pourquoi des technologies
anciennes?

Quelles technologies?

Quel intérêt pour
la didactique?

Quels concepts
mathématiques?

Quels parcours?

À quel niveau scolaire?

1

technologie

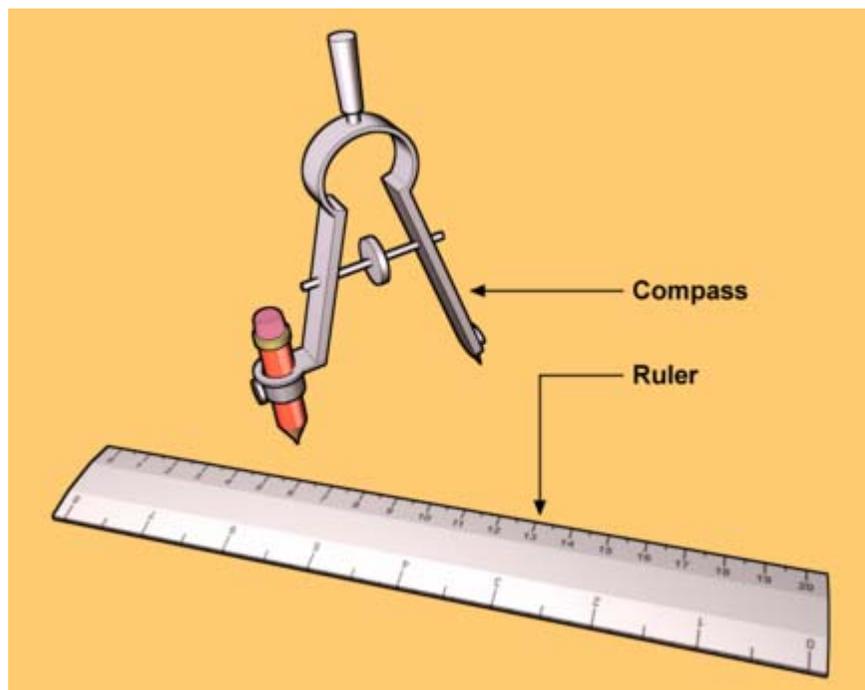
Nouvelle
TICE

Ancienne

histoire

2

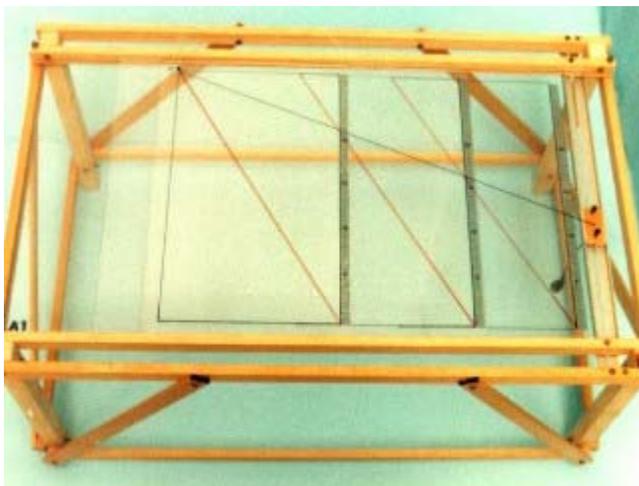
Histoire



2

Histoire

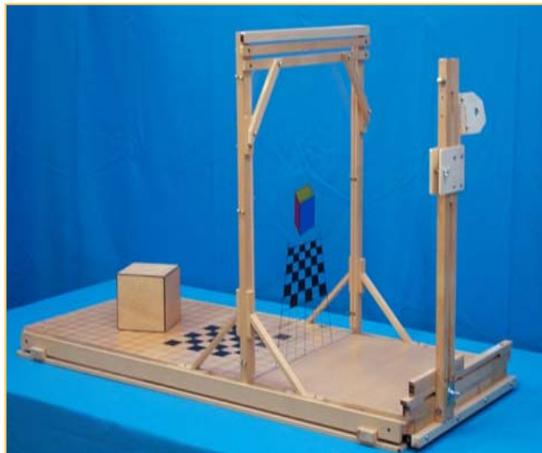
Mesolabon d'Eratosthène (275 a.C.)



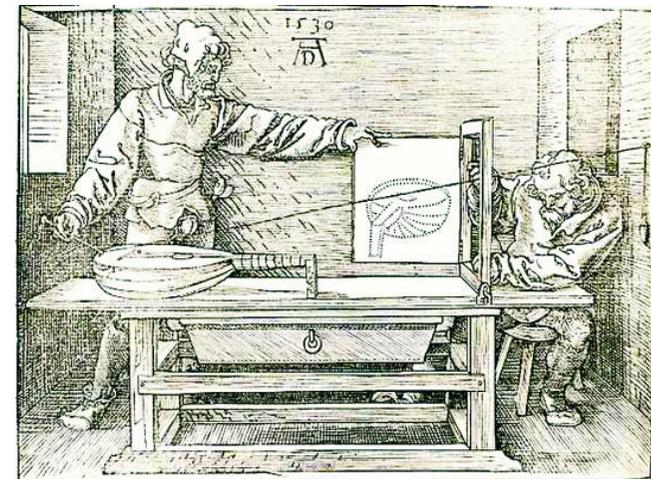
Duplication du cube

2

Histoire

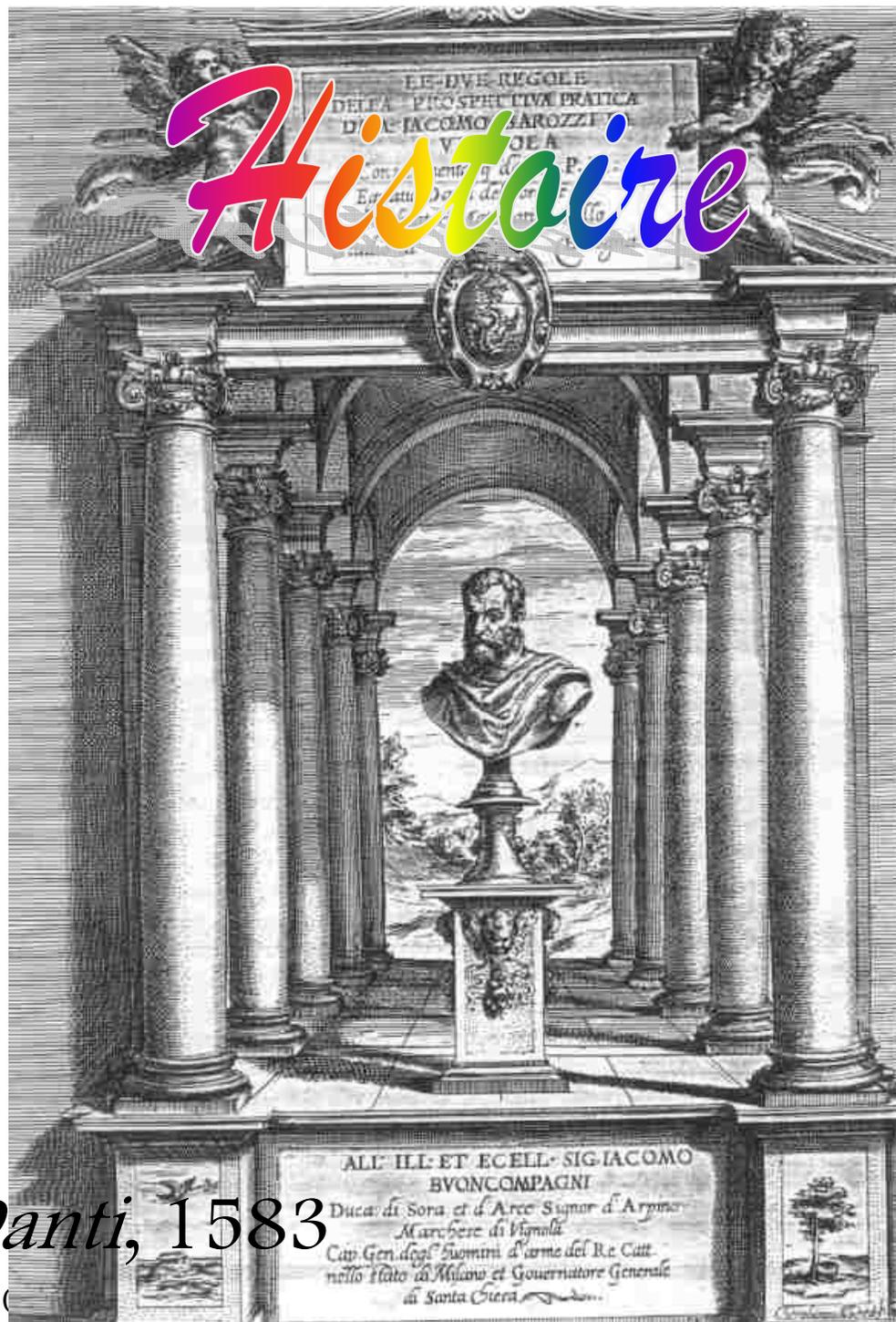


Dürer, 1525



2

Histoire



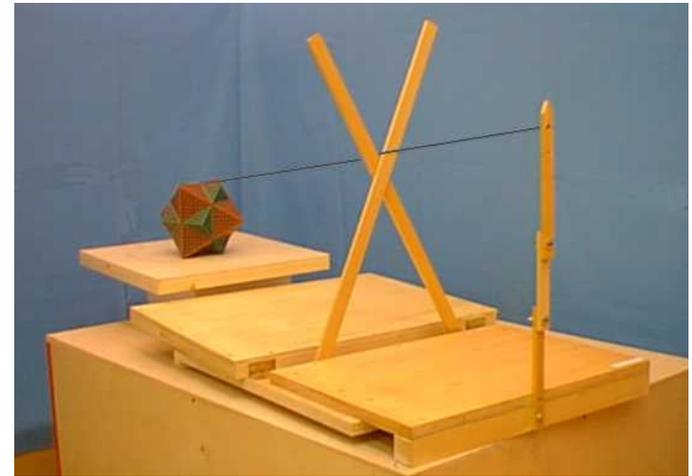
Barozzi ~ Danti, 1583

Formation EducMath - C

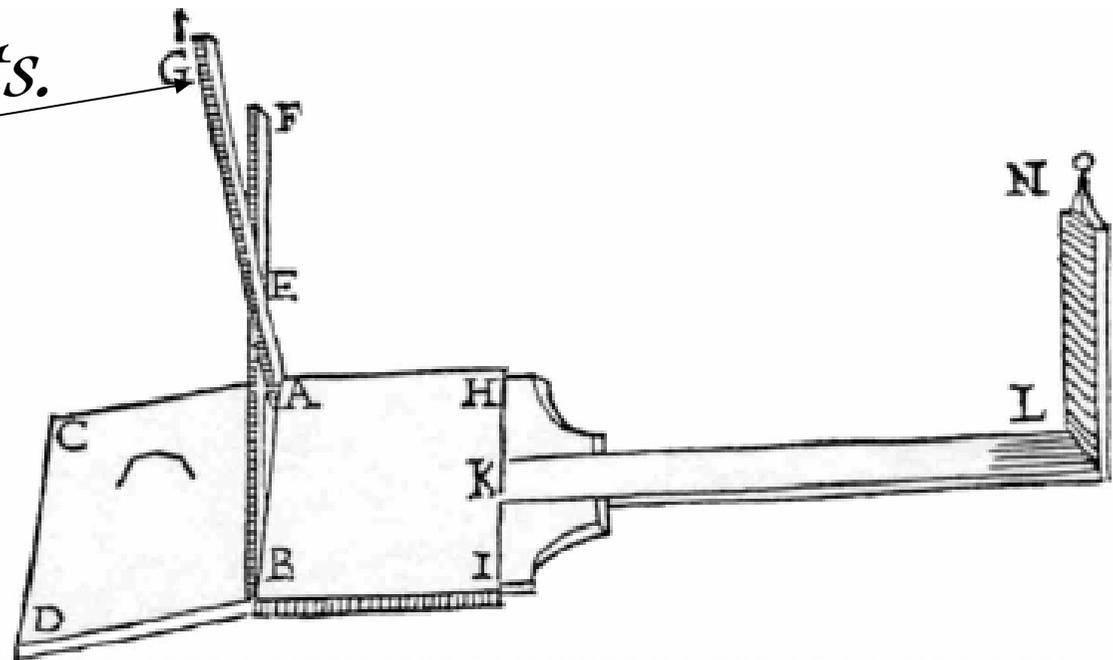
ALL' ILL. ET ECELL. SIG. IACOMO
BVONCOMPAGNI
Duca di Sora et di Arce Signor d' Arpinone
Marchese di Vignola
Cap. Gen. degli Huomini d'arme del Re Catt.
nello Stato di Milano et Governatore Generale
di Santa Giusta

atiques - 7 février 2008

2 *En effet, l'utilisation du portillon est très difficile quand on utilise les fils: parce que lors que le fil radial touche les fils transversaux, il peut les pousser et déplacer de leur position, et nous faire commettre des erreurs*



qui ne sont pas petits.
règles



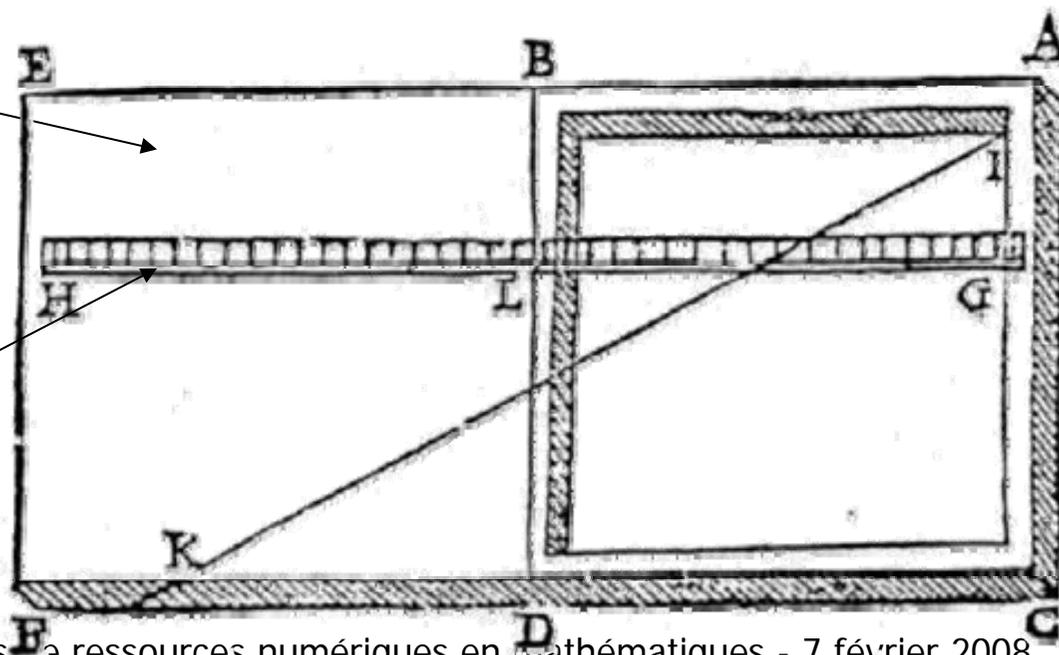
2 *Oratio Trigini de' Marij*

*...on le fabrique double,
comme dans la figure AEFC,
où BF substitue le portillon
à fermer.*



portillon

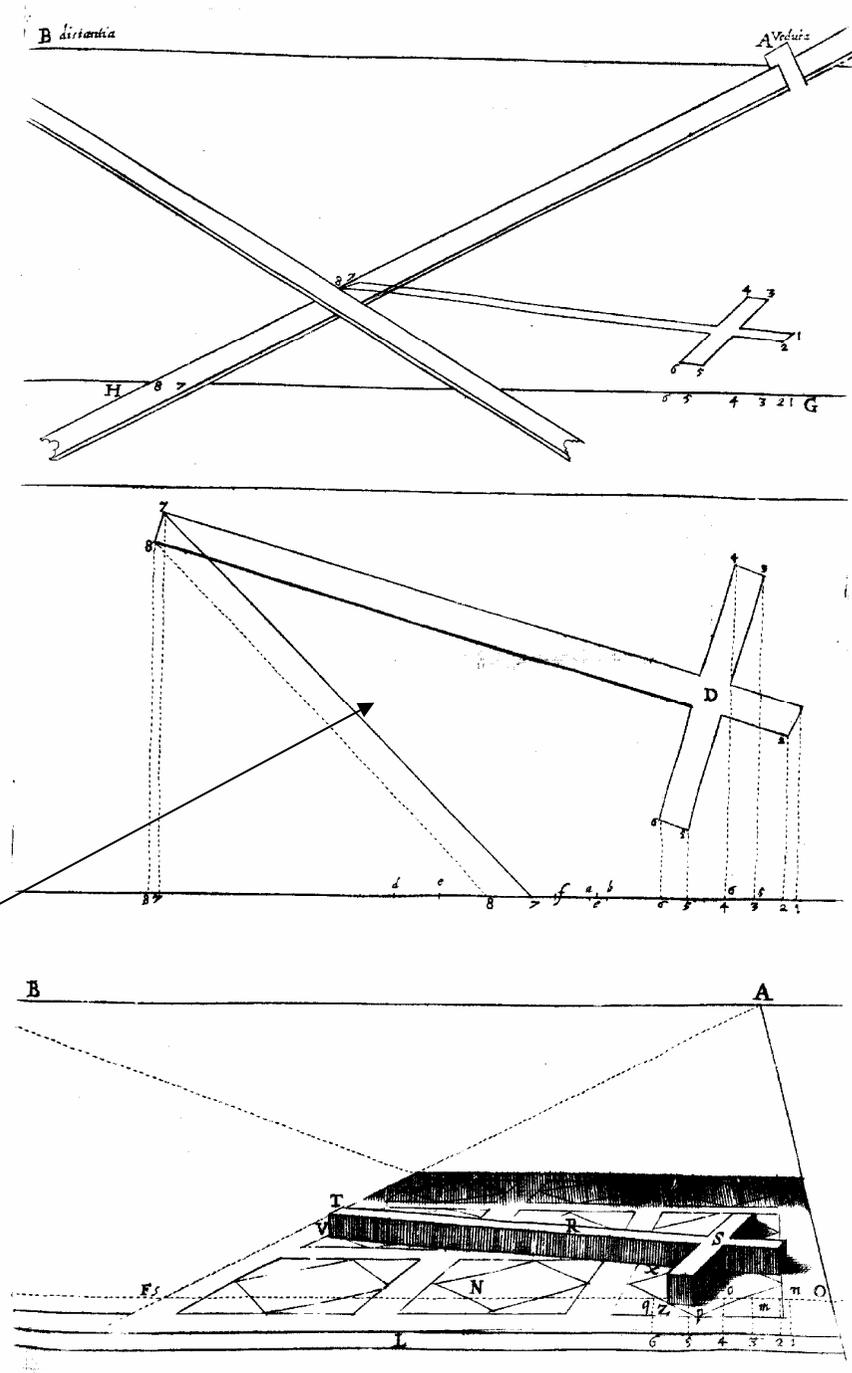
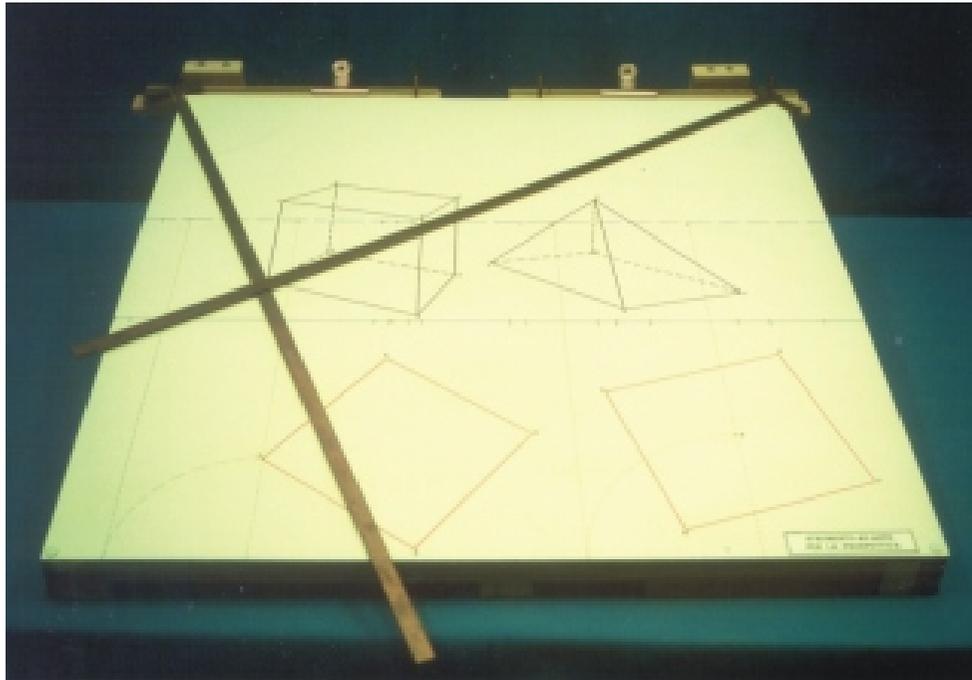
tige avec échelle



2 Ch.XI: *“Comment on dessine en perspective avec deux règles, sans tirer beaucoup de lignes”*

Et puisqu’il serait trop confus [le dessin en perspective] en tirant des lignes, on doit procéder avec deux tiges minces, dont une est fixée au point de fuite noté par A et l’autre [est fixée] au point de distance noté par B.

2



3

Laboratoire (de) mathématique(s)

(Curricolo Matematica 2003

Unione Matematica Italiana – Commissione Italiana per
l’Insegnamento della Matematica)

Le laboratoire de mathématiques [...] peut être présenté
comme une **série de suggestions méthodologiques [...]**
finalisées à la construction de significations mathématiques.
Le laboratoire comprend **élèves et enseignants, structures**
(salles, instruments, organisation des espaces et du temps),
idées (projets, activités didactiques, expérimentations). [...]

l’usage des
artefacts dans
diverses activités



l’interaction
entre les gens

3

Les artefacts du laboratoire de mathématiques

- *Matériel “pauvre”*
- *Machines mathématiques*
- *Logiciels de géométrie dynamique*
- *CAS*
- *Tableur*
- *Calculatrices graphiques ~ symboliques*

L’histoire des mathématiques peut être un instrument de laboratoire.

3

Emile Borel

- Conference au Musée Pédagogique de Paris (3 mars 1904)
- “ Pour amener, non seulement les élèves, mais aussi les professeurs, mais surtout l'esprit public à une notion plus exacte de ce que sont les Mathématiques et du rôle qu'elles jouent réellement dans la vie moderne, il sera nécessaire de faire plus et de créer de vrais laboratoires de Mathématiques [...] p.58*

http://smf.emath.fr/Publications/Gazette/2002/93/smf_gazette_93_47-64.pdf

3

Revue *L'enseignement mathématique*

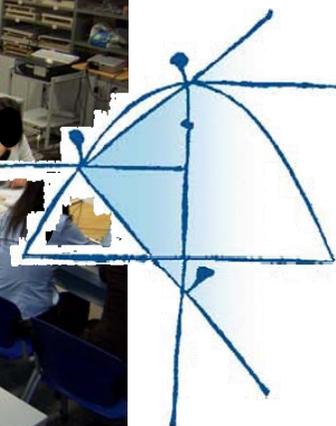
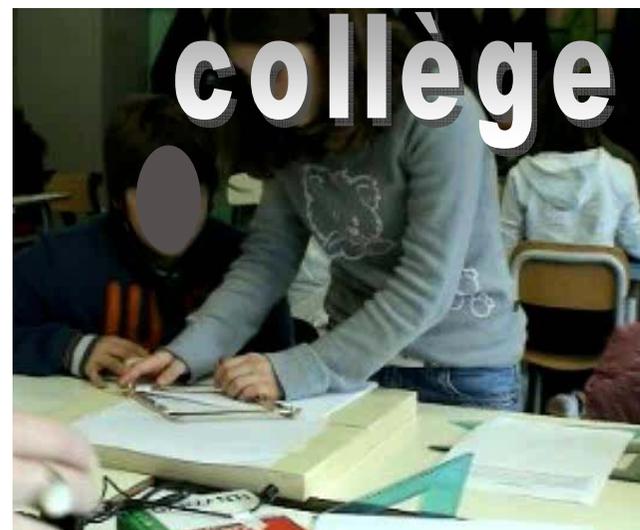
en 1908

- « il a été question ces dernières années de *laboratoires mathématiques*. Qu'a-t-on fait dans ce sens et quels en sont les résultats ? Modèles mathématiques confectionnés par les élèves, le rôle des collections de modèles »

ICMI Symposium

4

Le travail en classe et hors de l'école



Laboratorio
delle **Macchine**
Matematiche

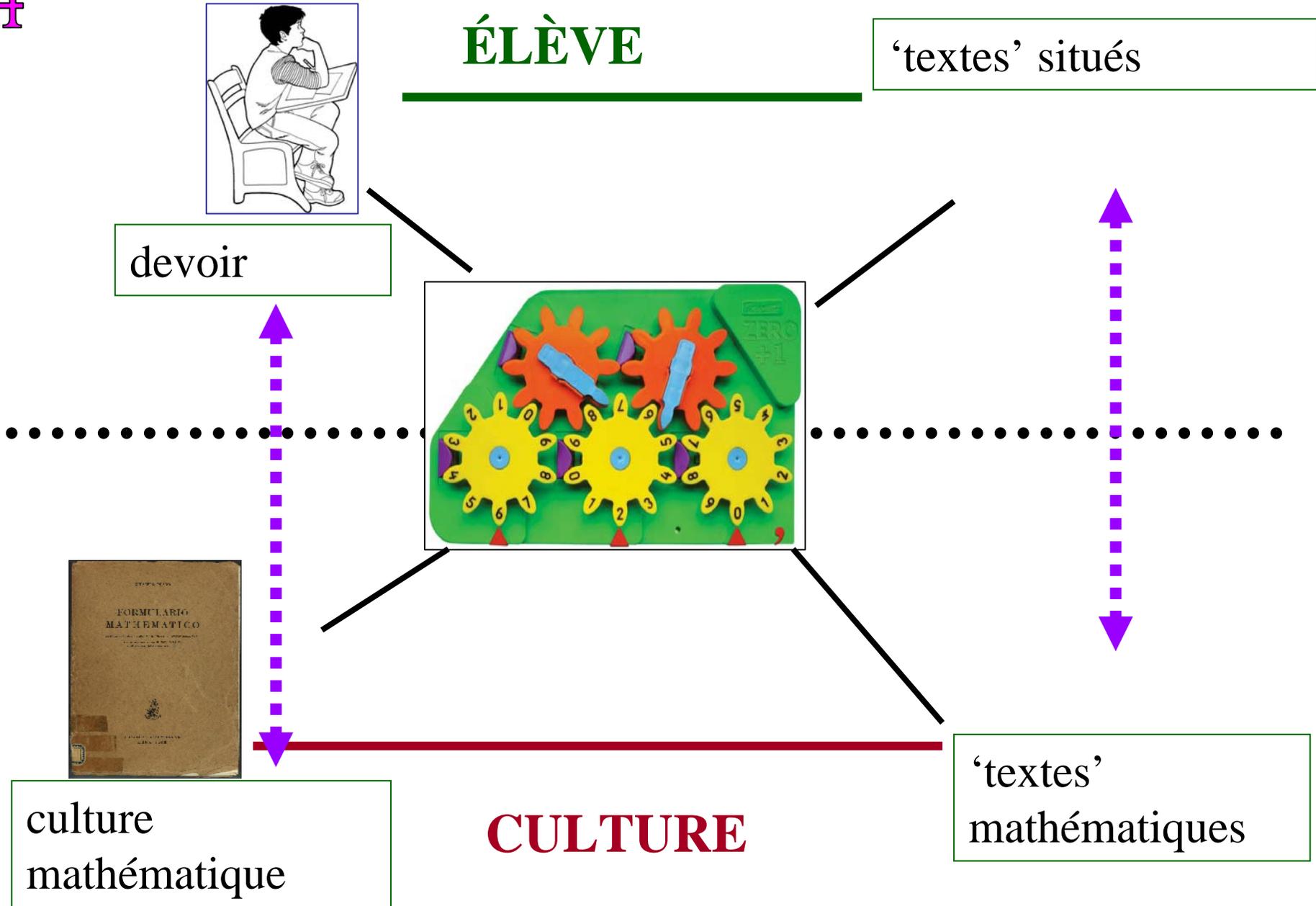
4

Le travail en classe et hors de l'école

- La seule manipulation n'est pas suffisante
- Le rôle de l'enseignant est fondamental
- Quand un artefact est introduit en classe, on sollicite un certain travail et on vise un lien avec une certaine connaissance mathématique
- Transparence de l'artefact

- Structure: travail individuel, collectif et en petit group

4



4

Le travail en classe et hors de l'école

primaire

'Pascaline'

Deux parcours avec
des concepts en jeu
différents

Fin CE2 ~ début CM1

Début CM2

collège

Transformations
géométriques

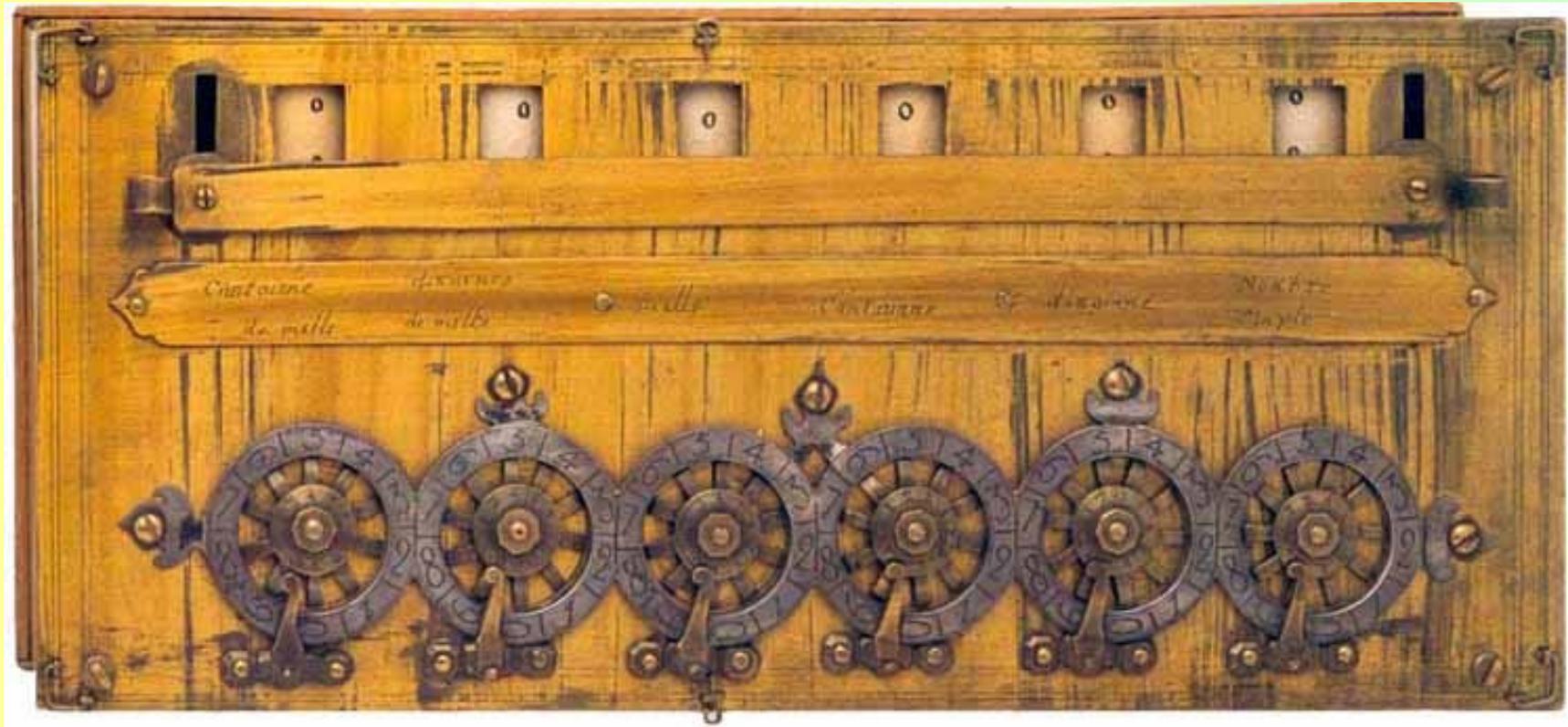
Définitions

4

école primaire

Avec F.Ferri

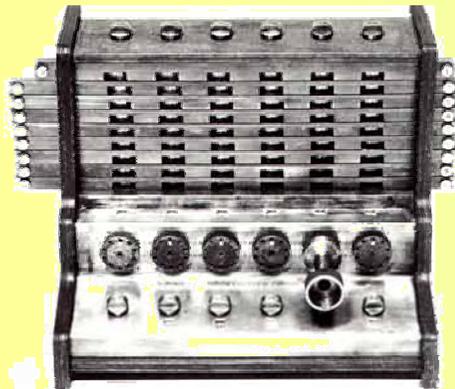
PASCALINE de Blaise Pascal



4

Pourquoi la « pascaline » ?

- Redécouvrir et utiliser des instruments de l'histoire pour construire des concepts mathématiques.
- Continuité avec les recherches sur l'abaque
- Machine pour le calcul



Schickard



4



Zero +1
Quercetti



- Machine constituée par des roues dentelées, dont le mouvement est déterminé par la rotation d'une roue.
- On peut engendrer la suite des nombres naturels par l'opérateur '+1'. (Peano)
- Écriture des nombres
- On peut réaliser des opérations, en particulier des additions et des soustractions.

4



Zero +1
Quercetti

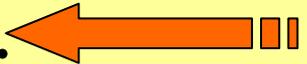


- Construction de schèmes d'utilisation:
Addition par récurrence *Addition par décomposition*
- Automatisation (partielle) du calcul: le report des retenues.
- Obstacle éventuel de l'addition binaire
- 'Absence' de feedback

4

Classe FF: Fin CE2 ~ début CM1

Le parcours

1. A la découverte de la pascaline. 
2. Additions avec la pascaline et comparaison des procédures.
3. Rédaction d'instructions d'utilisation. 
4. Comparaison de textes: des élèves d'abord, puis la lettre de présentation de Pascal et les instructions du constructeur.
5. Écriture de modes divers pour additionner avec la pascaline. 

4

LÈVE

Exploration de la machine
Hypothèse sur le fonctionnement
Production d'exemples



Rotation, parce que d'abord celles-ci [les roues] sont attachées et elle reste au milieu, donc, si par exemple, je tourne celle-ci [roue orange a droite] commence à tourner comme celle à coté [roue jaune] et... tout bouge. Et puis si, au contraire, je tourne celle-ci [roue orange a gauche], celle-ci [roue jaune au milieu] tourne aussi. (F. G.)

Opérations arithmétiques
Automatisme dans le calcul
"Retenue"



'Textes'
mathématiques

Culture
mathématique

CULTURE

4

(1) Difficultés avec l'instrument

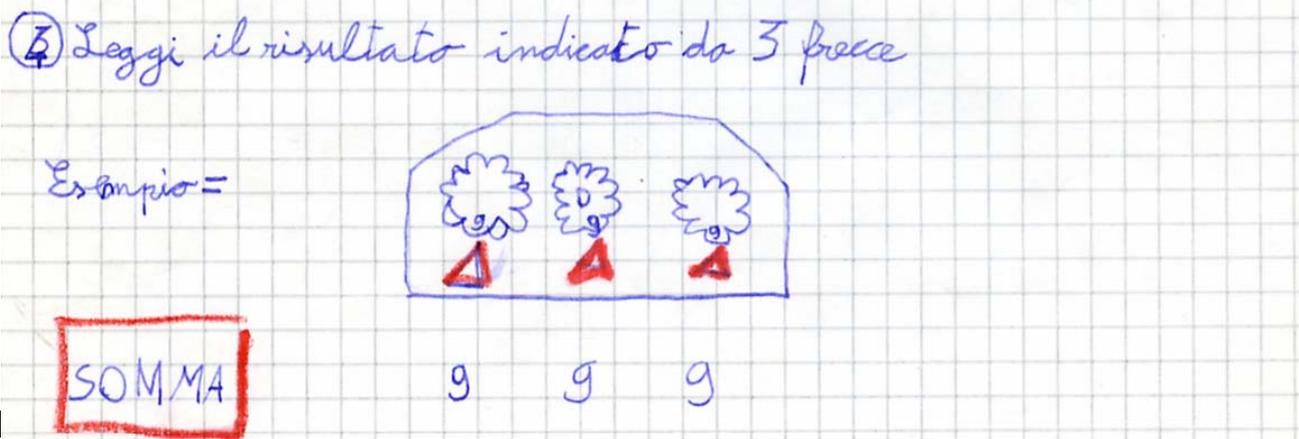
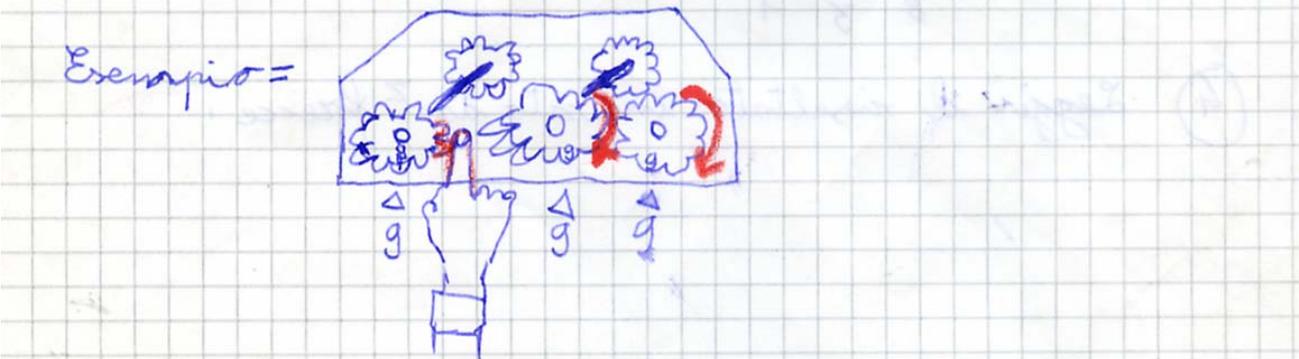
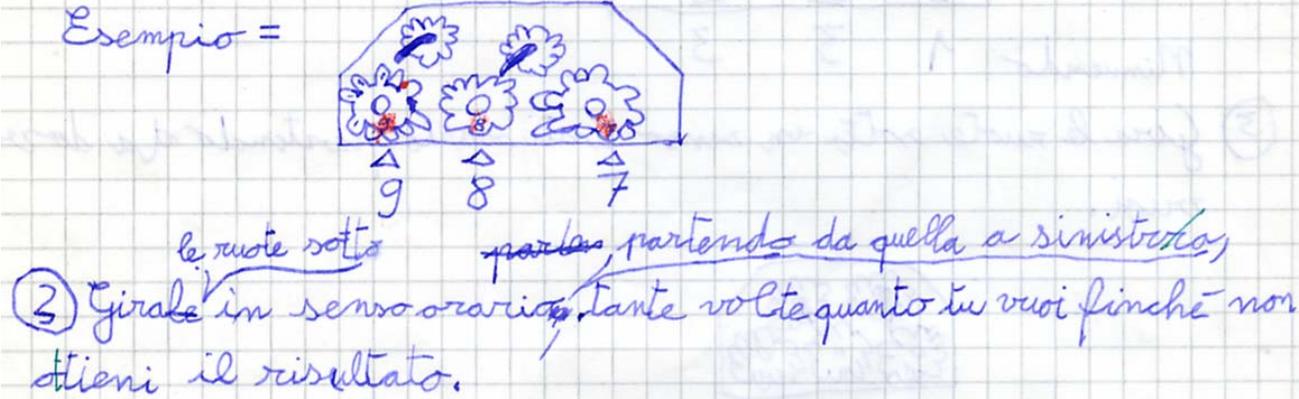
« Alors, nous avons eu beaucoup de difficulté parce que au début nous ne comprenions pas comment réussir à faire ce travail (Giacomo) ».

«Alors, au début nous avons eu un peu de difficulté et nous n'arrivions pas à comprendre comment faire les additions, parce que, même si nous les savions, cependant nous n'arrivions pas à les faire avec la machine (Tommaso) ».

ADDIZIONE

① *Assera le ruote sotto.*
② *Digitata un num. sulla pascalina girando le ruote sotto.*
Esempio =

(3) Rédaction d'instructions d'utilisation



4

(5) La consigne

Pendant une des discussions mathématiques sur les pascalines, je vous ai demandé de faire l'addition $28 + 14$ et de décrire la procédure que vous avez suivie avec la machine.

Voilà les affirmations des deux élèves.

~ **Christian:** ~ J'ai écrit le premier nombre, 28, puis j'ai ajouté le deuxième, en tournant quatre fois dans le sens horaire la roue des unités et la roue des dizaines une seule fois. Le résultat est 42.

~ **Orlando:** ~ J'ai écrit le nombre 28, puis j'ai tourné 14 fois la roue la plus basse dans le sens horaire, celle des unités. Le résultat est 42.

Essayez d'écrire les expressions mathématiques qui représentent les deux diverses procédures

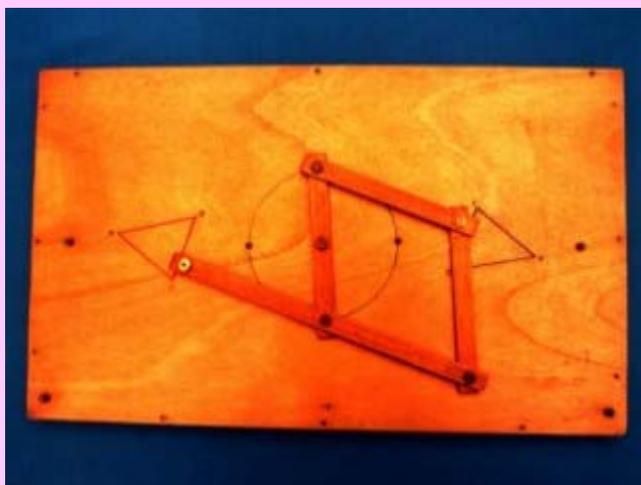
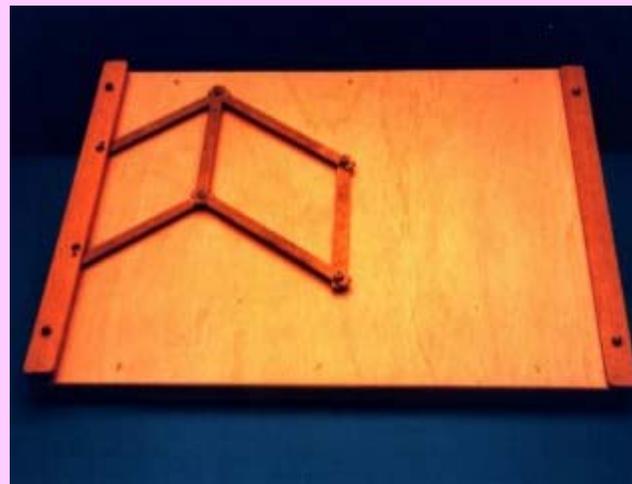
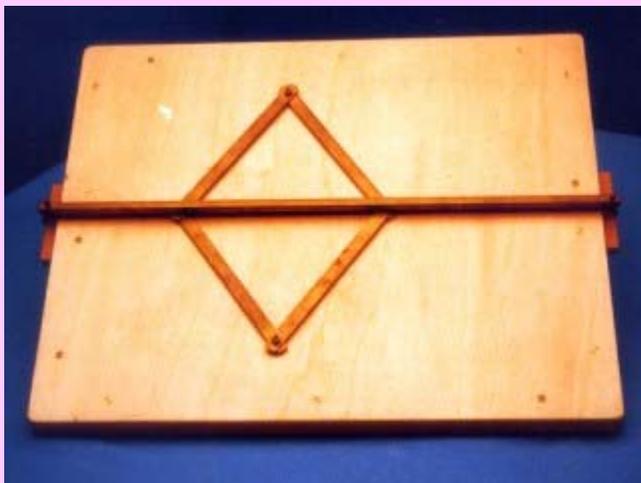
Deuxième protocole (C.R.A)

CHRISTIAN	ORLANDO
$28 + 14 = 42$	$28 + 14$
$20 + 8 + 10 + 4 = 42$	$(20 + 8) + 14 = 42$
$28 +$	$(20 + 8) + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 42$
$14 =$	$+ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 42$
<hr/>	$(20 + 8) + 14 =$
42	$= 28 + 14 =$
$(20 + 8) + (10 + 4) =$	$= 42$
$= 28 + 14 =$	
$= 42$	
$= (20 + 10) + (8 + 4) =$	
$= 30 + 12 =$	
$= 42$	

4

collège

Les machines mathématiques



4

Classe CF: fin de la cinquième Le parcours

1. Symétrie axiale
2. Symétrie centrale
3. Translation
4. Homothétie

Avec F. Martignone

4

Classe CF: fin de la cinquième

- Séances avec les machines et séances sans
- Travail en group (4 élèves) avec une fiche
- Travail collectif au tableau

- Partage de travail avec l'enseignant

4

1. Da quante aste è composto il biellismo? Quale figura formano le aste? Disegnate la macchina e assegnate dei nomi ai vertici della figura. Riportate tali nomi sulla macchina servendovi delle etichette.



- Description de la machine
- Dessin de la machine
- Assignation de noms aux vertex

2. Nella macchina ci sono vertici liberi di muoversi nel piano e vertici che si muovono in un certo modo (si dicono soggetti a vincoli). Quali vertici sono particolari? Quali sono questi vincoli? Quali vertici della figura sono liberi di muoversi nel piano? I due vertici liberi di muoversi nel piano sono chiamati uno "puntatore" e l'altro "tracciatore". Nel vostro disegno della macchina, il puntatore è e il tracciatore è

- Repérage des vertex libres et vertex avec liens sur la machine et sur le dessin

3. Disegnate le figure indicate nella tabella (puoi usare righelli e squadrette) nella parte di piano in cui si trova il puntatore. Mettete la mina nel tracciatore e ricalcate con il puntatore la figura disegnata. Completate la tabella.

<i>Se il puntatore descrive</i>	<i>il tracciatore disegna</i>
un segmento di lunghezza.....	
un segmento perpendicolare alla scanalatura di lunghezza	
un segmento parallelo alla scanalatura di lunghezza	
un triangolo	
un quadrato	

- Dessin de figures symétriques avec la machine
- Invariants de la transformation

- Recherche des relations entre un point et son symétrique (sans le système articulé de la machine)
- Dessin du symétrique d'un point choisi

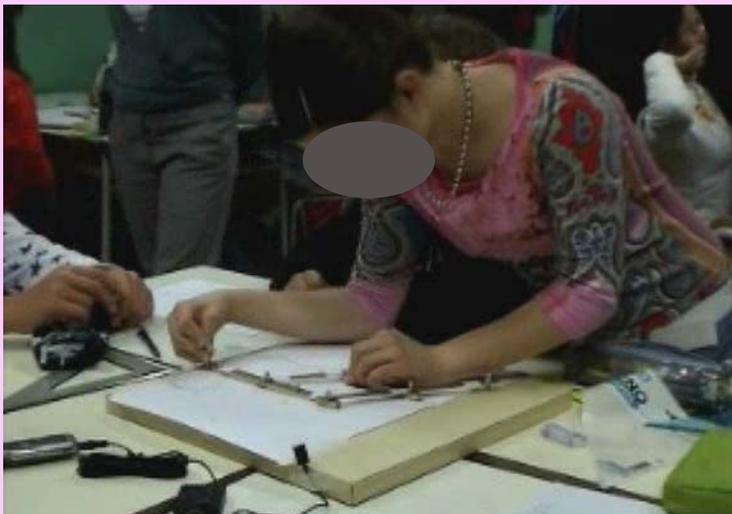
4. Cambiate il foglio. Dato un punto P disegnate il suo corrispondente Q con il tracciatore. Togliete il biellismo dal piano della macchina. Spiegate come si può ottenere il punto Q partendo dal punto P (senza usare il biellismo).

Disegna un punto M. Se il puntatore fosse in M, dove sarebbe il punto N segnato dal tracciatore?

4

La fiche

- Approche à l'artefact différente par rapport à l'école primaire
- Articulation entre la machine et le papier/crayon
- Définition opérationnelle de la transformation



4

Le travail au tableau

- Retravailler les réponses données sur la fiche



- Pas de justification du fonctionnement de la machine

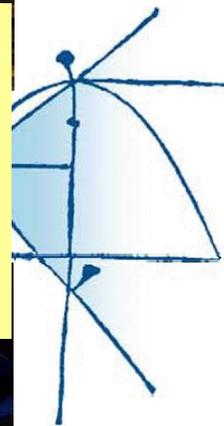
4

Le travail en classe et hors de l'école



Séance de labo

Transposition de
l'idée



Laboratorio
delle **Macchine**
Matematiche

4

troisième-terminale

Les machines mathématiques

sections coniques

transformations

et

traceurs de coniques

 perspective

4



4

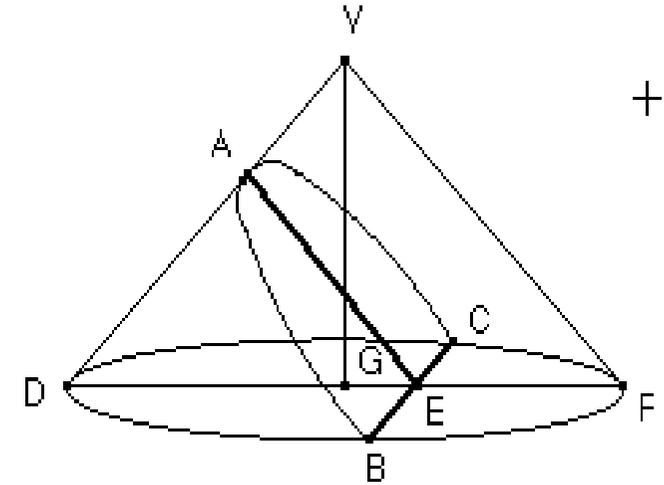
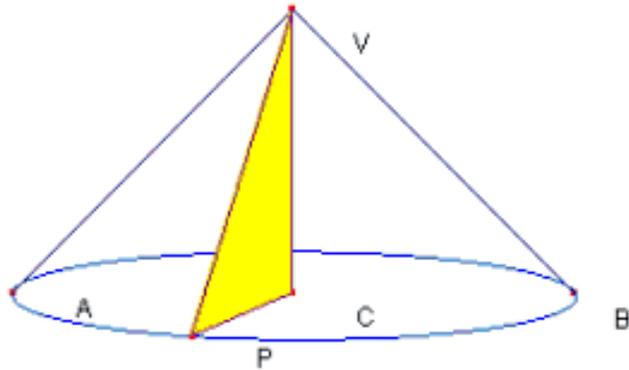
Sections coniques et traceurs de courbes

Parcours: de la théorie “tridimensionnelle” des coniques ... à la théorie “bidimensionnelle”

Théorie des sections coniques: à partir du IV siècle avt JC avec Menechme-Euclide et ensuite Apollonius.

4

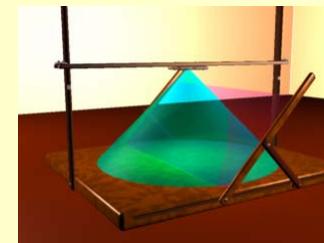
Menechme...



orthotome

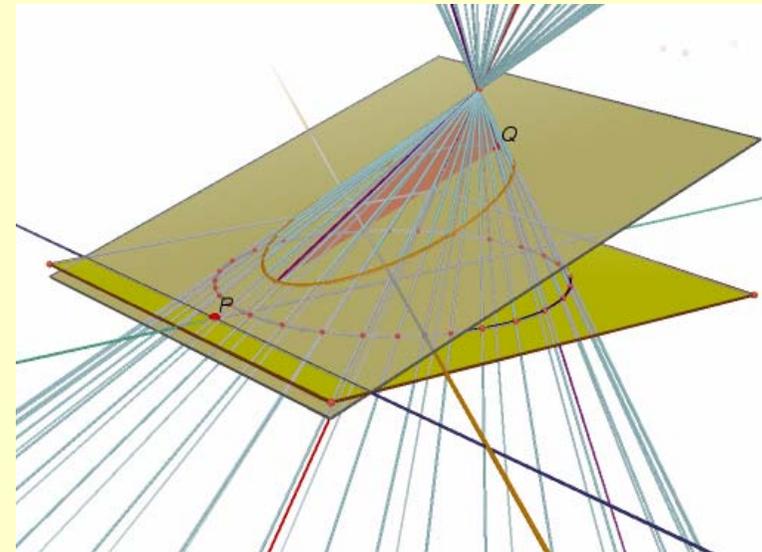
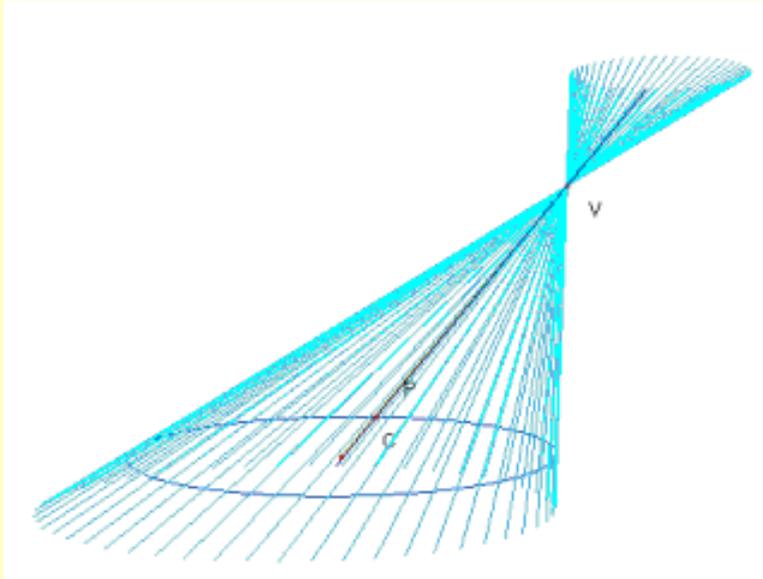
$$BE \cdot BE = AE \cdot 2AV$$

RAJ



4

Apollonius...



4

Traceurs de courbes travail en group

L'utilisation d'instruments pour tracer des sections coniques devient importante après la publication de la *Géométrie* par Descartes, qui donne un rôle important aux instruments mécaniques et au mouvement dans le discours théoriques et dans la solution de problèmes.

Ainsi, divers traités de géométrie des instruments furent écrits par des mathématiciens comme Cavalieri, Van Schooten, etc.

- Analyse de la machine
- Composantes et leur propriétés

- Exploration
- Invariants pendant le mouvement

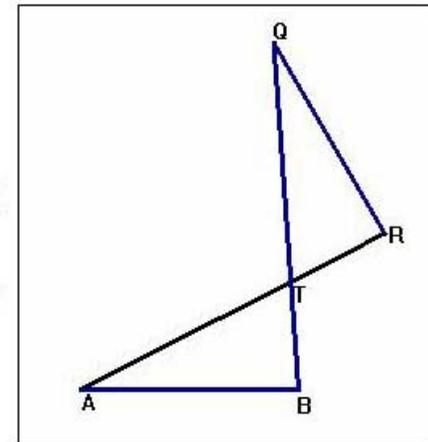
- Propriété de la courbe tracée par le point T
- Propriété des autres courbes que on peut tracer
- Éléments pour justification du fonctionnement

Recherche des équations des courbes

- a)
1. Da quante aste rigide è composto il sistema articolato?
 2. Quali figure geometriche formano tali aste?
 3. Osserva e muovi lo strumento. Come si comportano i diversi vertici di tali figure geometriche? Quanti gradi di libertà hanno?
 4. Quali sono, nello strumento, i segmenti la cui lunghezza non varia durante il moto e quali invece hanno lunghezza variabile?
 5. Tra i segmenti di lunghezza variabile, quali sono uguali fra loro?
 6. Quali segmenti di lunghezza variabile hanno somma costante? Quanto vale tale somma? C'è un elemento della macchina che ha lunghezza pari a tale somma?

Osserva la figura che riproduce il sistema articolato. Ci sono tre tracciatori (Q, R, T)

7. Confronta i triangoli ABT e TRQ . Come sono tra di loro?
8. Quale è la proprietà della curva descritta dal punto T ? Conosci questa curva?
9. Quale è la proprietà delle curve descritte dai punti Q ed R ? Conosci queste curve?



- b)
- Assumi un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con origine nel punto medio fra A e B e asse delle ascisse coincidente con la retta AB . Indica con a la lunghezza del segmento AB e con d quella del segmento AR .
10. Scrivi l'equazione delle curve descritte da R e da Q .
 11. Indica con (x, y) le coordinate di T e utilizza la proprietà trovata al punto 8) per scrivere l'equazione della curva descritta da T .

4

Traceur d'ellipse à parallélogramme croisé

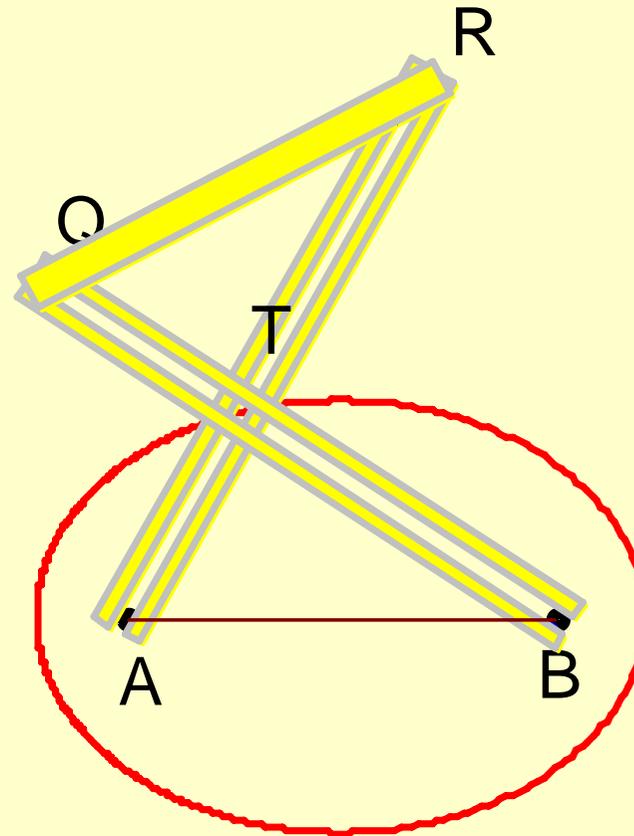
$$AR = QB = l$$

$$AB = QR$$

$$AT = TQ$$

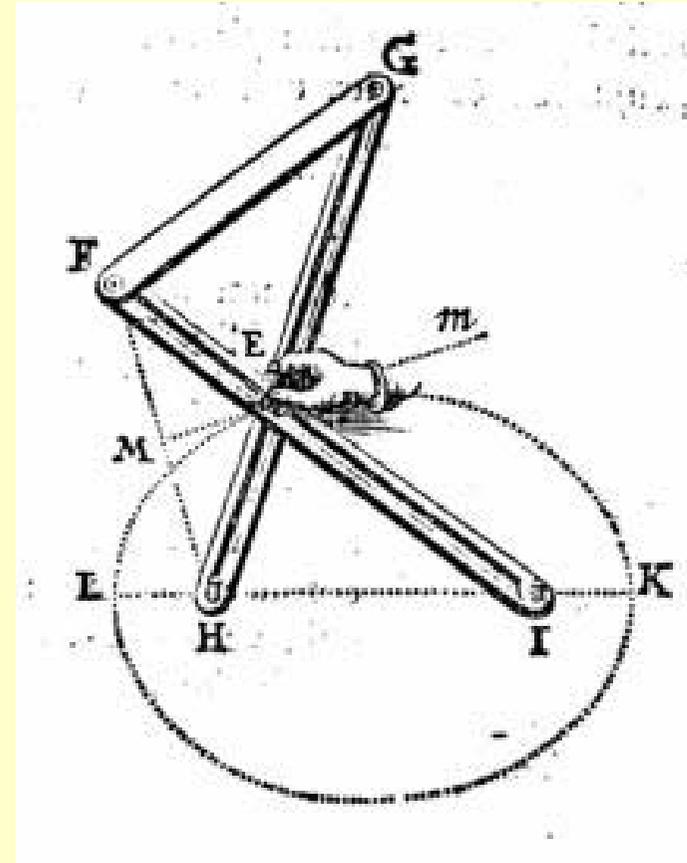
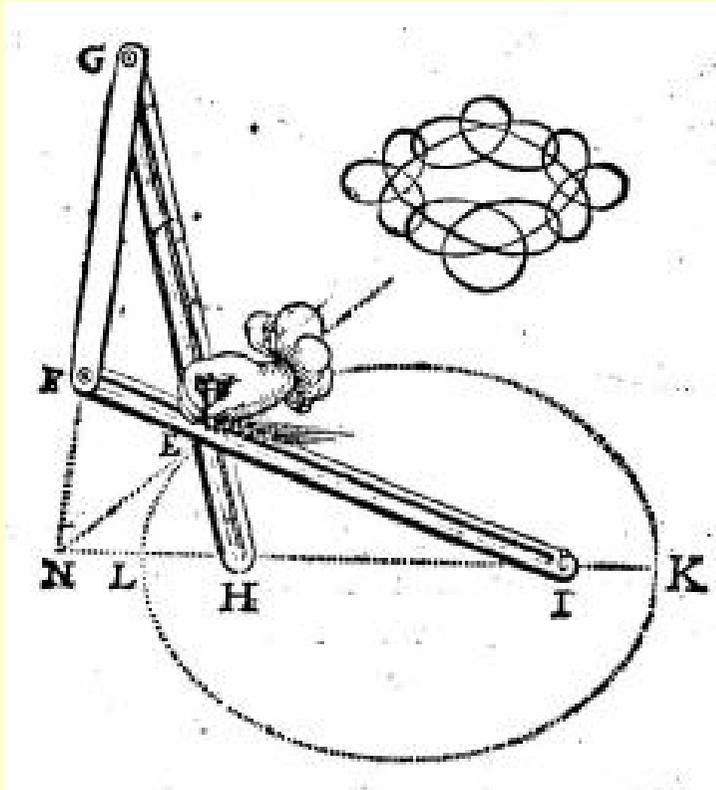
$$BT = TR$$

$$AT + TB = l$$



4

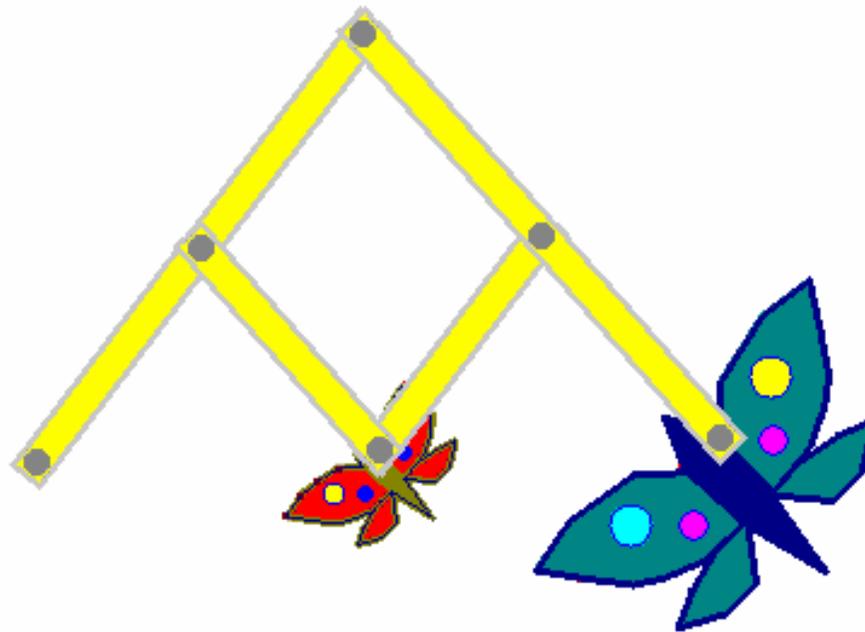
Traceur d'ellipse à parallélogramme croisé



da F. van Schooten,
Exercitationum Mathematicorum libri quinque, 1657

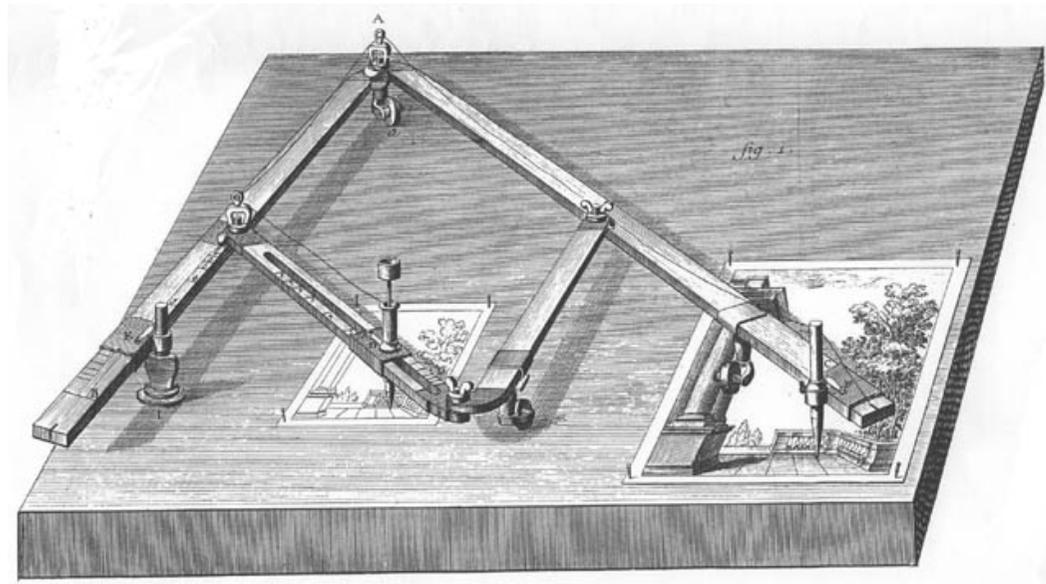
4

Pantographe de Scheiner



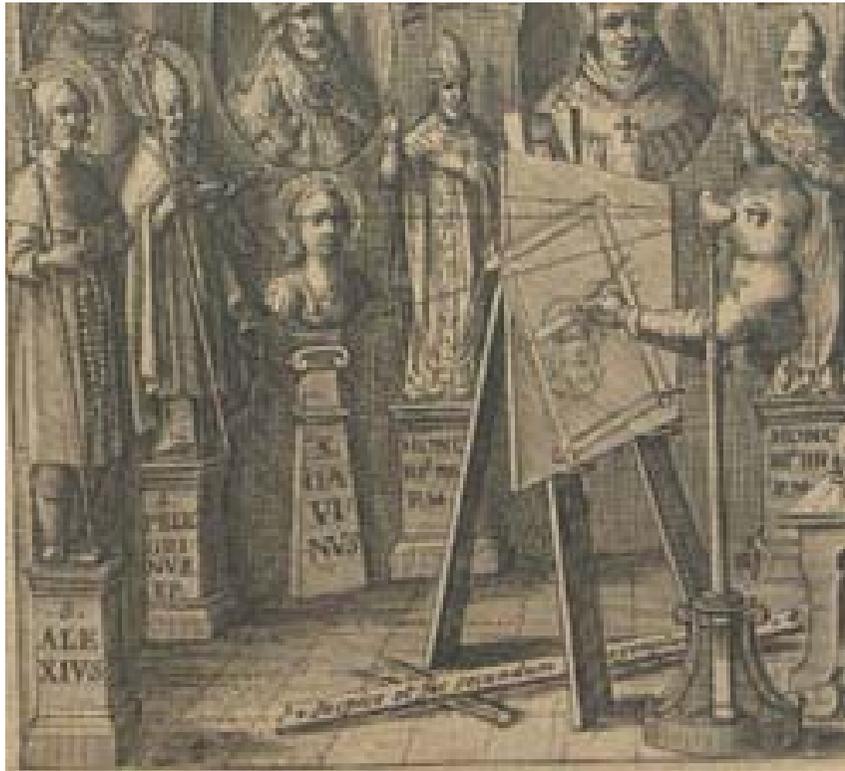
4

Pantographe de Scheiner



4

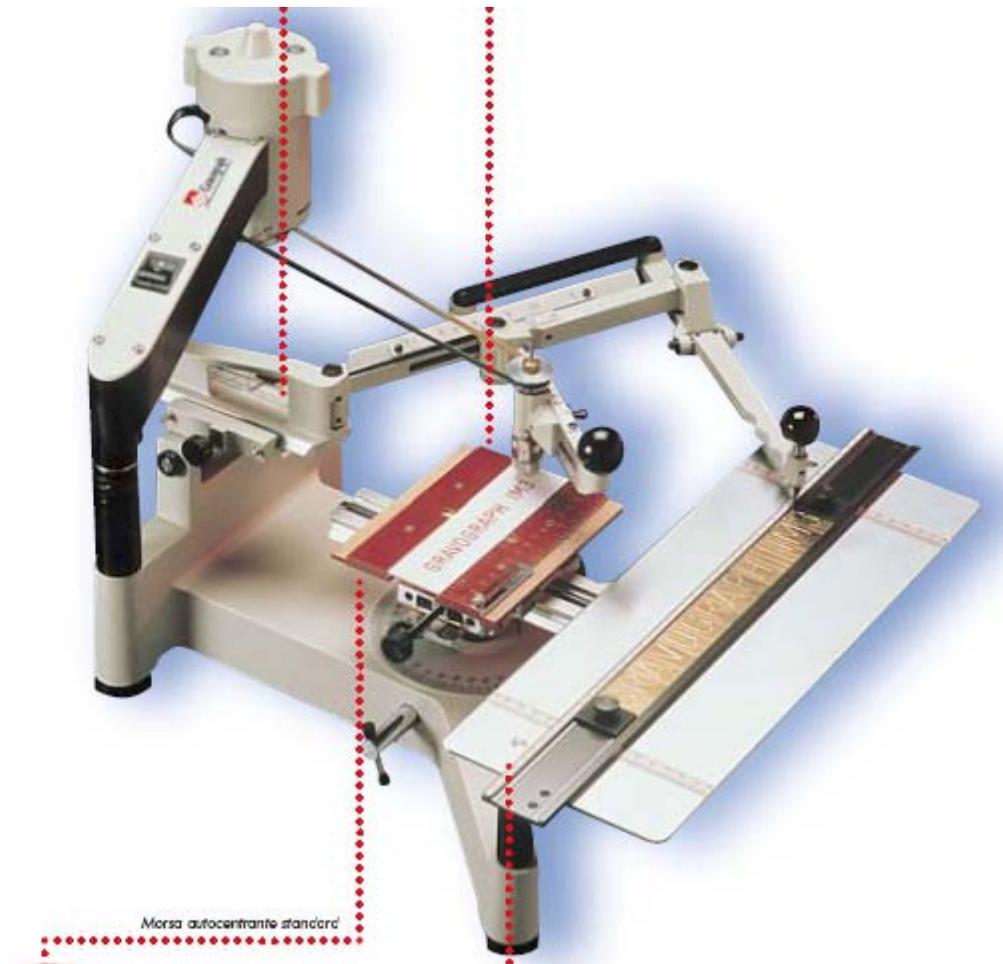
Pantographe de Scheiner



Pantographice seu ars delineandi, Scheiner, 1631

4

Pantographe de Scheiner



Conclusions

- Question de l'articulation entre artefacts
- Ressources
 - Site du Laboratoire
 - Utilisé par les enseignants pour préparer les élèves à la visite au Laboratoire ou pour reprendre certaines machines en classe
 - Projet de recueillir les expérimentations avec la pascaline

Références on-line

- Commission Italienne (résumé en anglais)

<http://umi.dm.unibo.it/italiano/Didattica/ICME10.pdf>

- Conference de Borel (1904)

http://smf.emath.fr/Publications/Gazette/2002/93/smf_gazette_93_47-64.pdf

- Vidéo d'une séance de laboratoire (RaiEXPLORA, en italien)

http://www.explora.rai.it/online/doc.asp?pun_id=1107

- Site MMLab: www.mmlab.unimore.it

- Maschietto, <http://www.dma.ens.fr/culturemath/>

- Trouche, L. & Maschietto, M., 'ICT, new insights on old problems', discussion document per *Working Group 4 Resources and technology throughout the history of ICMI* - ICMI Symposium, Rome, March 2008.

<http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/partWG4.html>